Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Профиль олимпиады:
«Математика»

Класс участия: 11 **Вариант задания: 2**

Задача 1 (12 *баллов*). Найдите остаток от деления числа $\dfrac{100!}{11^9}$ на 11.

Задача 2 (16 *баллов*). Графом называют конечное множество точек вместе с линиями, соединяющими некоторые из этих точек. Точки называют вершинами графа, а соединяющие их линии – рёбрами. На координатной плоскости задан отрезок $x=0,\ |y|\le 5,$ и окружности $(x-3)^2+y^2=25,\quad (x+3)^2+y^2=25,\quad (x+2)^2+y^2=1.$ Вершинами графа являются концы отрезка, а также точки пересечения этих окружностей. Рёбрами этого графа являются части указанных выше линий, соединяющих его вершины. Сколькими способами можно начертить все ребра этого графа одним росчерком, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя более одного раза по одному и тому же ребру?

Задача 3 (16 *баллов*). Отрезки AD и AE являются соответственно медианой и высотой треугольника ABC, точка O – центр вписанной в этот треугольник окружности, F – точка пересечения прямых AE и OD. Найдите отношение периметра треугольника ABC к стороне BC, если $FE=2AF$.

Задача 4 (16 *баллов*). В кубическом кристалле размером 4×4×4, состоящем из 64 одинаковых кубических ячеек, изначально кристаллическая структура ***n*** ячеек оказалась полностью дефектной. В силу контакта по общим граням с дефектными ячейками процесс дефектообразования в кристаллах поэтапно распространяется на соседние ячейки. На каждом этапе дефектообразование охватывает только те ячейки, которые в данный момент имеют общие грани не менее чем с ***m*** уже полностью дефектными соседями.

1) Докажите, что при ***n*** = 9 и ***m*** = 3 при любом начальном расположении дефектных ячеек все ячейки кристалла полностью дефектными никогда не станут.
2) При ***n*** = 6 и ***m*** = 2 укажите какое-либо расположение изначально дефектных ячеек в кристалле, при котором все ячейки станут дефектными не более чем через 8 этапов распространения процесса дефектообразования. Ответ обоснуйте.

Задача 5 (20 *баллов*). В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба *BD,* наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$. Найдите отношение высоты призмы к диагонали ромба AC, если отношение объемов частей, на которые плоскость сечения делит призму, равно $31:77$, причем среди вершин части призмы меньшего объема есть точка С.

Задача 6 (20 *баллов*). См. на обороте листа.

Задача 6 (20 *баллов*). Для изучения планет солнечной системы автоматическая станция выполняет пролёт вблизи Юпитера для изучения его магнитосферы. Вокруг планеты обнаружена зона повышенного радиационного фона. Для упрощения моделирования можно считать, что полет осуществляется в плоскости. Ведем декартову систему координат $x0y$. Пусть центр масс планеты совпадает с началом координат $O(0;0)$.

Границу зоны повышенного радиационного фона считаем окружностью радиуса $R = 120$ тыс. км. с центром в точке O. Траектория станции в плоскости пролёта симметрична относительно оси $0y$ и обладает следующим свойством: для любой точки траектории $P(x;y)$ расстояние до центра планеты O равно расстоянию до прямой L, заданной уравнением $y = 2R$. Станция движется так, что точка её максимального сближения с центром планеты лежит на оси $0y$ и находится точно на границе зоны радиационного фона.

В некоторый момент времени телеметрия фиксирует положение станции в точке S, расстояние от которой до центра планеты составляет $r = 150$ тыс. км. Направляемая антенна станции ориентирована строго по вектору мгновенной скорости (направлена по касательной к траектории в точке S). Для приема данных используется орбитальный ретранслятор T, расположенный на оси симметрии траектории в точке пересечения с лучом антенны.

Определите расстояние от станции до орбитального ретранслятора T в момент фиксации телеметрии. Ответ запишите в километрах, используя точное значение.

Решение варианта №2 (Математика - 11 класс)

1. (12 баллов) Найдите остаток от деления числа $\dfrac{100!}{11^9}$ на 11.

Решение.

