Профиль олимпиады: «Математика»

Класс участия: 8 **Вариант задания: 2**

Задача 1.

Утром Маша и Кирилл съели полную корзиночку смородины за 10 минут, вечером Артур и Кирилл такое же количество ягод за 15 минут. На следующий день Маша и Артур съели смородину в такой же корзиночке за 18 минут. За какое время Маша, Кирилл и Артур вместе могли бы съесть две такие корзиночки ягод?

Решение: За 1 минуту совместно они съедают $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{9+6+5}{90\cdot 2}=\frac{1}{9}$ корзиночки, (делим на 2, т.к. иначе каждый был бы учтен 2 раза). Значит, 2 корзиночки ягод были бы съедены за 18 минут.

Ответ: 18 минут.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Полное обоснованное решение	15
Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.	12
При верном ходе решения решена большая часть задачи, продолжения нет или оно неверное.	10
Составлены уравнения или другое верное начало решения.	5
Неверные рассуждения или записан только ответ.	0

Задача 2.

Найдите все целые решения уравнения $(y-1)(4x+8)=3x^2-x-14$

Решение: Разложим на множители правую часть уравнения

$(y-1)(4x+8)=(3x-7)(x+2)$, тогда

1) если $x=-2$, то y - любое целое число.

2) если $x \neq -2$, тогда $y-1=\frac{3x-7}{4}=\frac{4x-8-x+1}{4}=x-2-\frac{x-1}{4}$,

следовательно, $\frac{x-1}{4}=t$, где t - целое число. Тогда $x=4t+1$, $y=3t$, где t - любое целое число.

Ответ: $(-2;t)$, $(4t+1;3t)$, где t - любое целое число.

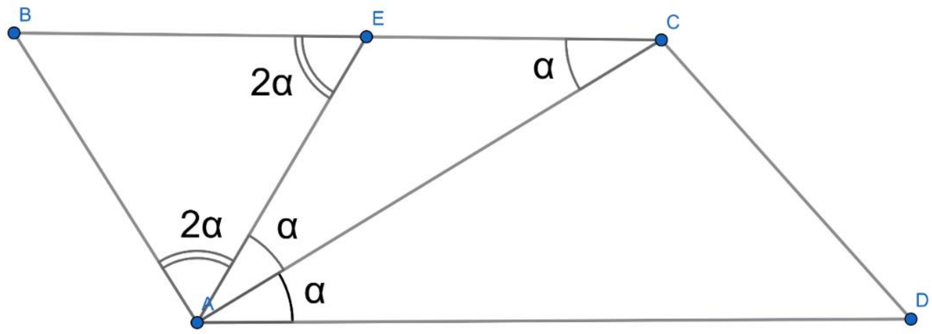
Критерии оценивания

Критерий	Балл
Полное обоснованное решение	15
Разложена на множители правая часть; рассмотрены оба случая, но при выписывании вида решений допущена арифметическая ошибка.	10
Рассмотрен только случай $x=4$ или сокращена скобка $(x-4)$, но исследована оставшаяся часть уравнения.	5
Отдельные пары $(x;y)$ найдены подбором.	2
Неверные рассуждения или записан только ответ.	0

Задача 3.

Стороны параллелограмма относятся как $1:2$, диагональ делит его угол в отношении $1:3$, площадь параллелограмма $10\sqrt{3}$. Найдите его меньшую высоту.

Решение:



Пусть $\angle CAD = \alpha$, тогда $\angle CAB = 3\alpha$, $\angle ABC = 180^\circ - 4\alpha$. Треугольник ABE - равнобедренный, тогда $\angle BAE = \angle BEA = 2\alpha$, следовательно $\angle CAE = \alpha$, треугольник ABE - равносторонний, $2\alpha = 60^\circ$, $4\alpha = 120^\circ$,

$S = x \cdot 2x \cdot \sin 120^\circ = 10\sqrt{3}.$ Тогда $x = \sqrt{10}$, $S = x \cdot h = 10\sqrt{3}$, $h = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Полное обоснованное решение	15
Верно найдены углы параллелограмма, но допущена вычислительная ошибка в дальнейших вычислениях	10
Есть дополнительное построение, облегчающее поиск углов; использованы свойства углов параллелограмма -накрест лежащие, сумма смежных углов; замечен ромб или равносторонний треугольник.	6
Имеются некоторые продвижения: есть дополнительное построение, облегчающее поиск углов; или использованы свойства углов параллелограмма -накрест лежащие, сумма смежных углов; или замечен ромб или равносторонний треугольник.	2
Неверные рассуждения или записан только ответ.	0

Задача 4.

