Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Профиль олимпиады: «Математика»

Класс участия: 11 **Вариант задания: 1**

Задача 1 (12 *баллов*). Найдите остаток от деления числа $\frac{90!}{11^8}$ на 11.

Задача 2 (16 *баллов*). Графом называют конечное множество точек вместе с линиями, соединяющими некоторые из этих точек. Точки называют вершинами графа, а соединяющие их линии – рёбрами (некоторые рёбра могут быть замкнутыми линиями, соединяющими вершину с собой). На координатной плоскости задан отрезок $x=0,\ |y|\le 5,$ и окружности $(x-3)^2+y^2=25,\quad (x+3)^2+y^2=25,\quad (x-7)^2+y^2=1,\quad (x-6)^2+y^2=4.$ Вершинами графа являются концы отрезка, а также точки пересечения и касания этих окружностей. Рёбрами этого графа являются части указанных выше линий, соединяющих его вершины. Сколькими способами можно начертить все ребра этого графа одним росчерком, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя более одного раза по одному и тому же ребру?

Задача 3 (16 *баллов*). Отрезки AD и AE являются соответственно медианой и высотой треугольника ABC, точка O – центр вписанной в этот треугольник окружности, F – точка пересечения прямых AE и OD. Найдите отношение периметра треугольника ABC к стороне BC, если $FE=3AF$.

Задача 4 (16 *баллов*). Шестьдесят четыре одинаковых кубических контейнера с жидким азотом, ***n*** из которых оказались изначально замороженными (азот в них перешёл в твёрдое состояние), плотно сомкнуты и сложены в большой куб размера $4\times4\times4$. В силу контакта по общим граням с замороженными контейнерами процесс замерзания поэтапно распространяется на соседние емкости. На каждом этапе заморозка охватывает только те контейнеры, которые в данный момент имеют общие грани не менее чем с ***m*** уже полностью замёрзшими соседями.

1) Докажите, что при ***n*** = 8 и ***m*** = 3 при любом начальном расположении замороженных контейнеров полное замерзание всех контейнеров никогда не произойдет.
2) При ***n*** = 6 и ***m*** = 2 укажите какое-либо расположение изначально замороженных контейнеров в большом кубе, при котором все контейнеры замёрзнут не более чем через 8 этапов распространения процесса заморозки. Ответ обоснуйте.

Задача 5 (20 *баллов*). В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба *BD,* наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите отношение высоты призмы к диагонали ромба AC, если отношение объемов частей, на которые плоскость сечения делит призму, равно $25:47$, причем среди вершин части призмы меньшего объема есть точка С.

Задача 6 (20 *баллов*). См. на обороте листа.

Задача 6 (20 *баллов*). В ходе исследований планет солнечной системы космический аппарат (КА) выполняет гравитационный маневр вблизи Сатурна. Вокруг планеты установлена зона безопасности полета для КА, учитывающая кольца и верхние слои атмосферы.

Для упрощения моделирования, будем считать, что маневр происходит в одной плоскости. Введем декартову систему координат на плоскости xOy. Центр масс планеты совпадает с началом координат $O(0;0)$.

Граница зоны безопасности — окружность радиуса $R = 140$ тыс. км с центром в точке O. Траектория аппарата в плоскости маневра симметрична относительно оси Oy и обладает следующим свойством: для любой точки траектории $P(x;y)$ расстояние до центра планеты O равно расстоянию до прямой L, заданной уравнением $y = 2R$. Аппарат движется так, что точка его максимального сближения с центром планеты лежит на оси Oy и находится точно на границе зоны безопасности.

В некоторый момент времени телеметрия фиксирует положение аппарата в точке S, расстояние от которой до центра планеты составляет $r = 175$ тыс. км. Специальная антенна аппарата ориентирована строго по вектору мгновенной скорости (направлена по касательной к траектории в точке S). Для ретрансляции данных используется спутник-ретранслятор T, расположенный на оси симметрии траектории в точке пересечения с линией сигнала антенны.

Определите расстояние от аппарата до спутника-ретранслятора T в момент фиксации телеметрии. Ответ запишите в тысячах километров.

Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)

1. (12 баллов) Найдите остаток от деления числа $\dfrac{90!}{11^8}$ на 11.

