Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Профиль олимпиады:
«Математика»

Класс участия: 10 **Вариант задания: 1**

Задача 1 (12 *баллов*). Играя, девочка Маша нашла 6 папиных новых носков одинаковой формы (правый не отличается от левого) трех цветов: 2 белых, 2 серых и 2 черных, при этом носки одинакового цвета визуально неразличимы. Маша решила их надеть по три штуки на каждую ногу. Сколькими способами она это может сделать, если важно, какой носок надет раньше, какой позже и на какую ногу, а также носки можно выворачивать наизнанку?

Задача 2 (16 *баллов*). Найдите 30-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\left(3+\sqrt{7}\right)^{100}$.

Задача 3 (16 *баллов*). В треугольнике ABC с тупым углом A на стороне AB как на диаметре построена окружность. Прямые AC и BC пересекают эту окружность в точках D и E соответственно ($D \neq A$, $E \neq B$). Через точки D и E к окружности проведены касательные, пересекающиеся в точке F. Прямая CK перпендикулярна прямой AB, а точка K – точка пересечения прямых BD и CK. Найдите радиус описанной около треугольника ACK окружности, если $FD=6$, а угол CBD равен $\arcsin 0,6$.

Задача 4 (16 *баллов*). Сколько разных положительных значений, не превышающих десять миллионов, принимает многочлен $P(x,y)=x^3+8y^3-3xy^2-6x^2y-x-2y$ при всевозможных целых числах *x* и *y*?

Задача 5 (20 *баллов*). В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба *BD,* наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите угол между диагональю призмы AC_1 и плоскостью основания $ABCD$, если площадь сечения относится к площади основания призмы как $35:24$.

Задача 6 (20 *баллов*). См. на обороте листа.

Задача 6 (20 *баллов*). Зимой в городе выпало такое количество снега, что при расчистке улиц его некуда было складывать, поэтому коммунальная служба города организовала временные пункты плавления снега на прямоугольной площадке размером 4 м длиной и 2 м шириной. Ограждений по краям нет. Чтобы снег не осыпался за границы, угол наклона его поверхности к земле со всех сторон не должен превышать α, где $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Снег насыпан так, что занимает максимально возможный объём при соблюдении этого условия. И при этом объем талой воды не превышает максимально возможный объем водоотвода.

Из-за разной плотности снега в нижних и верхних слоях (нижние слои более уплотнены временем и весом), коэффициент таяния (отношение объёма полученной воды к объёму снега) зависит от высоты слоя. Для упрощения расчётов снежную кучу высотой H разделили на три горизонтальных слоя одинаковой толщины. Верхний слой (от 2H/3 до H метров высоты): 1 м^3 снега даёт 0.3 м^3 воды. Средний слой (от H/3 до 2H/3 метров высоты): 1 м^3 снега даёт 0.6 м^3 воды. Нижний слой (от 0 до H/3 метра высоты): 1 м^3 снега даёт 0.9 м^3 воды.

Найдите максимальный объём снега V, который можно разместить на площадке. Вычислите общий объём воды W, который образуется после полного таяния снега.

Решение варианта №1 (Математика - 10 класс)

1. (12 баллов) Играя, девочка Маша нашла 6 папиных новых носков одинаковой формы (правый не отличается от левого) трех цветов: 2 белых, 2 серых и 2 черных, при этом носки одинакового цвета визуально неразличимы. Маша решила их надеть по три штуки на каждую ногу. Сколькими способами она это может сделать, если важно, какой носок надет раньше, какой позже и на какую ногу, а также носки можно выворачивать наизнанку?

Решение. Процесс формирования (а значит и подсчета количества) различных способов надевания носков можно разбить на 3 этапа:

– сначала все 6 носков линейно упорядочиваем по очередности надевания их на себя девочкой Машей. Для этого раскладываем эти носки по приготовленным для них 6 занумерованным местам (позициям). Для того, чтобы учесть, что носки одного цвета визуально неразличимы, выбираем из 6 мест 2 места (C_6^2 способов), куда одним способом (так как они неразличимы) укладываем 2 белых носка, затем из 4 оставшихся мест выбираем 2 места (C_4^2 способов), куда одним способом (так как они неразличимы) укладываем 2 серых носка, и в оставшиеся два места (1 способ выбрать) также одним способом укладываем 2 черных носка. Всего получается $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 1 = 15 \cdot 6 = 90$ вариантов;

– поскольку очередность надевания носков определена, остается теперь только выбрать ногу, на которую эти носки будут надеваться (по 3 штуки на каждую ногу). Для этого достаточно определить, какие 3 из выстроенных в линеечку 6 носков в итоге окажутся на левой ноге (остальные автоматически будут надеты на правую ногу), т.е. надо выбрать 3 носка (3 места) из 6 ($C_6^3 = 20$ способов);

– наконец, необходимо определиться, каким образом (естественным или наизнанку) способом будет надеваться на ногу каждый носок: два варианта для каждого носка, и всего $2^6 = 64$ варианта.