Разложим 99! на произведения чисел, делящихся и не делящихся на 11:

$$99! = \prod_{k=1}^{9}(11k) \cdot \prod_{k=0}^{8}\prod_{m=1}^{10}(11k+m).$$

Тогда

$$\frac{99!}{11^9} = 9! \cdot \prod_{k=0}^{8}\prod_{m=1}^{10}(11k+m) \equiv 9! \cdot (10!)^9 \equiv 1 \cdot (-1)^9 = -1 \pmod{11}.$$

Осталось домножить на $100 \equiv 1 \pmod{11}$.

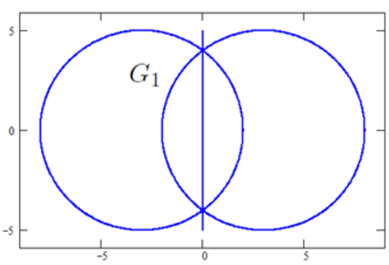
Ответ: 10.

2. (16 баллов) Графом называют конечное множество точек вместе с линиями, соединяющими некоторые из этих точек. Точки называют вершинами графа, а соединяющие их линии – рёбрами. На координатной плоскости задан отрезок $x = 0,\ |y| \le 5$, и окружности $(x-3)^2 + y^2 = 25$, $(x+3)^2 + y^2 = 25$, $(x+2)^2 + y^2 = 1$. Вершинами графа являются концы отрезка, а также точки пересечения этих окружностей. Рёбрами этого графа являются части указанных выше линий, соединяющих его вершины. Сколькими способами можно начертить все ребра этого графа одним росчерком, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя более одного раза по одному и тому же ребру?

Решение.

В графе имеются 2 вершины нечетного порядка: верхняя $(0,5)$ и нижняя $(0,-5)$. Обход надо начинать в одной из них, а закончить в другой. Будем усложнять граф постепенно. В начале был один вертикальный отрезок, $N = 2$ способа. Если мы уже нашли число способов обхода некоторого графа, а потом фрагмент одного из его ребер заменили на пучок из нечетного числа n ребер, то число способов обхода увеличится в $n!$ раз, т. к. надо проходить эти новые n ребер одно за другим в произвольном порядке. Именно это происходит с $n = 5$, когда к отрезку добавляем первые две окружности:

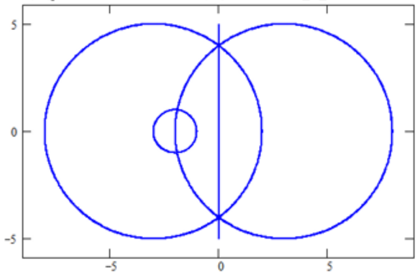
$$\left\{\begin{matrix} x=0 \\ |y| \le 5 \end{matrix}\right\} \cup \{(x-3)^2 + y^2 = 25\} \cup \{(x+3)^2 + y^2 = 25\}$$



$$N = 2 \cdot 5! = 240$$

Если к графу добавляем m петель, висящих на точке, которая прежде была 2 порядка, то число способов обхода увеличится в $2^m \cdot m!$ раз, поскольку в этой точке надо будет остановиться

Добавляем пучок из 3 дуг вместо одного фрагмента дуги, и получаем окончательную картину:



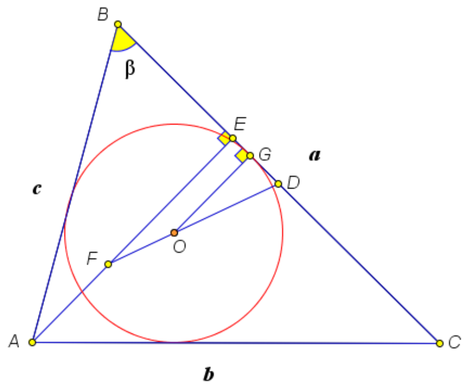
$N = 240 \cdot 3! = 1440$

Ответ: 1440.

3. (16 баллов) Отрезки AD и AE являются соответственно медианой и высотой треугольника ABC, точка O – центр вписанной в этот треугольник окружности, F – точка пересечения прямых AE и OD. Найдите отношение периметра треугольника ABC к стороне BC, если $FE = 2AF$.

Решение.

Обозначим стороны треугольника ABC следующим образом $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Угол ABC обозначим β. Нужно найти $\dfrac{a+b+c}{a} = 1 + \dfrac{b+c}{a}$.



Пусть r - радиус вписанной в треугольник ABC окружности, G - точка касания этой окружности со стороной BC. Тогда $OG = r$. Из свойств касательных к окружности следует, что $CG = \dfrac{a+b-c}{2}$. Действительно, $a+b+c = 2CG + 2(a - CG) + 2(b - CG)$, откуда и следует равенство для CG.

