Профиль олимпиады: «Математика»

Класс участия: 9 **Вариант задания: 1**

Задача 1.

Решите уравнение: $3\left|\frac{x-1}{x^2-4}\right|+|1-x|=\frac{(x-1)^2|x+1|}{|4-x^2|}$.

Решение:

$$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-4}=\frac{(x-1)(x^2-4+3)}{x^2-4}=x-1+3\cdot\frac{x-1}{x^2-4}.$$

Исходное уравнение перепишем в виде

$$3\left|\frac{x-1}{x^2-4}\right|+|x-1|=\left|3\cdot\frac{x-1}{x^2-4}+x-1\right|.$$

Получим равносильное неравенство $3\cdot\frac{x-1}{x^2-4}\cdot(x-1)\geq 0$.

Таким образом, решением является промежуток $x\in(-\infty;-2)\cup\{1\}\cup(2;+\infty)$.

Замечание. При решении использовалось утверждение:

$|a+b|=|a|+|b| <=> ab\geq 0$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\{1\}\cup(2;+\infty)$.

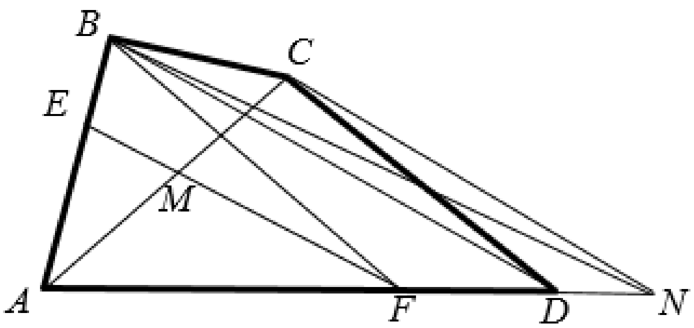
Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	15
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	12
Ответ отличается от верного исключением точки $x=1$.	9
Верно решена одна из систем неравенств или верно совершен переход к неравенству $3\cdot\frac{x-1}{x^2-4}\cdot(x-1)\geq 0$.	6
Верно сняты модули или верно представлена правая часть как сумма дробей левой части.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 2.

Через середину M диагонали AC произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведена прямая EF параллельная BD, пересекающая стороны AB и AD. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $BCDF$ равна 5.

Решение:



1) Проведем через вершину C прямую $CN||BD$. Так как $CN||BD =>$ $\rho(C;BD) = \rho(D;CN) = h$. Тогда $S_{\Delta BCD} = S_{\Delta BDN} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot h$.

Получаем, что треугольник ABN равновелик четырехугольнику $ABCD$, т.е. $S_{\Delta ABN} = S_{ABCD}$.

2) По условию $AM = MC$, $EF||BD, CN||BD =>$ MF- средняя линия ΔACN. Тогда $AF = FN$ $=>$ BF – медиана ΔABN, значит,

$S_{\Delta ABN} = 2S_{\Delta ABF}$, $S_{ABCD} = S_{\Delta ABF} + S_{BCDF}$, $2S_{\Delta ABF} = S_{\Delta ABF} + S_{BCDF}$,

$S_{\Delta ABF} = S_{BCDF} = 5$, $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABF} = 10$.

Ответ: 10.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованно получен верный ответ	15
При верном и обоснованном ходе решения допущена арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.	12
Верно выполнено предварительное построение и доказано, что прямая BF разделяет площадь четырехугольника $ABCD$ пополам, решение не доведено до ответа.	9
Верно выполнено предварительное построение и обосновано, что треугольник ABN равновелик четырехугольнику $ABCD$, или показано, что BF – медиана ΔABN, но дальнейшие продвижения в решении в обоих случаях отсутствуют.	6
Верно начато решение задачи, верно выполнено построение $CN\|\|BD$ и показано, что ΔBCD и ΔBDN равновеликие.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 3.