Решение.

Разложим 88! на произведения чисел, делящихся и не делящихся на 11:

$$88! = \prod_{k=1}^{8}(11k) \cdot \prod_{k=0}^{7}\prod_{m=1}^{10}(11k+m).$$

Тогда

$$\frac{88!}{11^8} = 8! \cdot \prod_{k=0}^{7}\prod_{m=1}^{10}(11k+m) \equiv 8! \cdot (10!)^8 \equiv 5 \cdot (-1)^8 = 5 \pmod{11}.$$

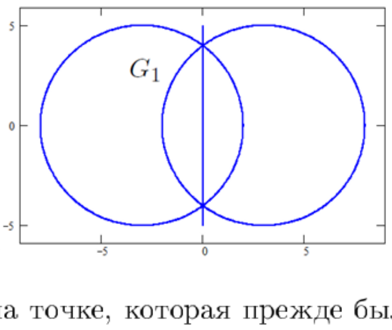
Осталось домножить на $89 \cdot 90 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{11}$.

Ответ: 10.

2. (16 баллов) Графом называют конечное множество точек вместе с линиями, соединяющими некоторые из этих точек. Точки называют вершинами графа, а соединяющие их линии – рёбрами (некоторые рёбра могут быть замкнутыми линиями, соединяющими вершину с собой). На координатной плоскости задан отрезок $x=0$, $|y| \le 5$, и окружности $(x-3)^2+y^2=25$, $(x+3)^2+y^2=25$, $(x-7)^2+y^2=1$, $(x-6)^2+y^2=4$. Вершинами графа являются концы отрезка, а также точки пересечения и касания этих окружностей. Рёбрами этого графа являются части указанных выше линий, соединяющих его вершины. Сколькими способами можно начертить все ребра этого графа одним росчерком, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя более одного раза по одному и тому же ребру?

Решение.

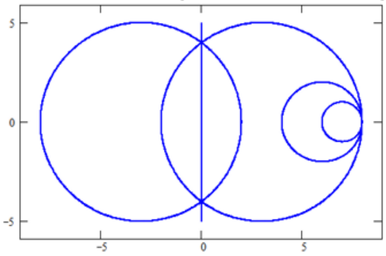
В графе имеются 2 вершины нечетного порядка: верхняя $(0,5)$ и нижняя $(0,-5)$. Обход надо начинать в одной из них, а закончить в другой. Будем усложнять граф постепенно. В начале был один вертикальный отрезок, $N = 2$ способа. Если мы уже нашли число способов обхода некоторого графа, а потом фрагмент одного из его ребер заменили на пучок из нечетного числа n ребер, то число способов обхода увеличится в $n!$ раз, т. к. надо проходить эти новые n ребер одно за другим в произвольном порядке. Именно это происходит с $n = 5$, когда к отрезку добавляем первые две окружности:

$\left\{\begin{matrix} x=0 \\ |y|\le 5\end{matrix}\right\} \cup \{(x-3)^2+y^2=25\} \cup \{(x+3)^2+y^2=25\}$ 

$N = 2 \cdot 5! = 240$

Если к графу добавляем m петель, висящих на точке, которая прежде была 2 порядка, то число способов обхода увеличится в $2^m \cdot m!$ раз, поскольку в этой точке надо будет остановиться и обойти все m петель в произвольном порядке, каждую в любом направлении. У нас появляются две петли, висящие на точке $(8,0)$, когда добавляем следующие две окружности:

$G_1 \cup \{(x-7)^2+y^2=1\} \cup \{(x-6)^2+y^2=4\}$



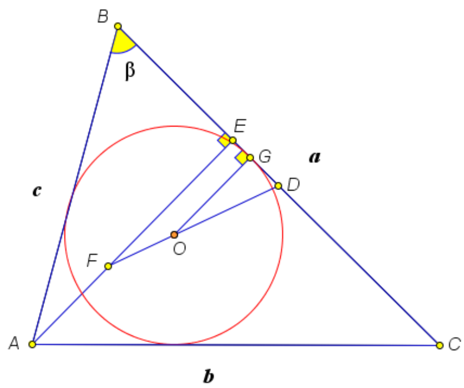
$N = 240 \cdot 2^2 \cdot 2! = 1920$

Ответ: 1920.

