Профиль олимпиады: «Математика»

Класс участия: 8 **Вариант задания: 1**

Задача 1.

В понедельник София и Арсений съели вместе 0,5кг малины за 9 минут. Во вторник Рома и Арсений съели вместе такое же количество ягод за 12 минут, а София и Рома вдвоем в среду – за 18 минут. За какое время они втроем съедят 1 кг малины?

Решение: София и Арсений вдвоем съедают за 36 минут 2кг, Рома и Арсений вдвоем за 36 минут 1,5 кг, София и Рома вдвоем за 36 минут 1 кг. Поэтому совместно за 36 минут 4,5 кг, но каждый «учтен» 2 раза, значит, втроем за 36 мин 4,5/2 кг. Получим, что 1кг втроем за 16 минут.

Ответ: 16 минут.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Полное обоснованное решение	15
Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.	12
При верном ходе решения решена большая часть задачи, продолжения нет или оно неверное.	10
Составлены уравнения или другое верное начало решения.	5
Неверные рассуждения или записан только ответ.	0

Задача 2.

Найдите все целые решения уравнения $(y-2)(3x-12)=5x^2-21x+4$.

Решение: Разложим на множители правую часть уравнения

$(y-2)(3x-12)=(5x-1)(x-4)$, тогда

1) если $x=4$, то y - любое целое число.

2) если $x \neq 4$, тогда $y-2=\frac{5x-1}{3}=\frac{6x-3-x+2}{3}=2x-1-\frac{x-2}{3}$,

следовательно, $\frac{x-2}{3}=t$, где t - целое число. Тогда $x=3t+2$, $y=5t+5$, где t - любое целое число.

Ответ: $(4;t)$, $(3t+2;5t+5)$, где t - любое целое число.

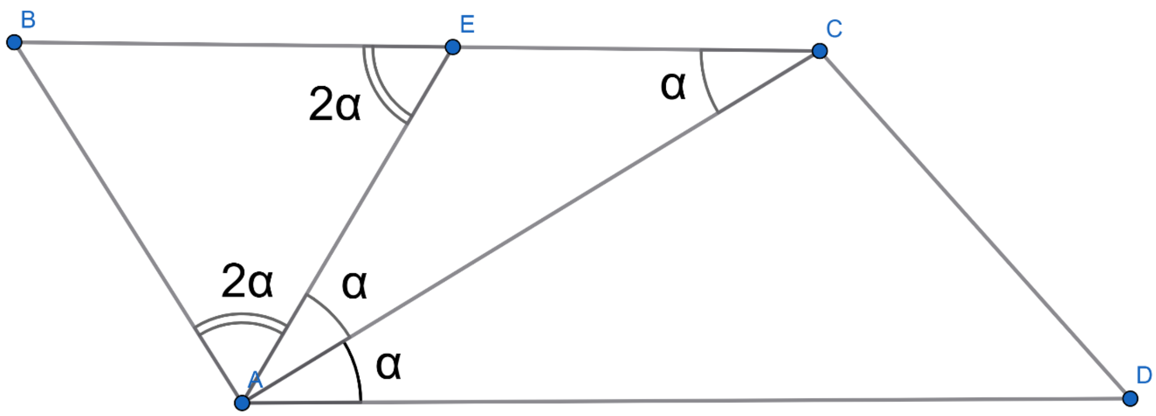
Критерии оценивания

Критерий	Балл
Полное обоснованное решение	15
Разложена на множители правая часть; рассмотрены оба случая, но при выписывании вида решений допущена арифметическая ошибка.	10
Рассмотрен только случай $x=4$ или сокращена скобка $(x-4)$,но исследована оставшаяся часть уравнения.	5
Отдельные пары $(x;y)$ найдены подбором.	2
Неверные рассуждения или записан только ответ.	0

Задача 3.

Длины сторон параллелограмма 3 см и 6 см. Диагональ параллелограмма делит его угол в отношении $1:3$. Найдите площадь параллелограмма.