При каких значениях параметра p уравнение

$$p\left(x^2+4x+4\right)^2-\left(3p^2+2\right)\left(x^2+4x+4\right)\left(x-1\right)+6p\left(x^2-2x+1\right)=0$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение: Перепишем уравнение в виде

$p\cdot(x^2+4x+4)^2-(3p^2+2)\cdot(x^2+4x+4)\cdot(x-1)+6p\cdot(x-1)^2=0$. Заметим, что $x=1$ не является корнем уравнения. Разделим уравнение на $(x-1)^2$. Получаем $p\cdot(\frac{x^2+4x+4}{x-1})^2-(3p^2+2)\cdot\frac{x^2+4x+4}{x-1}+6p=0$. Сделаем замену $t=\frac{x^2+4x+4}{x-1}$. Получим уравнение $pt^2-(3p^2+2)t+6p=0$. (2)

Изучим, какие значения t дают решения уравнения по x, а именно, найдём область значений функции $t=\frac{x^2+4x+4}{x-1}$. Домножим уравнение на $x-1$. Получим уравнение $t(x-1)=x^2+4x+4$. x=1 не является корнем этого уравнения. Преобразуем это уравнение в $x^2-(\mathrm{t}-4)x+t+4=0$. Это уравнение имеет решения если $D\ge 0$. $D=(t-4)^2-4(t+4)=t^2-8t+16-4t-16=t^2-12t\ge 0$. $E(t(x))=(-\infty;0]\bigcup[12;+\infty)$. Следовательно, уравнение имеет хотя бы одно решение при $\left[\begin{array}{l} t\le 0 \\ t\ge 12 \end{array}\right.$.

Решим уравнение (2) $pt^2-(3p^2+2)t+6p=0$.

При p=0 получаем t=0, следовательно **p=0** – входит в ответ.

$$D=(3p^2+2)^2-4p\cdot 6p=9p^4+12p^2+4-24p^2=9p^4-12p^2+4=(3p^2-2)^2.$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{3p^2+2-3p^2+2}{2p}=\frac{2}{p} \\ t=\frac{3p^2+2+3p^2-2}{2p}=\frac{6p^2}{2p}=3p \end{array}\right.$$

Решим 4 неравенства:

1) $\dfrac{2}{p} \le 0 \Rightarrow p < 0$;

2) $3p \le 0 \Rightarrow p \le 0$;

3) $\dfrac{2}{p} \ge 12 \Leftrightarrow \dfrac{2}{p} - 12 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-12p}{p} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{p-\frac{1}{6}}{p} \le 0$. $\quad p \in (0;\dfrac{1}{6}]$.

4) $3p \ge 12 \Leftrightarrow p \ge 4$.

Ответ: $p \in (-\infty;\dfrac{1}{6}] \cup [4;+\infty)$.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованно получен правильный ответ	15
Обоснованно получен ответ, отличающийся от правильного одним или двумя значениями p или при правильном ответе решение недостаточно обоснованно	12
Верно сделана оценка переменной и верно выписаны корни уравнения по t	9
Верно сделана оценка переменной или верно выписаны корни уравнения по t	6
Верно сделана замена переменной (определён тип уравнения)	3
Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев	0

Задача 4.

Два пешехода одновременно выходят из одного пункта и идут в одном направлении (скорость первого больше скорости второго). Через некоторое время из того же пункта в том же направлении выдвигается третий пешеход. Через 4 часа после старта первых двух пешеходов он оказывается ровно посередине между первым и вторым пешеходами, а ещё через 2 часа после этого третий пешеход догнал первого, после чего сразу развернулся и пошёл в обратном направлении, встретив второго пешехода через 36 минут после того, как сменил направление движения.

Определите:

а) через какое время после старта первых двух пешеходов вышел в путь третий?

б) во сколько раз скорость первого пешехода больше скорости второго?