3. (16 баллов) Отрезки AD и AE являются соответственно медианой и высотой треугольника ABC, точка O – центр вписанной в этот треугольник окружности, F – точка пересечения прямых AE и OD. Найдите отношение периметра треугольника ABC к стороне BC, если $FE = 3AF$.

Решение.

Обозначим стороны треугольника ABC следующим образом $a = BC,\ b = AC, c = AB$. Угол ABC обозначим β. Нужно найти $\dfrac{a+b+c}{a} = 1 + \dfrac{b+c}{a}$.



Пусть r - радиус вписанной в треугольник ABC окружности, G - точка касания этой окружности со стороной BC. Тогда $OG = r$. Из свойств касательных к окружности следует, что $CG = \dfrac{a+b-c}{2}$. Действительно,

$a+b+c = 2CG + 2(a-CG) + 2(b-CG)$, откуда и следует равенство для CG.

Треугольники OGD и FED подобные, и $\dfrac{FE}{OG} = \dfrac{ED}{GD} \Rightarrow \quad \dfrac{FE}{r} = \dfrac{BD-BE}{CG-CD} \Rightarrow$

$\dfrac{FE}{r} = \dfrac{a/2 - c\cos\beta}{(b-c)/2} = \dfrac{a - \dfrac{a^2+c^2-b^2}{a}}{b-c} = \dfrac{b+c}{a}$. Отметим, что здесь рассуждения приведены для острого угла β, для тупого угла приходим к такому же результату.

Теперь установим связь между AE и r. Используя разные формулы для вычисления площади треугольника ABC, имеем $AE \cdot a = (a+b+c)r$, следовательно,

$AE = \left(1 + \dfrac{b+c}{a}\right) r = \left(1 + \dfrac{FE}{r}\right) r,\ \ 4AF = r + 3AF,\ AF = r,\ \dfrac{b+c}{a} = 3.$

$\dfrac{a+b+c}{a} = 4.$ **Ответ:** $4:1$.

4. (16 баллов) Шестьдесят четыре одинаковых кубических контейнера с жидким азотом, $\boldsymbol{n}$ из которых оказались изначально замороженными (азот в них перешёл в твёрдое состояние), плотно сомкнуты и сложены в большой куб размера $4 \times 4 \times 4$. В силу контакта по общим граням с замороженными контейнерами процесс замерзания поэтапно распространяется на соседние емкости. На каждом этапе заморозка охватывает только те контейнеры, которые в данный момент имеют общие грани не менее чем с $\boldsymbol{m}$ уже полностью замёрзшими соседями.

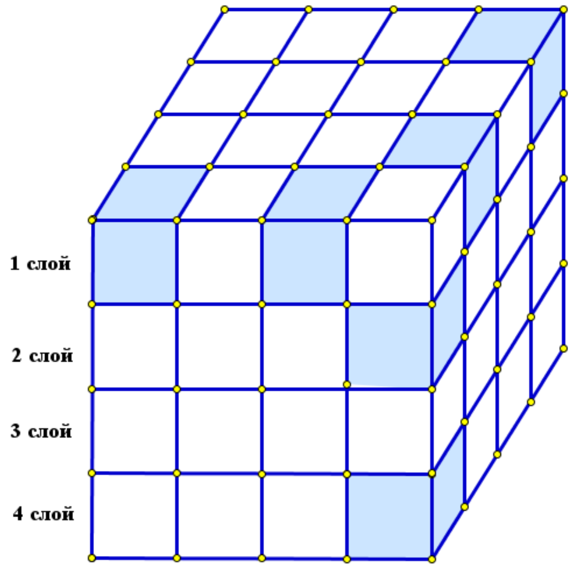
1) Докажите, что при $\boldsymbol{n} = 8$ и $\boldsymbol{m} = 3$ при любом начальном расположении замороженных контейнеров полное замерзание всех контейнеров никогда не произойдет.
2) При $\boldsymbol{n} = 6$ и $\boldsymbol{m} = 2$ укажите какое-либо расположение изначально замороженных контейнеров в большом кубе, при котором все контейнеры замёрзнут не более чем через 8 этапов распространения процесса заморозки. Ответ обоснуйте.