Треугольники OGD и FED подобные, и $\dfrac{FE}{OG} = \dfrac{ED}{GD} \Rightarrow \quad \dfrac{FE}{r} = \dfrac{BD - BE}{CG - CD} \Rightarrow$

$\dfrac{FE}{r} = \dfrac{a/2 - c\cos\beta}{(b-c)/2} = \dfrac{a - \dfrac{a^2+c^2-b^2}{a}}{b-c} = \dfrac{b+c}{a}$. Отметим, что здесь рассуждения приведены для острого угла β, для тупого угла приходим к такому же результату.

Теперь установим связь между AE и r. Используя разные формулы для вычисления площади треугольника ABC, имеем $AE \cdot a = (a+b+c)r$, следовательно,

$AE = \left(1 + \dfrac{b+c}{a}\right) r = \left(1 + \dfrac{FE}{r}\right) r$, $3AF = r + 2AF$, $AF = r$, $\dfrac{b+c}{a} = 2$.

$\dfrac{a+b+c}{a} = 3$. **Ответ:** $3:1$.

Треугольники BDH и BHA

4. (16 баллов) В кубическом кристалле размером 4×4×4, состоящем из 64 одинаковых кубических ячеек, изначально кристаллическая структура ***n*** ячеек оказалась полностью дефектной. В силу контакта по общим граням с дефектными ячейками процесс дефектообразования в кристаллах поэтапно распространяется на соседние ячейки. На каждом этапе дефектообразование охватывает только те ячейки, которые в данный момент имеют общие грани не менее чем с ***m*** уже полностью дефектными соседями.

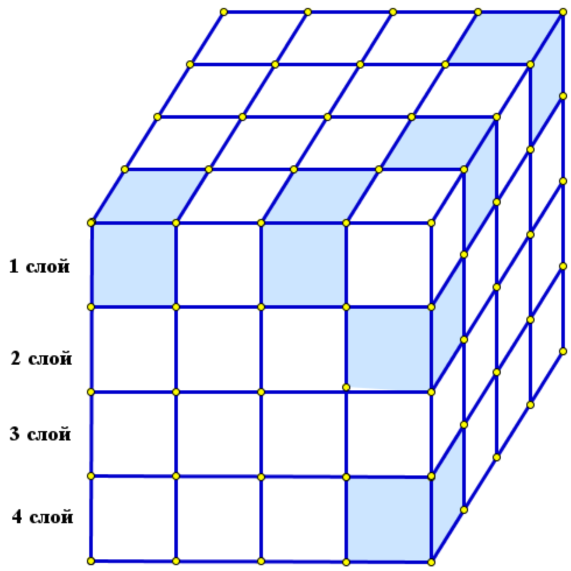
1) Докажите, что при ***n*** = 9 и ***m*** = 3 при любом начальном расположении дефектных ячеек все ячейки кристалла полностью дефектными никогда не станут.
2) При ***n*** = 6 и ***m*** = 2 укажите какое-либо расположение изначально дефектных ячеек в кристалле, при котором все ячейки станут дефектными не более чем через 8 этапов распространения процесса дефектообразования. Ответ обоснуйте.

Решение:

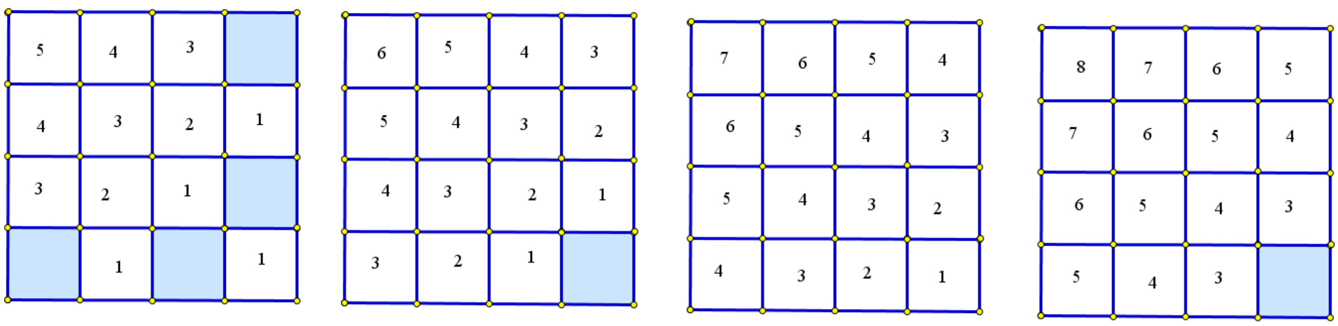
1) Рассмотрим случай $\boldsymbol{m} = 3$, т.е. когда дефект в кристаллах распространяется на те и только те ячейки, у которых не менее трех соседних ячеек (имеющих общую грань) уже дефектны. Пусть S_t – текущая суммарная **площадь внешней поверхности тела** T_t (связного или несвязного), образованного дефектными ячейками (т.е. грани ячеек, являющиеся внутренними для тела T_t, не учитываются) после t-го этапа дефектообразования. S_0 — площадь поверхности тела из ***n*** = 9 изначально дефектных ячеек. Выясним, как меняется S_t на следующем этапе при повреждении (дефектообразовании в кристаллической решетке) очередной какой-то ячейки А. Будучи еще бездефектной, ячейка А граничила с k ($k \geq 3$) дефектными соседями, а $6 - k$ её граней контактировали с бездефектными соседями или внешней средой. При повреждении ячейки А (и присоединении ее к телу T_t) исчезают k граней (ранее эти грани входили во внешнюю поверхность дефектных ячеек, после образования дефекта в ячейке А они стали внутренней границей двух дефектных ячеек, и потому не учитываются), т.е. S_t уменьшается на k. Однако, при этом у тела T_t появляются $6 - k$ новых граней с бездефектными соседями или внешней средой (теперь ячейка А стала дефектной, и площади этих граней входят в S_t по типу контактирования «дефектная–бездефектная» или «дефектная–внешняя среда»). Таким образом, изменение площади S_t с каждой новой дефектной ячейкой равно $\Delta S = (6 - k) - k = 6 - 2k$ (площадь одной грани ячейки принимаем за 1). Для $k \geq 3$ имеем: $k = 3 \to \Delta S = 0$; $k = 4 \to \Delta S = -2$; $k = 5 \to \Delta S = -4$; $k = 6 \to \Delta S = -6$. Следовательно, при добавлении очередной ячейки к телу T_t площадь S_t **не увеличивается** (может остаться той же или уменьшиться). Начальная площадь S_0 будет максимальной, если все изначально дефектные ячейки изолированы: $S_0 = 6 \times 9 = 54$. Чтобы весь куб (64 ячейки) стал поврежденным, итоговая S_t должна быть равна площади внешней поверхности куба: $6 \times 4 \times 4 = 96$. Но S_t не может увеличиваться и потому: $S_t \leq S_0$ для всех этапов t. Поскольку $S_0 \leq 54$, то и $S_t \leq 54$ на любом этапе t, и S_t никогда не достигнет 96. Следовательно, полное заполнение куба дефектными ячейками **невозможно** при любом начальном расположении 9 дефектных ячеек. Кристалл **никогда не станет дефектным полностью**.

2) Пусть $\boldsymbol{n} = 6$ и $\boldsymbol{m} = 2$. Приведем пример расположения <u>6 дефектных ячеек</u> в кубе, приводящего к полному повреждению всех 64 ячеек не более чем за 8 этапов дефектообразования при условии, что повреждаются те и только те ячейки, у которых <u>не менее двух соседей</u> уже дефектны. Поскольку $\Delta S = (6-k) - k = 6 - 2k$, и $k = m = 2$, то $\Delta S = 2$ и площадь S_t может увеличиваться, если ячейка, граничащая с k уже поврежденными ячейками, найдется. Значит, потенциально все ячейки могут стать дефектными.