Решение: Пусть x единиц пути/единицу времени – скорость первого пешехода, y - второго пешехода, z - третьего, t - время между стартом первых двух пешеходов и третьего пешехода. Тогда:

$$\begin{cases} 4x - z(4-t) = z(4-\text{t}) - 4\text{y} \\ 6x = (6-t)z \\ 0,6(z+y) = 6(x-y) \end{cases}$$

. Разделим каждое из уравнений на z, получим:

$$\begin{cases} 4\dfrac{x}{z} - 4 + t = 4 - \text{t} - 4\dfrac{y}{z} \\ 6\dfrac{x}{z} = 6 - t \\ 1 + \dfrac{y}{z} = 10\left(\dfrac{x}{z} - \dfrac{y}{z}\right) \end{cases}$$

. Сделаем замену: пусть $a = \dfrac{x}{z}$, $b = \dfrac{y}{z}$. Тогда

$$\begin{cases} 4a + 4b = 8 - 2t \\ 6a = 6 - t \\ 1 + b = 10a - 10b \end{cases}$$

. Из второго уравнения $t = 6 - 6a$; из третьего - $b = \dfrac{10a-1}{11}$

Тогда в первом уравнении получится $2a + 2\cdot\dfrac{10a-1}{11} = 4 - 6 + 6a$, решением которого является $a = \dfrac{5}{6}$. Возвращаясь к системе, получаем $t = 1$, что идёт ответ и

$b=\frac{2}{3}$. Тогда отношение скоростей равно $\frac{x}{y}=\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}=\frac{x}{z}:\frac{y}{z}=a:b=\frac{5}{6}:\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{4}$

Ответ: а) 1 час, б) в 1,25 раза (в $\frac{5}{4}$ раз).

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованно получен верный ответ на оба вопроса задачи	15
Обоснованно получен верный ответ на один из двух вопросов задачи	12
Определён верный алгоритм решения системы уравнений	9
Верно введены переменные и составлена система уравнений	6
Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев	0

Задача 5.

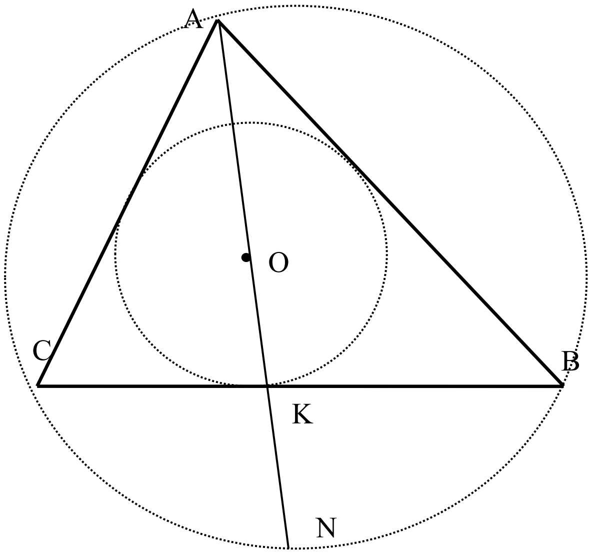
Около треугольника ABC описана окружность ω_1. O – центр окружности ω_2, вписанной в треугольник ABC. Прямая AO пересекает BC в точке K и второй раз окружность ω_1 в точке N. Найдите длину AO, если $AB = 1{,}5BK$ и $KN = 4$.

Решение: Четырёхугольник $ABNC -$ вписанный, следовательно, $AK \cdot KN = BK \cdot KC$ $(*)$. Так как $AO -$ биссектрисса угла A треугольника ABC, то $AK^2 = AB \cdot AC - BK \cdot KC,$ поэтому

$$AK^2 = AB \cdot AC - AK \cdot KN = AB \cdot AC - AK \cdot (AN - AK) => AK \cdot AN = AB \cdot AC.$$

Разделим на (*):

$\frac{AN}{KN} = \frac{AB}{KB} \cdot \frac{AC}{KC}$, но, по свойству биссектрисы, $\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KC} => \frac{AN}{KN} = \left(\frac{AB}{KB}\right)^2 = \frac{9}{4} =>$ $AN = 9, AK = 5$ и точка O – делит AK, как $(AB + AC): BC = 1{,}5 => AO: OK = 3: 2 => AO = 3.$



Ответ: 3.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.	20
При верном и обоснованном ходе решения (доказано, например, что $AK \cdot AN = AB \cdot AC$, или другие промежуточные результаты помогающие найти правильный ответ, кроме пропорции для биссектрисы и пересекающихся хорд), но получен неверный ответ, или решение недостаточно обосновано.	14
Получены некоторые промежуточные результаты (например, что $\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KC}$ или $AK \cdot KN = BK \cdot KC$), дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.	0

Задача 6.

