Профиль олимпиады: «Математика»

Класс участия: 9 **Вариант задания: 2**

Задача 1.

Решите уравнение: $$3\left|\frac{x+2}{1-x^2}\right|+|x+2|=\frac{(x+2)^2|x-2|}{|x^2-1|}.$$

Решение:

$$\frac{(x+2)^2(x-2)}{x^2-1}=\frac{(x+2)(x^2-1-3)}{x^2-1}=x+2+3\cdot\frac{x+2}{1-x^2}.$$

Исходное уравнение перепишем в виде

$$3\left|\frac{x+2}{1-x^2}\right|+|x+2|=\left|3\cdot\frac{x+2}{1-x^2}+x+2\right|.$$

Получим равносильное неравенство $3\cdot\frac{x+2}{1-x^2}\cdot(x+2)\geq 0$. Таким образом, решением является промежуток $x\in(-1;1)\cup\{-2\}$. Замечание. При решении использовалось утверждение:

$|a+b|=|a|+|b| <=> ab\geq 0.$

Ответ: $(-1;1)\cup\{-2\}$.

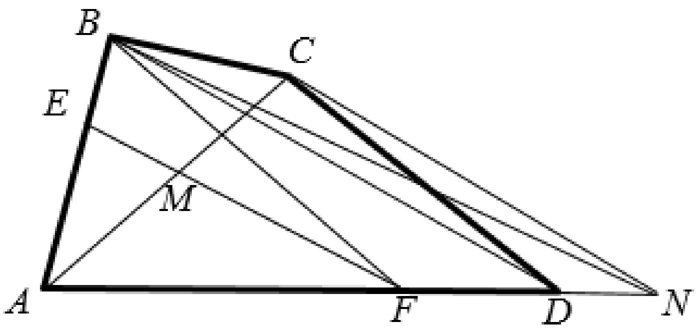
Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	15
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	12
Ответ отличается от верного исключением точки $x=-2$.	9
Верно решена одна из систем неравенств или верно совершен переход к неравенству $3\cdot\frac{x+2}{1-x^2}\cdot(x+2)\geq 0$.	6
Верно сняты модули или верно представлена правая часть как сумма дробей левой части.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 2.

Через середину M диагонали AC произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведена прямая EF параллельная BD, пересекающая стороны AB и AD. Найти площадь четырехугольника $BCDF$, если известно, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна 16.

Решение:



1) Проведем через вершину C прямую $CN||BD$. Так как $CN||BD =>$ $\rho(C;BD) = \rho(D;CN) = h$. Тогда $S_{\Delta BCD} = S_{\Delta BDN} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot h$.

Получаем, что треугольник ABN равновелик четырехугольнику $ABCD$, т.е. $S_{\Delta ABN} = S_{ABCD}$.

2) По условию $AM = MC$, $EF||BD, CN||BD =>$ MF- средняя линия ΔACN. Тогда $AF = FN$ $=>$ BF – медиана ΔABN, значит,

$S_{\Delta ABN} = 2S_{\Delta ABF}$, $S_{ABCD} = S_{\Delta ABF} + S_{BCDF}$, $2S_{\Delta ABF} = S_{\Delta ABF} + S_{BCDF}$,

$S_{\Delta ABF} = S_{BCDF}$, $S_{BCDF} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 8$.

Ответ: 8.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованно получен верный ответ	15
При верном и обоснованном ходе решения допущена арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.	12
Верно выполнено предварительное построение и доказано, что прямая BF разделяет площадь четырехугольника $ABCD$ пополам, решение не доведено до ответа.	9
Верно выполнено предварительное построение и обосновано, что треугольник ABN равновелик четырехугольнику $ABCD$, или показано, что BF – медиана ΔABN, но дальнейшие продвижения в решении в обоих случаях отсутствуют.	6
Верно начато решение задачи, верно выполнено построение $CN\|\|BD$ и показано, что ΔBCD и ΔBDN равновеликие.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 3.

При каких значениях параметра a уравнение

$$a\left(x^2-6x+9\right)^2-\left(2a^2+3\right)\left(x^2-6x+9\right)\left(x+2\right)+6a\left(x^2+4x+4\right)=0$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение: Перепишем уравнение в виде

$a\cdot(x^2-6x+9)^2-(2a^2+3)\cdot(x^2-6x+9)\cdot(x+2)+6a\cdot(x+2)^2=0$. Заметим, что $x=-2$ не является корнем уравнения. Разделим уравнение на $(x+2)^2$.