Решение:



Пусть $\angle CAD = \alpha$, тогда $\angle CAB = 3\alpha$, $\angle ABC = 180^\circ - 4\alpha$. Треугольник ABE - равнобедренный, тогда $\angle BAE = \angle BEA = 2\alpha$, следовательно $\angle CAE = \alpha$, треугольник ABE - равносторонний, $2\alpha = 60^\circ$, $4\alpha = 120^\circ$,

$$S = 3 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 9\sqrt{3}.$$

Ответ: $9\sqrt{3}$.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Полное обоснованное решение	15
Верно найдены углы параллелограмма, но допущена вычислительная ошибка в дальнейших вычислениях	10
Есть дополнительное построение, облегчающее поиск углов; использованы свойства углов параллелограмма -накрест лежащие, сумма смежных углов; замечен ромб или равносторонний треугольник.	6
Имеются некоторые продвижения: есть дополнительное построение, облегчающее поиск углов; или использованы свойства углов параллелограмма -накрест лежащие, сумма смежных углов; или замечен ромб или равносторонний треугольник.	2
Неверные рассуждения или записан только ответ.	0

Задача 4.

При каких значениях параметра a уравнение

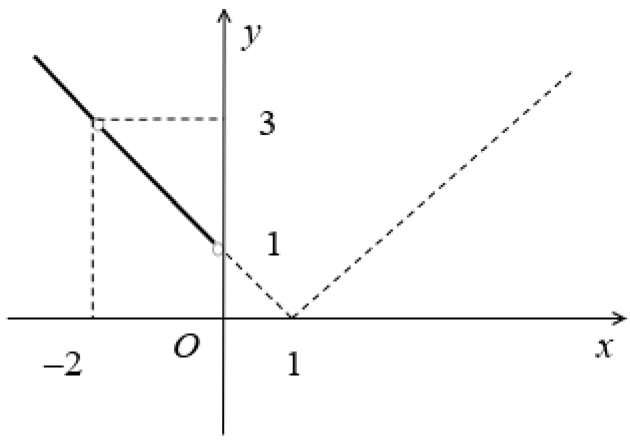
$\left|\dfrac{x\left(x^2-3\right)+\left(x+2\right)^2-\left(x^3+6\right)}{x+\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}-1}\right|=a^2+1$ имеет единственное отрицательное

решение?

Решение: Преобразуем левую часть уравнения

$$\left|\frac{x^3-3x+x^2+4x+4-x^3-6}{x+3-1}\right|=\left|\frac{x^2+x-2}{x+2}\right|=\left|\frac{\left(x+2\right)\left(x-1\right)}{x+2}\right|,$$

Тогда уравнение примет вид $\left|x-1\right|=a^2+1,$ где $x\neq-2$. На плоскости xOy построим графики $y=-x+1$, при $x<1$ и $y=x-1$, при $x\geq1$ (причем точка $x=-2$, $y=3$ «выколота»). Единственное отрицательное решение при $a^2+1>1,$ причем $a^2+1\neq3$, при других значениях параметра нет отрицательных решений. Получаем, что $a\neq0$, $a^2\neq2$.



Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Полное, обоснованное решение	15
Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка в конце решения.	12
Ход решения верный, но добавлено $a=0$ или $a=\sqrt{2}$, $a=-\sqrt{2}$	10
Преобразована дробь, верный переход к равносильной системе, возможно, нет условия $x\neq-2$, дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.	5
Решение не соответствует перечисленным выше критериям	0

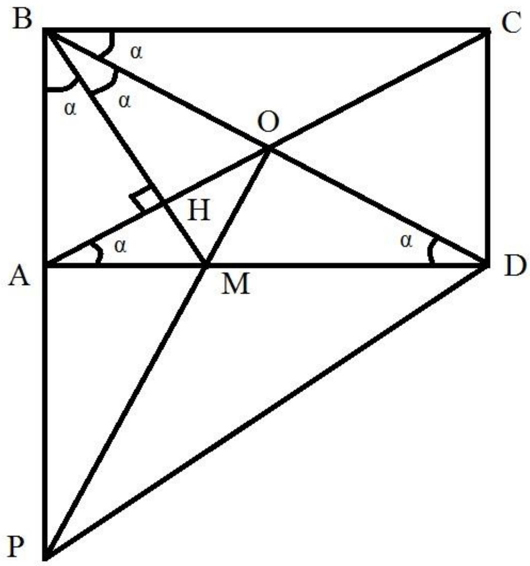
Задача 5.

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ равна 3,2. Из точки B перпендикулярно AC проведена прямая, пересекающая ее в точке H, а сторону AD в точке M, равноудаленной от точек B и D. Прямая проходящая через середину AC и точку M пересекает прямую AB в точке P.

Найти длины отрезков:

1) AH; 2) PD.

Решение:



1. $BD \cap AC = O$

2. ΔBMD равнобедренный

$\Rightarrow \angle MBD = \angle MDB = \alpha$

3. $\angle MDB = \angle DBC = \alpha$ (накрест лежащие при параллельных прямых).