Следовательно, общее количество различных способов надевания носков равно $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_6^3 \cdot 2^6 = 90 \cdot 20 \cdot 64 = 115200.$

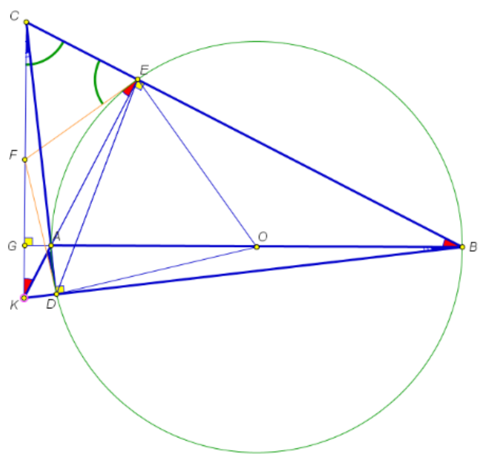
Ответ: 115200.

2. (16 баллов) Найдите 30-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\left(3+\sqrt{7}\right)^{100}$.

Решение. Используем формулу бинома Ньютона: $\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$. Тогда $\left(3+\sqrt{7}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{75}^k 3^{100-k} \left(\sqrt{7}\right)^k$, и при всех четных k слагаемые в разложении будут натуральными числами. Аналогично, $\left(3-\sqrt{7}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k 3^{100-k} \left(-\sqrt{7}\right)^k$. Тогда $N = \left(3+\sqrt{7}\right)^{100} + \left(3-\sqrt{7}\right)^{100}$ – натуральное число.

Поскольку $0 < \left(3-\sqrt{7}\right)^{100} < \left(1/2\right)^{100} < \left(1/1024\right)^{10} < 10^{-30}$, то $0 < N - \left(3+\sqrt{7}\right)^{100} < 10^{-30}$, и 30-я цифра после запятой в десятичной записи числа $\left(3+\sqrt{7}\right)^{100}$ будет равна 9. **Ответ: 9.**

3. (16 баллов) В треугольнике ABC с тупым углом A на стороне AB как на диаметре построена окружность. Прямые AC и BC пересекают эту окружность в точках D и E соответственно $(D \neq A,\ E \neq B)$. Через точки D и E к окружности проведены касательные, пересекающиеся в точке F. Прямая CK перпендикулярна прямой AB, а точка K – точка пересечения прямых BD и CK. Найдите радиус описанной около треугольника ACK окружности, если $FD = 6$, а угол CBD равен $\arcsin 0,6$.



Решение. Пусть G – точка пересечения прямых AB и CK. Отрезки AE, BD и CG - высоты треугольника ABC. Они пересекаются в одной точке K. Отрезки AD, BE и KG - высоты треугольника ABK. Они пересекаются в одной точке C. Докажем, что точка F является серединой отрезка CK. По свойствам касательных $\angle FEA = \angle EBA$. Пусть F_1 - точка пересечения касательной FE с прямой CK. Поскольку $\angle CEA = \angle CGB = 90°$, то $\angle F_1CE = \angle F_1EC$, следовательно, треугольник $F\,CE$ равнобедренный, и $F_1C = F_1E$. Поскольку треугольники BGK и KEB прямоугольные с общей гипотенузой, то $\angle GKE = \angle EBA$, и, следовательно, $\angle GKE = \angle FEA$, и треугольник KF_1E равнобедренный, и $F_1K = F_1E = F_1C$. Тогда F_1 - середина CK. Пусть теперь F_2 - точка пересечения касательной FD с прямой CK. Рассуждая аналогично, получаем, что F_2 - середина CK. Таким образом, $F = F_1 = F_2$, и $CK = 2FE = 2FD$.