Например, расположим шесть начальных дефектных ячеек следующим образом (на рисунке справа эти ячейки выделены темным цветом):



Покажем, как распространяются дефекты по слоям (ниже приведен вид сверху каждого слоя) всего куба на каждом этапе:



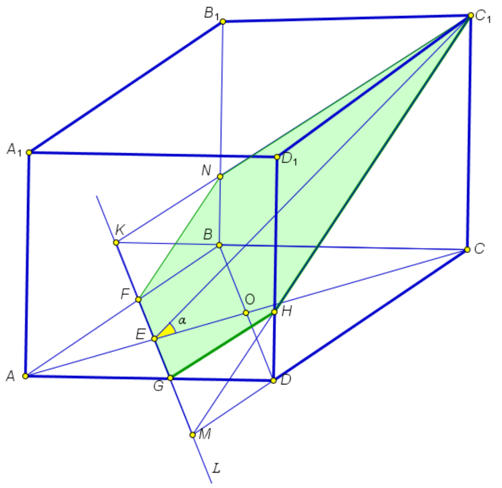
1 слой **2 слой** **3 слой** **4 слой**

- первоначально поврежден на n этапе

При таком начальном расположении дефектных ячеек все ячейки большого кристалла повреждаются за 8 этапов.

5. (20 баллов) В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба BD, наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$. Найдите отношение высоты призмы к диагонали ромба AC, если отношение объемов частей, на которые плоскость сечения делит призму, равно $31:77$, причем среди вершин части призмы меньшего объема есть точка C.

Решение.



Если плоскость сечения пройдет через точку A, то она разделит призму на две равновеликие части. Поскольку среди вершин части призмы меньшего объема есть точка С, то плоскость сечения пересекает отрезок AC по прямой L, параллельной BD. Пусть O – точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Если точка пересечения L с AC лежит на отрезке OC и не совпадает с C, то сечением является треугольник, площадь проекции которого на плоскость основания не превышает половины площади основания, и объем меньшей части $V_1<\frac{V}{6}$, где V – объем всей призмы. По условию $\frac{V_1}{V}=\frac{31}{108}$, и $\frac{31}{108}=\frac{V_1}{V}<\frac{1}{6}$, что неверно. Таким образом, точка пересечения L с AC лежит между точками A и O.

Обозначим $CC_1=x,\ AC=d,\ \frac{d}{x}=p,$ E – точка пересечения прямой L с AC. Поскольку диагонали ромба перпендикулярны, а $L \parallel BD, L\perp AC,$ то угол α между плоскостью сечения и плоскостью основания совпадает с углом CEC_1, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$. Тогда $CE=\frac{2}{3}x$. Пусть K, F, G, M – точки пересечения прямой L с прямыми BC, AB, AD *и* CD соответственно. Точки N и H – точки пересечения прямых C_1K и C_1M с ребрами BB_1 и DD_1 соответственно. Пирамиды $NKBF$ и $HGDM$ равны и подобны пирамиде C_1KCM с коэффициентом подобия $k=\frac{OE}{CE}=\frac{\frac{2}{3}x-\frac{d}{2}}{\frac{2}{3}x}=\frac{4-3p}{4}$. Объемы этих пирамид $V_0=V_{NKBF}=V_{NKBF}=\left(\frac{4-3p}{4}\right)^3 V_{C_1KCM}$. Тогда объем меньшей части $V_1==\left(1-2\left(\frac{4-3p}{4}\right)^3\right)V_{C_1KCM}$. Треугольники BCD и KCM подобны с коэффициентом подобия $k_1=\frac{CO}{CE}=\frac{3d}{4x}=\frac{3p}{4}$. Тогда $S_{KCM}=\left(\frac{4}{3p}\right)^2 S_{BCD}=\frac{8}{9p^2}S_{ABCD}$, и $V_{C_1KCM}=\frac{8}{27p^2}S_{ABCD}\cdot x=\frac{8}{27p^2}V$. Поскольку $\frac{V_1}{V}=\frac{31}{108}$, то $\frac{8}{27p^2}\left(1-2\left(\frac{4-3p}{4}\right)^3\right)=\frac{31}{108}$. Приходим к уравнению $32-(4-3p)^3=31p^2$. Сделаем замену $4-3p=t$. Тогда $9(32-t^3)=31(4-t)^2 \Leftrightarrow 9t^3+31t^2-248t+208=0$. Уравнение имеет корень $t=1$. При делении многочлена $9t^3+31t^2-248t+208$ на $t-1$ получаем $9t^2+40t-208$. Корни этого квадратного трехчлена равны $\frac{-20\pm4\sqrt{142}}{9}$. После обратной замены имеем $p_1=1,\ p_{2/3}=\frac{56\pm4\sqrt{142}}{27}$. Поскольку $\frac{d}{2}<\frac{2x}{3}<d$, то $\frac{2}{3}<p<\frac{4}{3}$, и $\frac{56-4\sqrt{142}}{27}<\frac{56-4\sqrt{121}}{27}=\frac{4}{9}<\frac{2}{3}$, $\frac{56+4\sqrt{142}}{27}>\frac{56+4\sqrt{121}}{27}=\frac{100}{27}>\frac{4}{3}$. Следовательно, подходит только $p=1$. **Ответ:** 1:1.