Получаем $a\cdot(\frac{x^2-6x+9}{x+2})^2-(2a^2+3)\cdot\frac{x^2-6x+9}{x+2}+6a=0$. Сделаем замену $t=\frac{x^2-6x+9}{x+2}$. Получим уравнение $at^2-(2a^2+3)t+6a=0$. (2)

Изучим, какие значения t дают решения уравнения по x, а именно, найдём область значений функции $t=\frac{x^2-6x+9}{x+2}$. Домножим уравнение на $x+2$. Получим уравнение $t(x+2)=x^2-6x+9$. x= –2 не является корнем этого уравнения. Преобразуем это уравнение в $x^2-(t+6)x+9-2t=0$. Это уравнение имеет решения если $D\ge 0$.

$$D=(t+6)^2-4(9-2t)=t^2+12t+36-36+8t=t^2+20t=t(t+20)\ge 0.$$

$E(t(x))=(-\infty;-20]\cup[0;+\infty)$. Следовательно, уравнение имеет хотя бы одно решение при $\left[\begin{array}{l} t\ge 0 \\ t\le -20 \end{array}\right.$.

Решим уравнение (2) $at^2-(2a^2+3)t+6a=0$.

При a =0 получаем t=0, следовательно a =0 – входит в ответ.

$$D=(2a^2+3)^2-4a\cdot 6a=4a^4+12a^2+9-24a^2=4a^4-12a^2+9=(2a^2-3)^2.$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{2a^2+3-2a^2+3}{2a}=\frac{3}{a} \\ t=\frac{2a^2+3+2a^2-3}{2a}=\frac{4a^2}{2a}=2a \end{array}\right.$$

Решим 4 неравенства:

1) $\frac{3}{a} \geq 0 \Rightarrow a > 0$;

2) $2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$;

3) $\frac{3}{a} \leq -20 \Leftrightarrow \frac{3}{a} + 20 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3+20a}{a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a+\frac{3}{20}}{a} \leq 0$. $a \in [-\frac{3}{20}; 0)$.

4) $2a \leq -20 \Leftrightarrow a \leq -10$.

Ответ: $a \in (-\infty; -10] \cup [-\frac{3}{20}; +\infty)$.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованно получен правильный ответ	15
Обоснованно получен ответ, отличающийся от правильного одним или двумя значениями a или при правильном ответе решение недостаточно обоснованно	12
Верно сделана оценка переменной и верно выписаны корни уравнения по t	9
Верно сделана оценка переменной или верно выписаны корни уравнения по t	6
Верно сделана замена переменной (определён тип уравнения)	3
Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев	0

Задача 4.

Два автомобиля одновременно выезжают из одного пункта в одном направлении (скорость первого больше скорости второго). Через некоторое время из того же пункта в том же направлении выдвигается третий автомобиль. Через восемь часов после старта первых двух автомобилей третий автомобиль оказывается ровно посередине между первым и вторым автомобилями, а ещё через четыре часа третий автомобиль догнал первого. Сразу после этого третий автомобиль развернулся и поехал в обратном направлении и встретил второй автомобиль через два часа после того, как сменил направление движения.

Определите:

а) через какое время после старта первых двух автомобилей выехал в путь третий?

б) во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго?

Решение: Пусть x единиц пути/единицу времени – скорость первого автомобиля, y - второго автомобиля, z - третьего, t - время между стартом первых двух автомобилей и третьего автомобиля. Тогда:

$$\begin{cases} 8x - z(8-t) = z(8-\mathrm{t}) - 8\mathrm{y} \\ 12x = (12-t)z \\ 2(z+y) = 12(x-y) \end{cases}$$

. Разделим каждое из уравнений на z, получим:

$$\begin{cases} 8\frac{x}{z} + 8\frac{y}{z} = 2\cdot(8-\mathrm{t}) \\ 12\frac{x}{z} = 12-t \\ \frac{y}{z} + 1 = 6\frac{x}{z} - 6\frac{y}{z} \end{cases}$$