Поскольку угол KCA равен углу ABK, а угол CKA равен углу ABE, то $\angle CAK = 180° - \angle CBD$. Тогда $R_{ACK} = \dfrac{CK}{2\sin(\angle CAK)} = \dfrac{12}{2 \cdot 0,6} = 10$.

Ответ: 10.

4. (16 баллов) Сколько разных положительных значений, не превышающих миллион, принимает многочлен $P(x,y) = x^3 + 8y^3 - 3xy^2 - 6x^2y - x - 2y$ при всевозможных целых числах x и y?

Решение. Докажем, что все значения $P(x,y)$ делятся на 3. Для любых целых x и y имеем

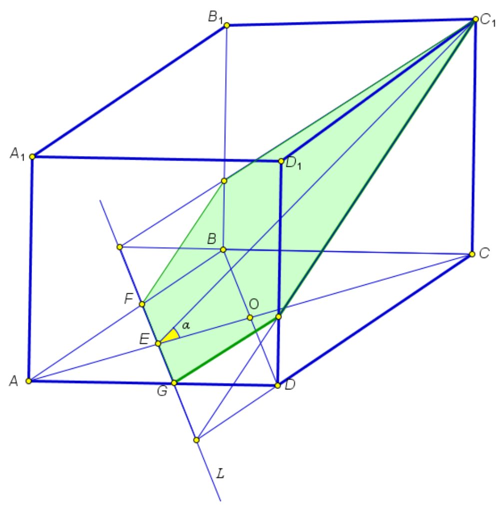
$$P(x,y) = (x^3 - x) + (8y^3 - 2y) - 3(xy^2 + 2x^2y) =$$
$$= (x-1)x(x+1) + (2y-1)2y(2y+1) - 3xy(y+2x) \,\vdots\, 3,$$

так как произведение трех последовательных целых чисел делится на 3. Теперь покажем, что любое число, кратное трем, может быть значением многочлена $P(x,y)$. Возьмем $x = y$. Тогда $P(x,x) = x^3 + 8x^3 - 3x \cdot x^2 - 6x^2x - 2x - x = -3x$. Таким образом, нужно посчитать количество всех положительных чисел, кратных трем, не превышающих миллион. Получаем $\dfrac{999999}{3} = 333333$. **Ответ: 333333.**

5. (20 баллов) В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба BD, наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите угол между диагональю призмы AC_1 и плоскостью основания $ABCD$, если площадь сечения относится к площади основания призмы как 35:24.

Решение.

Плоскость сечения пересекает прямую AC по прямой L, параллельной BD. Если точка пересечения L с AC лежит вне отрезка AC или совпадает с концами этого отрезка, то площадь проекции сечения на плоскость основания совпадает с площадью основания или равна 0. Поскольку $S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\alpha}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{16}{9}}}=\frac{3}{5}$, $\frac{S_{сеч}}{S_{пр}}=\frac{5}{3}$, то такой случай противоречит условию. Пусть O – точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Если точка пересечения L с AC лежит на отрезке OC и не совпадает с C, то сечением является треугольник, площадь проекции которого на плоскость основания не превышает половины площади основания, т.е. $\frac{35}{24}=\frac{S_{сеч}}{S_{осн}}=\frac{S_{пр}}{S_{осн}}\cdot\frac{5}{3}\le\frac{5}{6}$, что неверно. Таким образом, точка пересечения L с AC лежит между точками A и O.



Обозначим $CC_1=x$, $AC=d$, E – точка пересечения прямой L с AC. Поскольку диагонали ромба перпендикулярны, а $L\parallel BD, L\perp AC$, то угол α между плоскостью сечения и плоскостью основания совпадает с углом CEC_1, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. Тогда $CE=\frac{3}{4}x$. Пусть F – точка пересечения прямой L и AB, а G – точка пересечения L и AD. Тогда проекцией сечения на плоскость основания является пятиугольник $BCDGF$.