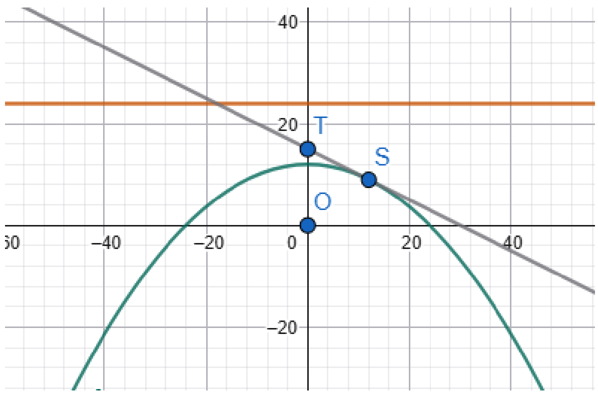
6. (20 баллов) Для изучения планет солнечной системы автоматическая станция выполняет пролёт вблизи Юпитера для изучения его магнитосферы. Вокруг планеты обнаружена зона повышенного радиационного фона. Для упрощения моделирования можно считать, что полет осуществляется в плоскости. Ведем декартову систему координат xOy. Пусть центр масс планеты совпадает с началом координат $O(0;0)$.

Границу зоны повышенного радиационного фона считаем окружностью радиуса $R =$ 120 тыс. км. с центром в точке O. Траектория станции в плоскости пролёта симметрична относительно оси Oy и обладает следующим свойством: для любой точки траектории $P(x;y)$ расстояние до центра планеты O равно расстоянию до прямой L, заданной уравнением $y = 2R$. Станция движется так, что точка её максимального сближения с центром планеты лежит на оси Oy и находится точно на границе зоны радиационного фона.

В некоторый момент времени телеметрия фиксирует положение станции в точке S, расстояние от которой до центра планеты составляет $r = 150$ тыс. км. Направляемая антенна станции ориентирована строго по вектору мгновенной скорости (направлена по касательной к траектории в точке S). Для приема данных используется орбитальный ретранслятор T, расположенный на оси симметрии траектории в точке пересечения с лучом антенны.

Определите расстояние от станции до орбитального ретранслятора T в момент фиксации телеметрии. Ответ запишите в километрах, используя точное значение.

Решение. Для удобства вычислений будем считать расстояния в тысячах километров: радиус зоны радиационного фона: $R = 120$. Расстояние от станции до центра планеты: $r = 150$.



Введем декартову систему координат xOy: центр планеты O находится в начале координат $(0;0)$. Ось Oy является осью симметрии траектории. Прямая L задана уравнением $y = 2R = 240$.

По условию, траектория станции — это множество точек $P(x;y)$, равноудаленных от центра планеты $O(0;0)$ и прямой L. Запишем это условие:

Расстояние от $P(x;y)$ до $O(0;0)$: $d_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Расстояние от $P(x;y)$ до прямой $y = 2R$: $d_2 = \mid 2R - y \mid$.

Приравниваем расстояния ($d_1 = d_2$) и возводим обе части в квадрат:

$$x^2 + y^2 = (2R - y)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4R^2 - 4Ry + y^2$$

$$x^2 = 4R^2 - 4Ry \quad \Rightarrow \quad 4Ry = 4R^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = R - \frac{x^2}{4R}$$

$$y = 120 - \frac{x^2}{4 \cdot 120} = 120 - \frac{x^2}{480}$$

Станция находится в точке $S(x_0; y_0)$, которая лежит на параболе. Также известно расстояние от станции до центра планеты $OS = r = 150$.