. Сделаем замену: пусть $a = \frac{x}{z}$, $b = \frac{y}{z}$. Тогда

$$\begin{cases} 4a + 4b = 8 - t \\ 12a = 12 - t \\ b + 1 = 6a - 6b \end{cases}$$

. Из второго уравнения $t = 12 - 12a$, а из третьего уравнения

$7b = 6a - 1$; $b = \frac{6a-1}{7}$. Подставляем эти данные в первое уравнение получаем:

$4a + 4\cdot\frac{6a-1}{7} = 8 - 12 + 12a$; $4\cdot\frac{6a-1}{7} = 8a - 4$. Решением данного уравнения будет $a=\frac{3}{4}$. Возвращаясь к системе, получаем $t=3$, которое пойдёт в ответ и $b=\frac{1}{2}$. Отношение скоростей равно $\frac{x}{y}=\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}=\frac{x}{z}:\frac{y}{z}=a:b=\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}=\frac{3}{2}$.

Ответ: а) через 3 часа, б) в 1,5 раза.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованно получен верный ответ на оба вопроса задачи	15
Обоснованно получен верный ответ на один из двух вопросов задачи	12
Определён верный алгоритм решения системы уравнений	9
Верно введены переменные и составлена система уравнений	6
Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев	0

Задача 5.

Около треугольника ABC описана окружность ω_1. O – центр окружности ω_2, вписанной в треугольник ABC. Прямая AO пересекает BC в точке K и второй раз окружность ω_1 в точке N. Найдите длину KN, если $AB = 1{,}5BK$ и $OK = 4$.

Решение:

Четырёхугольник $ABNC$ – вписанный, следовательно,

$AK \cdot KN = BK \cdot KC$ $(*)$.

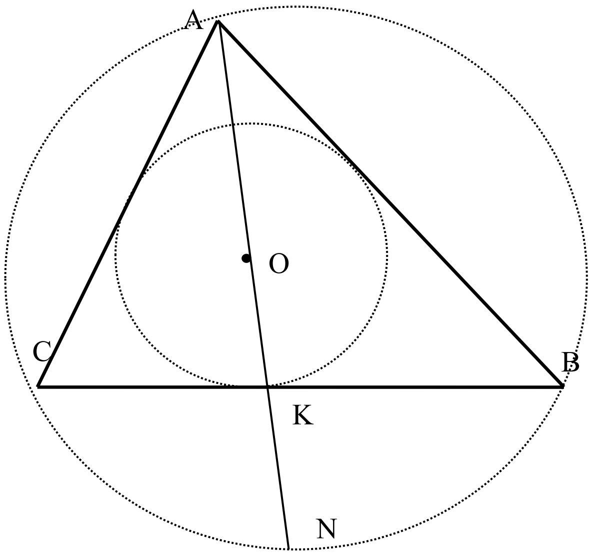
Так как AO – биссектриса угла A треугольника ABC, то $AK^2 = AB \cdot AC - BK \cdot KC$, поэтому

$$AK^2 = AB \cdot AC - AK \cdot KN = AB \cdot AC - AK \cdot (AN - AK) =>$$

$$AK \cdot AN = AB \cdot AC.$$

Разделим на (*):

$\frac{AN}{KN} = \frac{AB}{KB} \cdot \frac{AC}{KC}$, но, по свойству биссектрисы, $\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KC} => \frac{AN}{KN} = \left(\frac{AB}{KB}\right)^2 = \frac{9}{4}$ и точка O – делит AK, как $(AB + AC){:}\,BC = 1{,}5 => AO{:}\,OK = 3{:}\,2 => AK = 10 => \frac{AK+KN}{KN} = \frac{9}{4} => KN = 8$.



Ответ: 8.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.	20
При верном и обоснованном ходе решения (доказано, например, что $AK \cdot AN = AB \cdot AC$, или другие промежуточные результаты помогающие найти правильный ответ, кроме пропорции для биссектрисы и пересекающихся хорд), но получен неверный ответ, или решение недостаточно обосновано.	14
Получены некоторые промежуточные результаты (например, что $\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KC}$ или $AK \cdot KN = BK \cdot KC$), дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.	0

Задача 6.