$S_{BCDGF}=S_{ABCD}-S_{AFG}$. Треугольники AFG и ABD подобны, $\frac{FG}{BD}=\frac{AE}{AO}=\frac{d-\frac{3}{4}x}{d/2}=2-\frac{3x}{2d}$.

$$S_{AFG}=\frac{1}{2}\left(2-\frac{3x}{2d}\right)^2 S_{ABCD},\quad S_{BCDGF}=S_{ABCD}\left(1-\frac{1}{2}\left(2-\frac{3x}{2d}\right)^2\right),$$

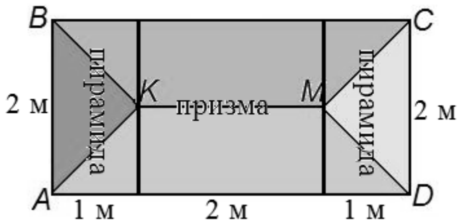
$\frac{35}{24}=\frac{S_{сеч}}{S_{осн}}=\frac{5S_{пр}}{3S_{осн}}=\frac{5}{3}\left(1-\frac{1}{2}\left(2-\frac{3x}{2d}\right)^2\right)$, $\frac{7}{8}=1-\frac{1}{2}\left(2-\frac{3x}{2d}\right)^2$, $2-\frac{3x}{2d}=\frac{1}{2}, x=d$. Случай $2-\frac{3x}{2d}=-\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $\frac{3}{4}x<d$, поскольку здесь $\frac{x}{d}=\frac{5}{3}$. Тогда угол между диагональю призмы AC_1 и плоскостью основания $ABCD$ равен $45°$.

Ответ: $45°$.

6. (20 баллов) Зимой в городе выпало такое количество снега, что при расчистке улиц его некуда было складывать, поэтому коммунальная служба города организовала временные пункты плавления снега на прямоугольной площадке размером 4 м длиной и 2 м шириной. Ограждений по краям нет. Чтобы снег не осыпался за границы, угол наклона его поверхности к земле со всех сторон не должен превышать α, где tg α = 3. Снег насыпан так, что занимает максимально возможный объём при соблюдении этого условия. И при этом объем талой воды не превышает максимально возможный объем водоотвода.

Из-за разной плотности снега в нижних и верхних слоях (нижние слои более уплотнены временем и весом), коэффициент таяния (отношение объёма полученной воды к объёму снега) зависит от высоты слоя. Для упрощения расчётов снежную кучу высотой H разделили на три горизонтальных слоя одинаковой толщины. Верхний слой (от 2H/3 до H метров высоты): 1 м³ снега даёт 0.3 м³ воды. Средний слой (от H/3 до 2H/3 метров высоты): 1 м³ снега даёт 0.6 м³ воды. Нижний слой (от 0 до H/3 метра высоты): 1 м³ снега даёт 0.9 м³ воды.

Найдите максимальный объём снега V, который можно разместить на площадке. Вычислите общий объём воды W, который образуется после полного таяния снега.



Решение. Для решения этой задачи представим площадку в системе координат. Пусть площадка занимает прямоугольную область D в плоскости Oxy со сторонами a=4 м и b=2 м. Пусть z(x, y) — высота снежного вала в точке (x, y). Так как площадка не огорожена и снег не должен рассыпаться за её границу, высота снега на краях площадки должна быть равна нулю. Чтобы максимизировать объём снега, нужно в каждой точке сделать высоту максимально возможной. Максимальная высота в точке ограничена расстоянием до ближайшего края площадки, умноженным на максимальный уклон. Таким образом, оптимальная форма снежной кучи описывается функцией: $z(x,y)=3\cdot\rho(x,y)$, где $\rho(x,y)$ — расстояние от точки (x,y) до границы прямоугольника и представляет собой «шатёр» с гребнем посередине. Для прямоугольника со сторонами a и b ($a \geq b$): максимальное расстояние до границы равно b/2. Гребень (линия максимальной высоты) проходит параллельно длинной стороне на расстоянии b/2 от коротких сторон. Длина гребня равна a-b.

Фигуру можно разбить на две части: центральную призму и две торцевые пирамиды. Максимальная высота снега (с учётом уклона): H=3b/2=3 м.

Длина гребня центральной призмы: L= a-b = 4-2 = 2 м. Это боковое ребро призмы. Поперечное сечение призмы — равнобедренный треугольник с основанием b=2 м и высотой H=3 м.

Объём снега складывается из объёма центральной призмы и объёма двух торцевых частей (которые вместе составляют одну четырёхугольную пирамиду). Объём центральной призмы**:**

$V_1=S\cdot L=1/2\cdot b\cdot H\cdot L=1/2\cdot 2\cdot 3\cdot 2=6$ м³.

Объём торцевых частей (V_2): две торцевые части вместе образуют четырёхугольную пирамиду с основанием 2 на 2 метра и высотой 3 м.