Решение:

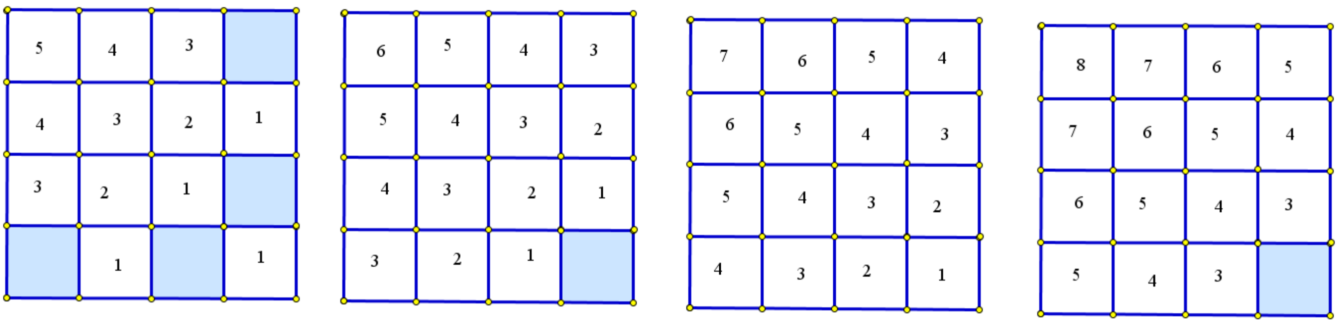
1) Рассмотрим случай $\boldsymbol{m} = 3$, т.е. когда заморозка распространяется на те и только те контейнеры, у которых не менее трех соседних контейнеров (имеющих общую грань) уже заморожены. Пусть S_t – текущая суммарная **площадь внешней поверхности тела** T_t (связного или несвязного), образованного замороженными контейнерами (т.е. грани контейнеров, являющиеся внутренними для тела T_t, не учитываются) после t-го этапа заморозки. S_0 — площадь поверхности тела из $\boldsymbol{n}$ = 8 изначально замороженных контейнеров. Выясним, как меняется S_t на следующем этапе замораживания очередного какого-то контейнера А. Будучи еще незамороженным, контейнер А граничил с k ($k \geq 3$) замороженными соседями, а $6 - k$ его граней контактировали с незамерзшими соседями или внешней средой. При заморозке контейнера А (и присоединении его к телу T_t) исчезают k граней (ранее эти грани входили во внешнюю поверхность замерзших контейнеров, после заморозки А они стали внутренней границей двух замерзших контейнеров, и потому не учитываются), т.е. S_t уменьшается на k. Однако, при этом у тела T_t появляются $6 - k$ новых граней с незамерзшими соседями или внешней средой (теперь контейнер А замерз, и площади этих граней входят в S_t по типу контактирования «замороженный–незамороженный» или «замороженный–внешняя среда»). Таким образом, изменение площади S_t с каждым новым замороженным контейнером равно $\Delta S = (6 - k) - k = 6 - 2k$ (площадь одной грани контейнера принимаем за 1). Для $k \geq 3$ имеем: $k = 3 \rightarrow \Delta S = 0$; $k = 4 \rightarrow \Delta S = -2$; $k = 5 \rightarrow \Delta S = -4$; $k = 6 \rightarrow \Delta S = -6$. Следовательно, при добавлении очередного контейнера к телу T_t площадь S_t **не увеличивается** (может остаться той же или уменьшиться). Начальная площадь S_0 будет максимальной, если все изначально замороженные контейнеры изолированы: $S_0 = 6 \times 8 = 48$. Чтобы весь куб (64 контейнера) стал поврежденным, итоговая S_t должна быть равна площади внешней поверхности куба: $6 \times 4 \times 4 = 96$. Но S_t не может увеличиваться и потому: $S_t \leq S_0$ для всех этапов t. Поскольку $S_0 \leq 48$, то и $S_t \leq 48$ на любом этапе t, и S_t никогда не достигнет 96. Следовательно, полное заполнение куба замороженными контейнерами **невозможно** при любом начальном расположении 8 контейнеров, куб **никогда не замерзнет полностью**.