Иллюминатор представляет собой двухкамерный стеклопакет (три однородных одинаковых стекла). Определите, какой процент света пропускает стеклопакет внутрь корабля, если одно стекло пропускает 75% попадающего на него света.

Решение: Рассмотрим однокамерный стеклопакет, как конструкцию из двух стекол, а двухкамерный стеклопакет – как однокамерный стеклопакет плюс еще одно стекло. Пусть первое стекло в однокамерном стеклопакете отражает p-ю часть света, тогда пропустит оно $1-p$ часть.

Первое решение. Второе стекло пропустит $(1-p)^2$ часть, а отразит $(1-p)p$ -ю часть, тогда первое стекло отразит $(1-p)p^2$ часть, а второе пропустит $(1-p)^2p^2$ ее часть и т.д. Таким образом, всего однокамерный стеклопакет пропустит $(1-p)^2(1+p^2+p^4+\cdots)=(1-p)^2\frac{1}{1-p^2}=\frac{1-p}{1+p}-$ часть света, тогда отразит $\frac{2p}{1+p}-$ часть света. После этого свет падает на третье стекло и сквозь него пройдет $\frac{(1-p)^2}{1+p}$ часть, а $\frac{p(1-p)}{1+p}-$ отразится на однокамерный стеклопакет, который, как описано выше, пропустит $\frac{1-p}{1+p}\cdot\frac{p(1-p)}{1+p}$ и отразит $\frac{2p}{1+p}\cdot\frac{p(1-p)}{1+p}$ часть, от которой $\frac{2p}{1+p}\cdot\frac{p(1-p)^2}{1+p}-$пройдет через третье стекло и т.д. Таким образом, всего двухкамерный стеклопакет пропустит $\frac{(1-p)^2}{1+p}\left(1+\frac{2p^2}{1+p}+\left(\frac{2p^2}{1+p}\right)^2+\cdots\right)$, так как в скобках бесконечно убывающая последовательность, то всего двухкамерный стеклопакет пропустит $\frac{(1-p)^2}{1+p}\cdot\frac{1}{1-\frac{2p^2}{1+p}}=\frac{(1-p)^2}{(1-p)(1+2p)}=\frac{1-p}{1+2p}$ часть света.

Второе решение. Пусть второе стекло пропустит всего x -ю часть дошедшего до него света, тогда это будет $x(1-p)$ часть всего. От второго стекла отразится $(1-p)p$ часть, а, следовательно, обратно первое стекло пропустит всего $(1-p)px$ часть. Таким образом, всего от стеклопакета отразится $p+(1-p)px$ часть. Так как, по условию задачи, весь свет либо отразится, либо пройдет сквозь стеклопакет, то получим $p+(1-p)px+(1-p)x=1 => x=\frac{1}{1+p}$, следовательно, однокамерный стеклопакет пропустит $\frac{1-p}{1+p}$ – часть света, а отразит $\frac{2p}{1+p}$ – его часть. Рассмотрим двухкамерный стеклопакет, как конструкцию из стекла и однокамерного стеклопакета. Пусть однокамерный стеклопакет пропустит y -ю часть света, после стекла, то есть всего двухкамерный стеклопакет пропустит $(1-p)y$. Третье стекло первый раз отразит $\frac{p(1-p)}{1+p}$ части дошедшего до него света, а затем однокамерный стеклопакет пропустит $\frac{yp(1-p)}{1+p}$ часть отраженного света. Так как, по условию задачи, весь свет либо отразится, либо пройдет сквозь двухкамерный стеклопакет, то получим $\frac{2p}{1+p}+\frac{yp(1-p)}{1+p}+(1-p)y=1 => y=\frac{1-p}{(1-p)(1+2p)}=\frac{1}{1+2p}$ и всего двухкамерный стеклопакет пропустит $(1-p)y=\frac{1-p}{1+2p}$ часть света.

Так как по условию задачи $p=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} => \frac{1-p}{1+2p}=\frac{1}{2}$.

Ответ: 50%.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.	20
При верном и обоснованном ходе решения задачи допущены описки или арифметические ошибки.	16
Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи для однокамерного стеклопакета.	10
При верном и обоснованном ходе решения задачи для однокамерного стеклопакета допущены описки или арифметические ошибки.	6
Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.	0