Иллюминатор представляет собой двухкамерный стеклопакет (три однородных одинаковых стекла). Определите, какой процент света пропускает стеклопакет внутрь корабля, если одно стекло пропускает 60% попадающего на него света.

Первое решение. Второе стекло пропустит $(1-p)^2$ часть, а отразит $(1-p)p$ -ю часть, тогда первое стекло отразит $(1-p)p^2$ часть, а второе пропустит $(1-p)^2p^2$ ее часть и т.д. Таким образом, всего однокамерный стеклопакет пропустит $(1-p)^2(1+p^2+p^4+\cdots)=(1-p)^2\frac{1}{1-p^2}=\frac{1-p}{1+p}-$ часть света, тогда отразит $\frac{2p}{1+p}-$ часть света. После этого свет падает на третье стекло и сквозь него пройдет $\frac{(1-p)^2}{1+p}$ часть, а $\frac{p(1-p)}{1+p}-$ отразится на однокамерный стеклопакет, который, как описано выше, пропустит $\frac{1-p}{1+p}\cdot\frac{p(1-p)}{1+p}$ и отразит $\frac{2p}{1+p}\cdot\frac{p(1-p)}{1+p}$ часть, от которой $\frac{2p}{1+p}\cdot\frac{p(1-p)^2}{1+p}-$пройдет через третье стекло и т.д. Таким образом, всего двухкамерный стеклопакет пропустит $\frac{(1-p)^2}{1+p}\left(1+\frac{2p^2}{1+p}+\left(\frac{2p^2}{1+p}\right)^2+\cdots\right)$, так как в скобках бесконечно убывающая последовательность, то всего двухкамерный стеклопакет пропустит $\frac{(1-p)^2}{1+p}\cdot\frac{1}{1-\frac{2p^2}{1+p}}=\frac{(1-p)^2}{(1-p)(1+2p)}=\frac{1-p}{1+2p}$ часть света.

Второе решение. Пусть второе стекло пропустит всего x -ю часть дошедшего до него света, тогда это будет $x(1-p)$ часть всего. От второго стекла отразится $(1-p)p$ часть, а, следовательно, обратно первое стекло пропустит всего $(1-p)px$ часть. Таким образом, всего от стеклопакета отразится $p+(1-p)px$ часть. Так как, по условию задачи, весь свет либо отразится, либо пройдет сквозь стеклопакет, то получим $p+(1-p)px+(1-p)x=1 => x=\frac{1}{1+p}$, следовательно, однокамерный стеклопакет пропустит $\frac{1-p}{1+p}-$ часть света, а отразит $\frac{2p}{1+p}-$ его часть. Рассмотрим двухкамерный стеклопакет, как конструкцию из стекла и однокамерного стеклопакета. Пусть однокамерный стеклопакет пропустит y -ю часть света, после стекла, то есть всего двухкамерный стеклопакет пропустит $(1-p)y$. Третье стекло первый раз отразит $\frac{p(1-p)}{1+p}$ части дошедшего до него света, а затем однокамерный стеклопакет пропустит $\frac{yp(1-p)}{1+p}$ часть отраженного света. Так как, по условию задачи, весь свет либо отразится, либо пройдет сквозь двухкамерный стеклопакет, то получим $\frac{2p}{1+p}+\frac{yp(1-p)}{1+p}+(1-p)y=1 => y=\frac{1-p}{(1-p)(1+2p)}=\frac{1}{1+2p}$ и всего двухкамерный стеклопакет пропустит $(1-p)y=\frac{1-p}{1+2p}$ часть света.

Так как по условию задачи $p=0{,}4$, то $\frac{1-p}{1+2p}=\frac{0{,}6}{1{,}8}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{100}{3}$%.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.	20
При верном и обоснованном ходе решения задачи допущены описки или арифметические ошибки.	16
Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи для однокамерного стеклопакета.	10
При верном и обоснованном ходе решения задачи для однокамерного стеклопакета допущены описки или арифметические ошибки.	6
Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.	0