2) Пусть $\boldsymbol{n} = 6$ и $\boldsymbol{m} = 2$. Приведем пример расположения 6 замерзших контейнера в кубе, приводящего к полной заморозке не более чем через за 8 этапов всех 64 контейнеров при условии, что процесс замораживания распространяется на те и только те контейнеры, у которых не менее двух соседей уже заморожены. Поскольку $\Delta S = (6-k) - k = 6 - 2k$, и $k = m = 2$, то $\Delta S = 2$ и площадь S_t может увеличиваться, если контейнер, граничащий с k уже замороженными контейнерами, найдется. Значит, потенциально все контейнеры могут заморозиться. Например, расположим шесть начальных замороженных контейнера следующим образом (на рисунке справа эти ячейки выделены темным цветом):

:



Покажем, как распространяется заморозка по слоям (ниже приведен вид сверху каждого слоя) всего куба на каждом этапе слоям:



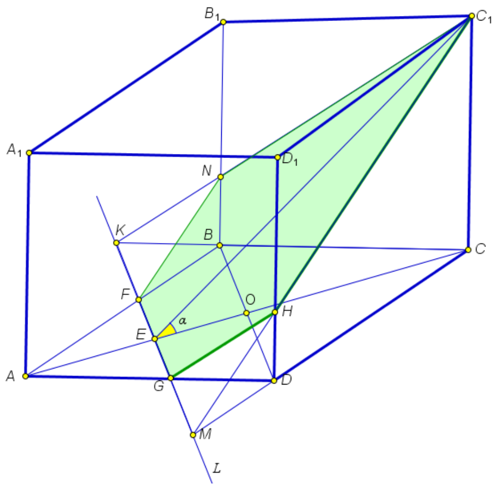
1 слой 2 слой 3 слой 4 слой

- первоначально заморожен на n этапе

При таком начальном расположении замороженных контейнеров все емкости большого куба замерзнут за 8 этапов.

5. (20 баллов) В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба BD, наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите отношение высоты призмы к диагонали ромба AC, если отношение объемов частей, на которые плоскость сечения делит призму, равно $25:47$, причем среди вершин части призмы меньшего объема есть точка C.

Решение.



Если плоскость сечения пройдет через точку A, то она разделит призму на две равновеликие части. Поскольку среди вершин части призмы меньшего объема есть точка C, то плоскость сечения пересекает отрезок AC по прямой L, параллельной BD. Пусть O – точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Если точка пересечения L с AC лежит на отрезке OC и не совпадает с C, то сечением является треугольник, площадь проекции которого на плоскость основания не превышает половины площади основания, и объем меньшей части $V_1 < \frac{V}{6}$, где V – объем всей призмы. По условию $\frac{V_1}{V} = \frac{25}{72}$, и $\frac{25}{72} = \frac{V_1}{V} < \frac{1}{6}$, что неверно. Таким образом, точка пересечения L с AC лежит между точками A и O.

Обозначим $CC_1 = x,\ AC = d,\ \frac{d}{x} = p,\ E$ – точка пересечения прямой L с AC. Поскольку диагонали ромба перпендикулярны, а $L \parallel BD, L \perp AC,$ то угол α между плоскостью сечения и плоскостью основания совпадает с углом CEC_1, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Тогда $CE = \frac{3}{4}x.$ Пусть K, F, G, M – точки пересечения прямой L с прямыми BC, AB, AD *и* CD соответственно. Точки N и H – точки пересечения прямых C_1K и C_1M с ребрами BB_1 и DD_1 соответственно. Пирамиды $NKBF$ и $HGDM$ равны и подобны пирамиде C_1KCM с коэффициентом подобия $k = \frac{OE}{CE} = \frac{\frac{3}{4}x - \frac{d}{2}}{\frac{3}{4}x} = \frac{3-2p}{3}$. Объемы этих пирамид $V_0 = V_{NKBF} = V_{NKBF} = \left(\frac{3-2p}{3}\right)^3 V_{C_1KCM}$. Тогда объем меньшей части $V_1 == \left(1 - 2\left(\frac{3-2p}{3}\right)^3\right)V_{C_1KCM}$. Треугольники BCD и KCM подобны с коэффициентом подобия $k_1 = \frac{CO}{CE} = \frac{2d}{3x} = \frac{2p}{3}$. Тогда $S_{KCM} = \left(\frac{3}{2p}\right)^2 S_{BCD} = \frac{9}{8p^2} S_{ABCD}$, и $V_{C_1KCM} = \frac{3}{8p^2} S_{ABCD} \cdot x = \frac{3}{8p^2} V$. Поскольку $\frac{V_1}{V} = \frac{25}{72}$, то $\frac{3}{8p^2}\left(1 - 2\left(\frac{3-2p}{3}\right)^3\right) = \frac{25}{72}$. Приходим к уравнению $27 - 2(3-2p)^3 = 25p^2$. Сделаем замену $3 - 2p = t$. Тогда $4(27 - 2t^3) = 25(3-t)^2 \Leftrightarrow 8t^3 + 25t^2 - 150t + 117 = 0$. Уравнение имеет корень $t = 1$. При делении многочлена $8t^3 + 25t^2 - 150t + 117$ на $t - 1$ получаем $8t^2 + 33t - 117$. Корни этого квадратного трехчлена равны $\frac{-33 \pm 3\sqrt{537}}{16}$. После обратной замены имеем $p_1 = 1,\ p_{2/3} = \frac{81 \pm 3\sqrt{537}}{32}$.