При каких значениях параметра a уравнение

$$\left|\frac{x^3+(x-2)^2-(x^2-2)x-12}{\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}-x}\right|=a^2+2$$

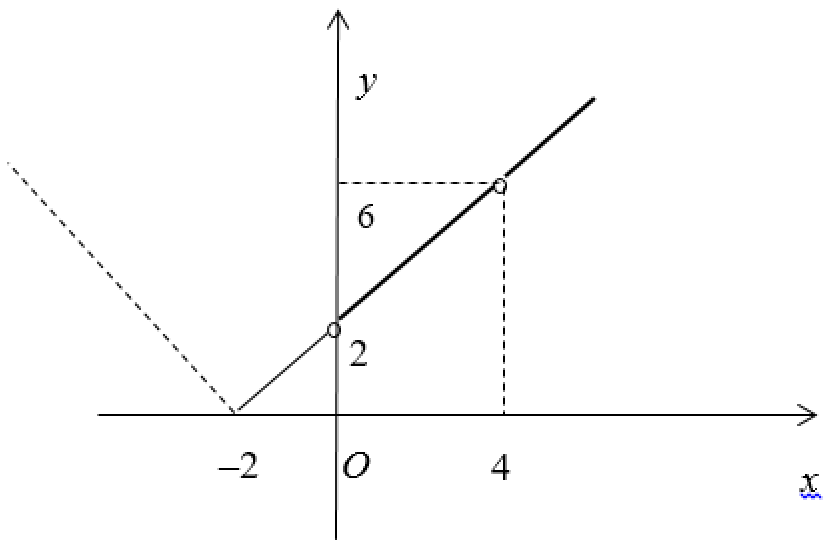
имеет единственное положительное решение?

Решение:

Преобразуем левую часть уравнения

$$\left|\frac{x^3+x^2-4x+4-x^3+2x-12}{4-x}\right|=\left|\frac{x^2-2x-8}{x-4}\right|=\left|\frac{(x+2)(x-4)}{x-4}\right|,$$

Тогда уравнение примет вид $|x+2|=a^2+2$, где $x\neq 4$. На плоскости xOy построим графики: $y=-x+2$, где $x<-1$ и $y=x+2$, где $x\geq -1$ (причем точка $x=4$, $y=6$ «выколота»). Единственное положительное решение при $a^2+2>2$, причем $a^2+2\neq 6$, при других значениях параметра нет положительных решений. Получаем, что $a\neq 0$, $a^2\neq 4$.



Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Полное, обоснованное решение	15
Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка в конце решения.	12
Ход решения верный, но добавлено $a = 0$ или $a = 2$, $a = -2$	10
Преобразована дробь, верный переход к равносильной системе, возможно, нет условия $x \neq 4$, дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.	5
Решение не соответствует перечисленным выше критериям	0

Задача 5.

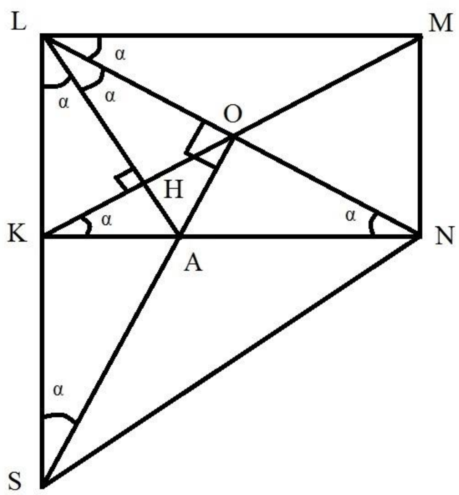
В прямоугольнике $KLMN$ диагонали пересекаются в точке O. Точка A, лежащая на стороне KN, равноудалена от точек L и N. Прямая LA перпендикулярна прямой KM, а прямая OA пересекает прямую LK в точке S.

Найти:

1) в каком отношении точка A делит отрезок KN;

2) $SL:LA$.

Решение:



1. ΔLAN равнобедренный

$\Rightarrow \angle ALN = \angle LNA = \alpha$

2. $\angle ANL = \angle NLM = \alpha$ (накрест лежащие при параллельных прямых).