Объём пирамиды: $V_2 = 1/3\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 4$. **Общий объем V=6+4=10 м³.**

Чтобы найти объём снега в каждом слое, рассмотрим «верхнюю часть» кучи, отсекаемую горизонтальной плоскостью.

Верхняя часть кучи (выше высоты z) сама является «шатром» с высотой $h=3-z$.

Основанием этого верхнего «шатра» является прямоугольник, размеры которого уменьшаются по мере подъёма.

На высоте z расстояние от края до склона равно $d=z/3$.

Стороны основания верхнего «шатра»:

Длина: $a(z)=4-2d=4-2z/3$. Ширина: $b(z)=2-2d=2-2z/3$.

Объём любого такого «шатра» с высотой h, длиной a и шириной b (где $a-b=2$) вычисляется по формуле: $V(h,b)=h\cdot b+1/3\cdot h\cdot b^2=h\cdot b(1+b/3)$.

(Здесь b — ширина основания верхнего шатра, h — его высота).

Расчёт объёмов слоёв:

1) Верхний слой (от 2 м до 3 м): это «шатёр» высотой $h_3=1$ м.

Ширина его основания (на высоте 2 м): $b_2=2-(2\cdot 2)/3=2/3$ м.

Объём верхнего слоя: $V_3=1\cdot 2/3\cdot(1+2/9)=22/27$ м^3.

2) Верхняя часть (от 1 м до 3 м): это «шатёр» высотой $h_{2+3}=2$ м.

Ширина его основания (на высоте 1 м): $b_1=2-2/3=4/3$ м.

Объём верхней части: $V_{2+3}=2\cdot 4/3\cdot(1+4/9)=104/27$ м^3.

Объём среднего слоя (V_2) равен разности:

$V_2=V_{2+3}-V_3=104/27-22/27=82/27$ м^3.

3) Нижний слой (от 0 м до 1 м):

Объём нижнего слоя (V_1) равен разности полного объёма и верхней части:

$V_1=V-V_{2+3}=10-104/27=166/27$ м^3.

Итоговый объём воды:

Умножаем объём каждого слоя на его коэффициент таяния

$W=0.3\cdot V_3+0.6\cdot V_2+0.9\cdot V_1=1/27\cdot(0.3\cdot 22+0.6\cdot 82+0.9\cdot 166)=$

$=1/27\cdot(6.6+49.2+149.4)=205.2/27=7.6$ м^3.

Ответ: 1) 10 м³; 2) 7.6 м³.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 10

Задание 1 максимальная оценка: **12 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	12
Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	9
Задача решена без учета выворачивания или смены ног.	6
Задача решена без учета выворачивания и смены ног.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 2 максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Получены верные оценки, приводящие к верному ответу.	8
Использована формула бинома Ньютона, имелись соображения относительно использования, сопряженного до разности квадратов, аналогичного выражения.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 3 максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Доказано, что F - середина CK, верно найден угол CAK.	8
Доказано, что F - середина CK.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 4 максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	16
Все рассуждения верные, все утверждения обоснованы. Допущена одна вычислительная ошибка.	12
Доказано, что все значения P (x,y) делятся на 3, и любое число, кратное трем, может быть значением многочлена P (x,y).	8
Доказано, что все значения P (x,y) делятся на 3.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 5 максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	20
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены. Допущена одна арифметическая ошибка.	15
Получено верное уравнение с одним неизвестным, которым является искомое отношение.	10
Доказано, что сечением является пятиугольник. Полностью описано построение сечения призмы. Установлены необходимые подобия. Получены формулы для вычисления объема меньшей части.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 6 максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	**Балл**
Задача решена полностью, получены все верные ответы, все утверждения обоснованы. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений.	20
Верно вычислен объем снежной кучи с подробным обоснованием, имеется верный подход к вычислению объема воды, т.е. верно произведена разбивка на слои, но не получен верный окончательный ответ или допущена одна арифметическая ошибка в вычислении объемов.	15
Верно посчитан объем снежной кучи, но продемонстрирован неверный подход к вычислению объема воды, или имеются арифметические ошибки в вычислении объема воды и сделана попытка подсчета объемов слоев, без верного ответа или верный ответ, но без подробного обоснования.	10
частник «разбил» снежную кучу на составляющие – призму и пирамиду (конус), написал формулы для вычисления объема, но не сделал правильных вычислений, или имеется верный ответ, но без подробного обоснования.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0