Поскольку $\frac{d}{2} < \frac{3x}{4} < d$, то $\frac{3}{4} < p < \frac{3}{2}$, и $\frac{81-3\sqrt{537}}{32} < \frac{81-3\sqrt{529}}{32} = \frac{3}{8} < \frac{3}{4}$, $\frac{81+3\sqrt{537}}{32} > \frac{81+3\sqrt{529}}{32} = \frac{75}{16} > \frac{3}{2}$. Следовательно, подходит только $p=1$.

Ответ: 1:1.

6. (20 баллов) В ходе исследований планет солнечной системы космический аппарат (КА) выполняет гравитационный маневр вблизи Сатурна. Вокруг планеты установлена зона безопасности полета для КА, учитывающая кольца и верхние слои атмосферы.

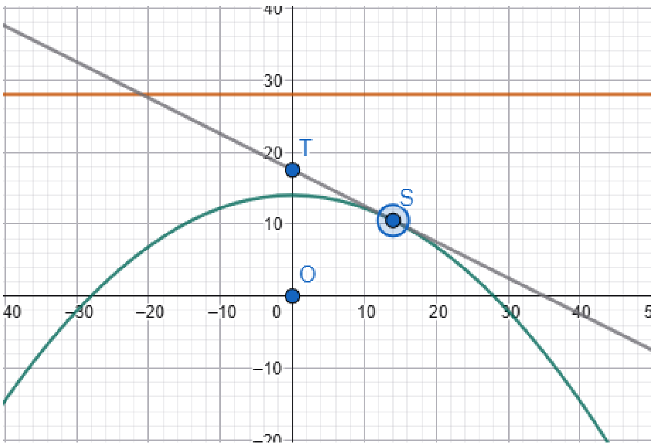
Для упрощения моделирования, будем считать, что маневр происходит в одной плоскости. Введем декартову систему координат на плоскости xOy. Центр масс планеты совпадает с началом координат $O(0;0)$.

Граница зоны безопасности — окружность радиуса $R = 140$ тыс. км с центром в точке O. Траектория аппарата в плоскости маневра симметрична относительно оси Oy и обладает следующим свойством: для любой точки траектории $P(x;y)$ расстояние до центра планеты O равно расстоянию до прямой L, заданной уравнением $y = 2R$. Аппарат движется так, что точка его максимального сближения с центром планеты лежит на оси Oy и находится точно на границе зоны безопасности.

В некоторый момент времени телеметрия фиксирует положение аппарата в точке S, расстояние от которой до центра планеты составляет $r = 175$ тыс. км. Специальная антенна аппарата ориентирована строго по вектору мгновенной скорости (направлена по касательной к траектории в точке S). Для ретрансляции данных используется спутник-ретранслятор T, расположенный на оси симметрии траектории в точке пересечения с линией сигнала антенны.

Определите расстояние от аппарата до спутника-ретранслятора T в момент фиксации телеметрии. Ответ запишите в тысячах километров.