3. ΔNOK равнобедренный (диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам)

$\Rightarrow \angle LNK = \angle OKA = \alpha$

4. $\Delta HKA \sim \Delta LKA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HKA = \angle ALK = \alpha$

5. $3\alpha = 90^0 \Rightarrow \alpha = 30^0$

6. LH – биссектриса и высота $\Rightarrow$ медиана треугольника KLO $\Rightarrow KH = \frac{1}{3} HM$

7. $\Delta KHA \sim \Delta LHM \Rightarrow KH:HM = KA:LM = KA:KN = 1:3 \Rightarrow KA:AN = 1:2$

8. ΔLAS равнобедренный, $\angle SLA = \angle LSA = \alpha = 30^0 \Rightarrow SL:LA = \sqrt{3}:1$

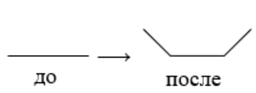
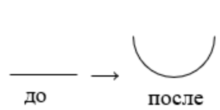
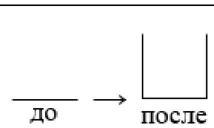
Ответ: 1) $1:2$ 2) $\sqrt{3}:1$

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Решение верно.	20
Решен верно, пункт 1 или пункт 2	15
Верно найден угол α	12
Верное начало решения, получены некоторые промежуточные результаты	5
Решение неверно или отсутствует	0

Задача 6.

Металлический завод выпускает три типа открытых желобов с **максимально** возможной площадью поперечного сечения при данной ширине листа. Характеристики желобов приведены в таблице:

	Трапециевидный*	**Полукруглый**	**Квадратный**
Ширина листа	6 м	$6\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ м	$6\sqrt[4]{3}$ м
Стоимость, у.е.**	5	7	4
Рисунок			

* равнобокая трапеция с углом 120°

**стоимость единицы товара

Требуется изготовить желобы так, чтобы суммарная площадь поперечного сечения составила $100\sqrt{3}$ м², при этом должны выполняться ограничения:

- трапециевидных — не менее 4;
- полукруглых — не менее 1;

- квадратных — не более 10.

Определить минимальную стоимость изготовления всех желобов.

Решение:

1. Максимальные площади поперечных сечений

Трапециевидный желоб:

Пусть c — длина боковой стороны. Тогда нижнее основание:

$$b = 6 - 2c$$

Верхнее основание:

$$a = b + 2c\cos 60^\circ = (6 - 2c) + 2c \cdot \frac{1}{2} = 6 - 2c + c = 6 - c$$

Высота трапеции:

$$h = c\sin 60^\circ = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Площадь трапеции:

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h = \frac{12 - 3c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} c = \frac{3\sqrt{3}}{4} c(4 - c)$$

Функция $S(c)$ — квадратичная, максимум достигается при $c = 2$ (для нахождения минимума также можно воспользоваться методом выделения полного квадрата). Следовательно,

$$S_1 = 3\sqrt{3}$$

Полукруглый желоб:

Длина полуокружности равна ширине листа:

$$\pi R = 6\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

Площадь полуокружности:

$$S_2 = \frac{\pi R^2}{2} = 6\sqrt{3}$$

Квадратный желоб:

Ширина листа образует три стороны квадрата, поэтому:

$3a = 6\sqrt[4]{3}, a = 2\sqrt[4]{3}$Площадь квадрата:

$$S_3 = a^2 = 4\sqrt{3}$$

2. Условие на суммарную площадь

Пусть:

- x — количество трапециевидных желобов,
- y — количество полукруглых желобов,
- z — количество квадратных желобов.

По условию:

$$3\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}y + 4\sqrt{3}z = 100\sqrt{3}$$

Делим на $\sqrt{3}$:

$$3x + 6y + 4z = 100$$

Откуда:

$$z = \frac{100 - 3x - 6y}{4}$$

3. Ограничения

По условию задачи:

$$x \geq 4, y \geq 1, z \leq 10, z \geq 0$$

Из условия $z \leq 10$:

$$\frac{100 - 3x - 6y}{4} \leq 10 \Rightarrow 100 - 3x - 6y \leq 40 \Rightarrow -3x - 6y \leq -60 \Rightarrow \quad x + 2y \geq 20$$