Условие принадлежности параболе: $xy_0 = 120 - \frac{x_0^2}{480} \Rightarrow x_0^2 = 480 \cdot (120 - y_0)$

Условие расстояния до центра: $x_0^2 + y_0^2 = r^2 = 150^2$

Подставим выражение для x_0^2 из первого уравнения во второе:

$$y_0^2 + 480 \cdot (120 - y_0) = 150^2 \qquad y_0^2 + 57\,600 - 480y_0 = 22\,500$$

$$y_0^2 - 480y + 35\,100 = 0$$

$$D = (-480)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35\,100 = 230\,400 - 140\,400 = 90\,000 \qquad \sqrt{D} = 300$$

Корни уравнения: $y_0 = \frac{480 \pm 300}{2}$ $\qquad y_1 = \frac{780}{2} = 390,$ $\qquad y_2 = \frac{180}{2} = 90$

координата y любой точки траектории не может превышать 120. Корень $y_1 = 390$ не подходит. Выбираем $y_0 = 90$.

Теперь найдем x_0: $x_0^2 = 480 \cdot (120 - 90) = 480 \cdot 30 = 14\,400$ $x_0 = \sqrt{14\,400} = 120$ *(Выбираем положительное значение, так как задача симметрична относительно оси Oy)*.

Координаты станции: $S(120; 90)$.

Антенна направлена по касательной к траектории. Найдем уравнение касательной в точке S.

Выразим x из уравнения параболы для верхней ветви: $y = 120 - \frac{x^2}{480}$

$$y' = -\frac{x}{240}$$

Вычислим угловой коэффициент касательной в точке S(где $x = 120$): $k = y'(S) = -\frac{120}{240} = -0.5$

Составим уравнение касательной: $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ $y - 90 = -0.5 \cdot (x - 120)$

Найдем точку T— пересечение касательной с осью симметрии (Oy). На оси Oy координата $x = 0$. Подставим 0 в уравнение касательной: $y_T - 90 = -0.5 \cdot (0 - 120)$

Координаты орбитального ретранслятора: $T(0; 150)$.

$$ST = \sqrt{(x_S - x_T)^2 + (y_S - y_T)^2}$$

$$ST = \sqrt{(120 - 0)^2 + (90 - 150)^2} = \sqrt{(-60)^2 + 120^2} = \sqrt{3\,600 + 14\,400} = \sqrt{18\,000} =$$

$$= \sqrt{100 \cdot 36 \cdot 5} = 10 \cdot 6 \cdot \sqrt{5} = 60\sqrt{5}$$

Мы получили расстояние в тысячах километров. Переведем его в километры:

$$ST = 60\sqrt{5} \cdot 1000 = 60\,000\sqrt{5}\text{ км}$$

Ответ: Расстояние от станции до орбитального ретранслятора Tсоставляет $60\,000\sqrt{5}$**км**.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 11

Задание 1 максимальная оценка: **12 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	12
Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	9
Верно найдены остатки от деления на 11 множителей произведения	6
Задача сведена к нахождению остатков от деления на 11 произведения однотипных множителей.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 2 максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Правильно вычислено число всех обходов графа из отрезка и двух окружностей, при добавлении дополнительных окружностей не все способы обхода учтены.	8
Правильно вычислено число всех обходов графа из отрезка и двух окружностей.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 3 максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы. Сделан верный чертеж; все 16 обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Установлена связь между AE или AF и радиусом вписанной окружности.	8
Длина отрезка касания связана с длинами сторон треугольника.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 4 максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ. Все обозначения, используемые в решении, четко определены, приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, все факты строго доказаны.	16
Верно и обоснованно выполнен один из двух пунктов задания, в решении другого пункта задачи имеется существенное продвижение, сформулированы верные утверждения, но все факты полностью строго обоснованы.	12
Верно и обоснованно выполнен один из двух пунктов задания.	8
Имеется существенное продвижение в решении одного из пунктов задачи, сформулированы верные утверждения, но все факты полностью строго обоснованы.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 5 максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	20
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены. Допущена одна арифметическая ошибка.	15
Получено верное уравнение с одним неизвестным, которым является искомое отношение.	10
Доказано, что сечением является пятиугольник. Полностью описано построение сечения призмы. Установлены необходимые подобия. Получены формулы для вычисления объема меньшей части.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 6 максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, верно найдены траектория, уравнение касательной, расстояние. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	20
Верно найдены траектория движения КА (станции), координаты аппарата, выписано уравнение касательной и определены координаты спутника – ретранслятора, но при этом имеются ошибки в нахождении расстояния.	15
Верно найдены координаты аппарата, но имеются ошибки в составлении уравнения касательной.	10
Найдена траектория движения КА (станции), но неверно найдены координаты КА (станции) и спутника-ретранслятора.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0