Решение. Радиус зоны безопасности: $R = 140$. Расстояние от аппарата до центра планеты: $r = 175$. Введем декартову систему координат xOy:



Центр планеты O находится в начале координат $(0;0)$. Ось Oy является осью симметрии траектории. Прямая L задана уравнением $y = 2R = 280$.

По условию, траектория аппарата — это множество точек $P(x;y)$, равноудаленных от центра планеты $O(0;0)$ и прямой L. Запишем это условие, используя формулу расстояния между точками и расстояние от точки до прямой:

Расстояние от $P(x;y)$ до $O(0;0)$: $d_1 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$.
Расстояние от $P(x;y)$ до прямой $y = 2R$: $d_2 = |\, 2R - y \,|$.

Приравняем расстояния ($d_1 = d_2$) и возведём обе части в квадрат:

$$x^2 + y^2 = (2R-y)^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 4R^2 - 4Ry + y^2$$

$$x^2 = 4R^2 - 4Ry \quad \Longrightarrow \quad 4Ry = 4R^2 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad y = R - \frac{x^2}{4R}$$

Подставим числовое значение $R = 140$: $y = 140 - \frac{x^2}{4\cdot 140} = 140 - \frac{x^2}{560}$

Это уравнение параболы, описывающее траекторию аппарата.

Аппарат находится в точке $S(x_0; y_0)$, которая лежит на параболе. Расстояние от аппарата до центра планеты $OS = r = 175$.

Условие принадлежности параболе: $y_0 = 140 - \frac{x_0^2}{560} \Rightarrow x_0^2 = 560 \cdot (140 - y_0)$.

Условие расстояния до центра: $x_0^2 + y_0^2 = r^2 = 175^2$

Подставим выражение для x_0^2 из первого уравнения во второе: $4R^2 - 4Ry_0 + y_0^2 = r^2 \implies 2R - y_0 = r \implies y_0 = 2R - r = 280 - 175 = 105$

(Или, если подставляли в числах, то

$$560 \cdot (140 - y_0) + y_0^2 = 175^2 \implies 78\,400 - 560y_0 + y_0^2 = 30\,625$$

$$y_0^2 - 560y_0 + 47\,775 = 0$$

$$D/4 = (-280)^2 - 47\,775 = 78400 - 47775 = 30625 = 175^2$$

$$y_0 = 280 \pm 175, \quad y_1 = 455 > 140 \text{ лишний корень}, \quad y_2 = 105$$

Вершина параболы находится в точке $(0; 140)$, и ветви направлены вниз (коэффициент при x^2 отрицательный). Следовательно, координата y любой точки траектории не может превышать 140. Корень $y_1 = 455$ не подходит. Выбираем $y_0 = 105$.

Тогда x_0: $x_0^2 = 560 \cdot (140 - 105) = 560 \cdot 35 = 19\,600 \implies x_0 = \sqrt{19\,600} = 140$

Выбираем положительное значение, так как задача симметрична относительно оси Oy, и длина отрезка от этого не зависит.

Координаты аппарата: $S(140; 105)$.

Антенна направлена по касательной к траектории. Найдем уравнение касательной в точке S. Найдем производную функции $y = 140 - \frac{x^2}{560}$:

$y' = -\frac{2x}{560} = -\frac{x}{280}$. Вычислим угловой коэффициент касательной в точке

S $(x_0 = 140)$: $k = y'(140) = -\frac{140}{280} = -0.5$.

Составим уравнение касательной:

$y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \implies y - 105 = -0.5 \cdot (x - 140)$.

Найдем точку T— пересечение касательной с осью симметрии (Oy). На оси Oy координата $x = 0$. Подставим $x = 0$ в уравнение касательной: $y_T - 105 = -0.5 \cdot (0 - 140) = 70$

$$\implies y_T = 175$$

Координаты спутника-ретранслятора: $T(0; 175)$.

Используем формулу расстояния между двумя точками:

$ST = \sqrt{(x_S - x_T)^2 + (y_S - y_T)^2}$ $ST = \sqrt{(140 - 0)^2 + (105 - 175)^2} = \sqrt{140^2 + (-70)^2}$

$ST = \sqrt{19\,600 + 4\,900} = \sqrt{24\,500} = \sqrt{100 \cdot 49 \cdot 5} = 10 \cdot 7 \cdot \sqrt{5} = 70\sqrt{5}$ тыс. км.