4. Функция стоимости

Общая стоимость изготовления:

$$C = 5x + 7y + 4z$$

Подставляя выражение для z получаем:

$$C = 100 + 2x + y$$

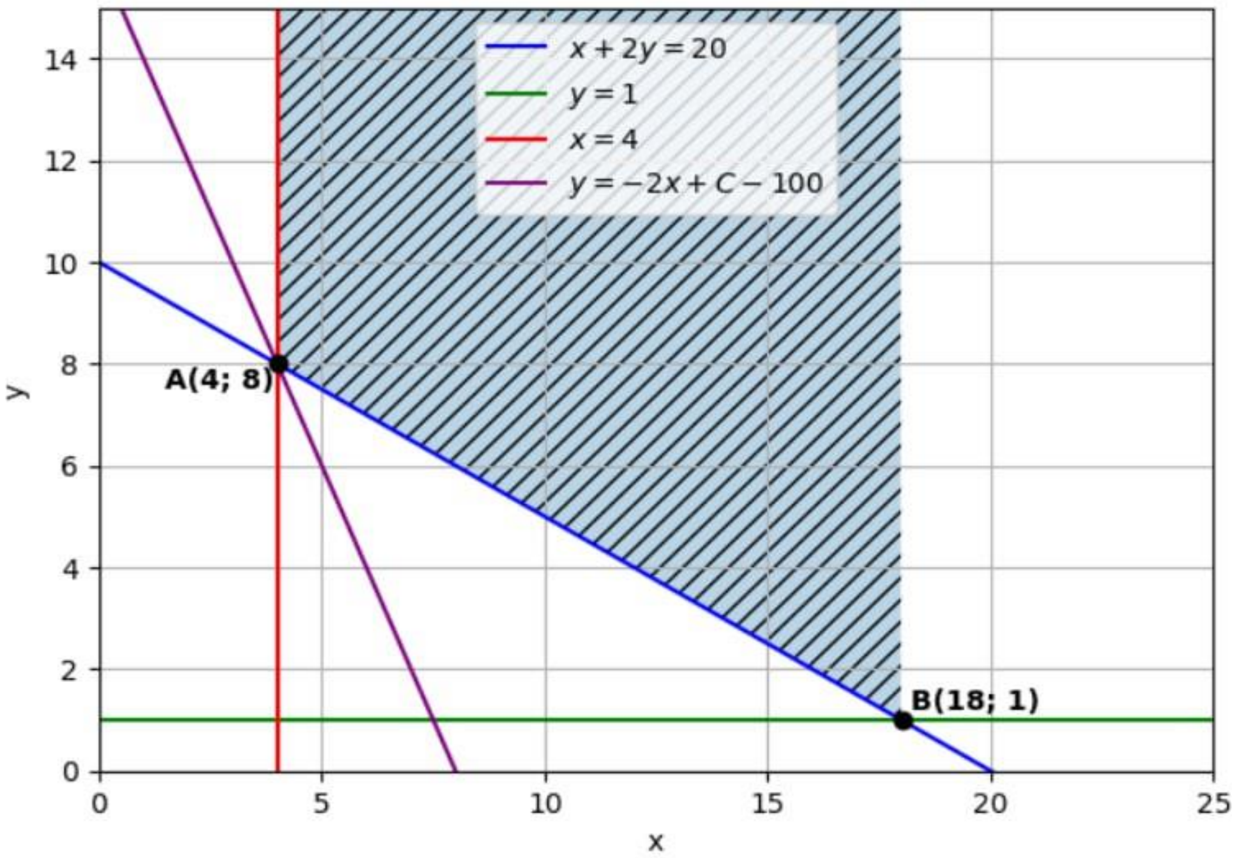
При условиях:

$$x \geq 4, y \geq 1, x + 2y \geq 20$$

5. Нахождение минимума

Минимальная стоимость соответствует такому положению прямой $y = -2x + C - 100$, при котором её свободный член $C - 100$ минимален, но прямая всё ещё имеет общие точки с допустимой областью.

Это происходит, когда прямая проходит через точку пересечения $x = 4$ и $x + 2y = 20$, то есть через точку $A(4; 8)$.



То есть при $x = 4, y = 8$

Находим z:

$$z = \frac{100 - 3 \cdot 4 - 6 \cdot 8}{4} = \frac{100 - 12 - 48}{4} = \frac{40}{4} = 10 > 0$$

Стоимость:

$$C = 100 + 2 \cdot 4 + 8 = 100 + 8 + 8 = 116$$

Ответ: Минимальная стоимость изготовления желобов равна **116 у.е.** Она достигается при изготовлении:

- 4 трапециевидных желоба,
- 8 полукруглых желобов,
- 10 квадратных желобов.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Решение верно.	20
Найдена функция стоимости	18
Правильно подсчитана суммарная площадь желобов и верно наложено ограничение на каждую переменную	15
Правильно подсчитана суммарная площадь желобов	10
Правильно подсчитана площадь желоба в форме трапеции	5
Правильно подсчитаны площади желобов в форме квадрата и полукруга	2
Решение неверно или отсутствует	0