Ответ: расстояние от аппарата до спутника-ретранслятора T составляет $70\sqrt{5}$ тыс. км. $\approx$ $156\,525$км.

Задача может быть решена 2 способом, если учесть, что касательная к параболе в любой точке является биссектрисой угла между фокальным радиус-вектором и прямой, параллельной оси симметрии параболы, проведенной через точку касания.

Треугольник $\triangle\, OST$ является равнобедренным.

Пусть ось симметрии — это прямая OT. По определению параболы, расстояние от точки S до фокуса O равно расстоянию от S до директрисы.

Из свойства биссектрисы следует, что угол между касательной ST и фокальным радиусом OS равен углу между касательной ST и осью симметрии OT (так как прямая, проходящая через S параллельно оси, образует с касательной тот же угол, что и ось, как накрест лежащие).

Следовательно, $\angle OST = \angle OTS$. Значит, $\triangle\, OST$ равнобедренный с основанием ST, и боковые стороны равны: $OS = OT = r$.

По теореме косинусов для $\triangle\, OST$: $ST^2 = OS^2 + OT^2 - 2 \cdot OS \cdot OT \cdot \cos\theta$

$$ST^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\,\theta = 2r^2(1 - \cos\,\theta)$$

Уравнение параболы в полярных координатах (с полюсом в фокусе) имеет вид:

$r = \frac{2R}{1+\cos\,\theta}$ *(Здесь параметр* $p = 2R$*, так как расстояние от фокуса до вершины равно* R*).*

$$1 + \cos\theta = \frac{2R}{r} \qquad \cos\,\theta = \frac{2R}{r} - 1$$

$$1 - \cos\,\theta = 1 - \left(\frac{2R}{r} - 1\right) = 2 - \frac{2R}{r} = 2\left(1 - \frac{R}{r}\right) = \frac{2(r-R)}{r}$$

$$ST^2 = 2r^2 \cdot \frac{2(r-R)}{r} = 4r(r-R)$$

$ST = 2\sqrt{r(r-R)}$ $\qquad ST = 2\sqrt{175 \cdot 35} = 2\sqrt{5 \cdot 35^2} = 2 \cdot 35 \cdot \sqrt{5} = 70\sqrt{5}$

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 11

Задание 1 максимальная оценка: **12 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	12
Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	9
Верно найдены остатки от деления на 11 множителей произведения	6
Задача сведена к нахождению остатков от деления на 11 произведения однотипных множителей.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 2 максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Правильно вычислено число всех обходов графа из отрезка и двух окружностей, при добавлении дополнительных окружностей не все способы обхода учтены.	8
Правильно вычислено число всех обходов графа из отрезка и двух окружностей.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 3 максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы. Сделан верный чертеж; все 16 обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Установлена связь между AE или AF и радиусом вписанной окружности.	8
Длина отрезка касания связана с длинами сторон треугольника.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 4 максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ. Все обозначения, используемые в решении, четко определены, приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, все факты строго доказаны.	16
Верно и обоснованно выполнен один из двух пунктов задания, в решении другого пункта задачи имеется существенное продвижение, сформулированы верные утверждения, но все факты полностью строго обоснованы.	12
Верно и обоснованно выполнен один из двух пунктов задания.	8
Имеется существенное продвижение в решении одного из пунктов задачи, сформулированы верные утверждения, но все факты полностью строго обоснованы.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 5 максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	20
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены. Допущена одна арифметическая ошибка.	15
Получено верное уравнение с одним неизвестным, которым является искомое отношение.	10
Доказано, что сечением является пятиугольник. Полностью описано построение сечения призмы. Установлены необходимые подобия. Получены формулы для вычисления объема меньшей части.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 6 максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, верно найдены траектория, уравнение касательной, расстояние. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	20
Верно найдены траектория движения КА (станции), координаты аппарата, выписано уравнение касательной и определены координаты спутника – ретранслятора, но при этом имеются ошибки в нахождении расстояния.	15
Верно найдены координаты аппарата, но имеются ошибки в составлении уравнения касательной.	10
Найдена траектория движения КА (станции), но неверно найдены координаты КА (станции) и спутника-ретранслятора.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0