4. ΔAOD равнобедренный (диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам)

$\Rightarrow \angle BDM = \angle HAM = \alpha$

5. $\Delta AHM \sim \Delta BAM \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HAM = \angle MBA = \alpha$

6. $3\alpha = 90^0 \Rightarrow \alpha = 30^0$ 7. ВН – биссектриса и высота $\Rightarrow$медиана

$\Delta ABO \Rightarrow AH = \dfrac{1}{4}AC = 0{,}8$

8.OM – серединный перпендикуляр к BD; $P \in OM \Rightarrow P$ равноудалена от точек B и D $\Rightarrow \Delta BPD$ равнобедренный с углом 60^0 $\Rightarrow$ равносторонний $\Rightarrow PD = BD = AC = 3{,}2$.

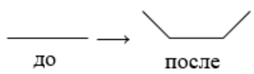
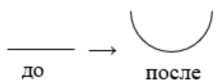
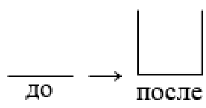
Ответ: 1) 0,8; 2) 3,2.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Решение верно.	20
Решен верно, пункт 1 или пункт 2	15
Верно найден угол α	12
Верное начало решения, получены некоторые промежуточные результаты	5
Решение неверно или отсутствует	0

Задача 6.

Металлический завод выпускает три типа открытых желобов с **максимально** возможной площадью поперечного сечения при данной ширине листа. Характеристики желобов приведены в таблице:

	Трапециевидный*	**Полукруглый**	**Квадратный**
Ширина листа	6 м	$\sqrt{3\pi\sqrt{3}}$ м	$9\sqrt[4]{3}$ м
Стоимость, у.е.**	3	2	6
Рисунок			

* равнобокая трапеция с углом 120°

**стоимость единицы товара

Требуется изготовить желобы так, чтобы суммарная площадь поперечного сечения составила 150 $\sqrt{3}$ м², при этом должны выполняться ограничения:

- трапециевидных — не менее 1;

- полукруглых — не менее 2;
- квадратных — не более 12.

Определить минимальную стоимость изготовления всех желобов.

Решение:

1. Максимальные площади поперечных сечений

Трапециевидный желоб:

Пусть c — длина боковой стороны. Тогда нижнее основание:

$$b = 6 - 2c$$

Верхнее основание:

$$a = b + 2c\cos 60^\circ = (6 - 2c) + 2c \cdot \frac{1}{2} = 6 - 2c + c = 6 - c$$

Высота трапеции:

$$h = c\sin 60^\circ = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Площадь трапеции:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12 - 3c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} c = \frac{3\sqrt{3}}{4} c(4 - c)$$

Функция $S(c)$ — квадратичная, максимум достигается при $c = 2$ (для нахождения минимума также можно воспользоваться методом выделения полного квадрата). Следовательно,

$$S_1 = 3\sqrt{3}$$

Полукруглый желоб:

Длина полуокружности равна ширине листа:

$$\pi R = \sqrt{3\pi\sqrt{3}}$$

Площадь полуокружности:

$$S_2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Квадратный желоб:

Ширина листа образует три стороны квадрата:

$$3a = 9\sqrt[4]{3}, a = 3\sqrt[4]{3}$$

Площадь квадрата:

$S_3 = a^2 = 9\sqrt{3}$

2. Условие на суммарную площадь

Пусть:

- x — количество трапециевидных желобов,
- y — количество полукруглых желобов,
- z — количество квадратных желобов.

По условию:

$$3\sqrt{3} \cdot x + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot y + 9\sqrt{3} \cdot z = 150\sqrt{3}$$

После преобразований получим:

$$2x + y + 6z = 100$$

Откуда:

$$z = \frac{100 - 2x - y}{6}$$

3. Ограничения

По условию задачи:

$$x \geq 1, y \geq 2, z \leq 12, z \geq 0$$

Из условия $z \leq 12$:

$$\frac{100 - 2x - y}{6} \leq 12 \Rightarrow 100 - 2x - y \leq 72 \Rightarrow 2x + y \geq 28$$

4. Функция стоимости

Общая стоимость изготовления:

$$C = 3x + 2y + 6z$$

Подставляем выражение для z:

$$C = 3x + 2y + 6 \cdot \frac{100 - 2x - y}{6} = 3x + 2y + 100 - 2x - y = 100 + x + y$$

Таким образом:

$$C = 100 + x + y$$

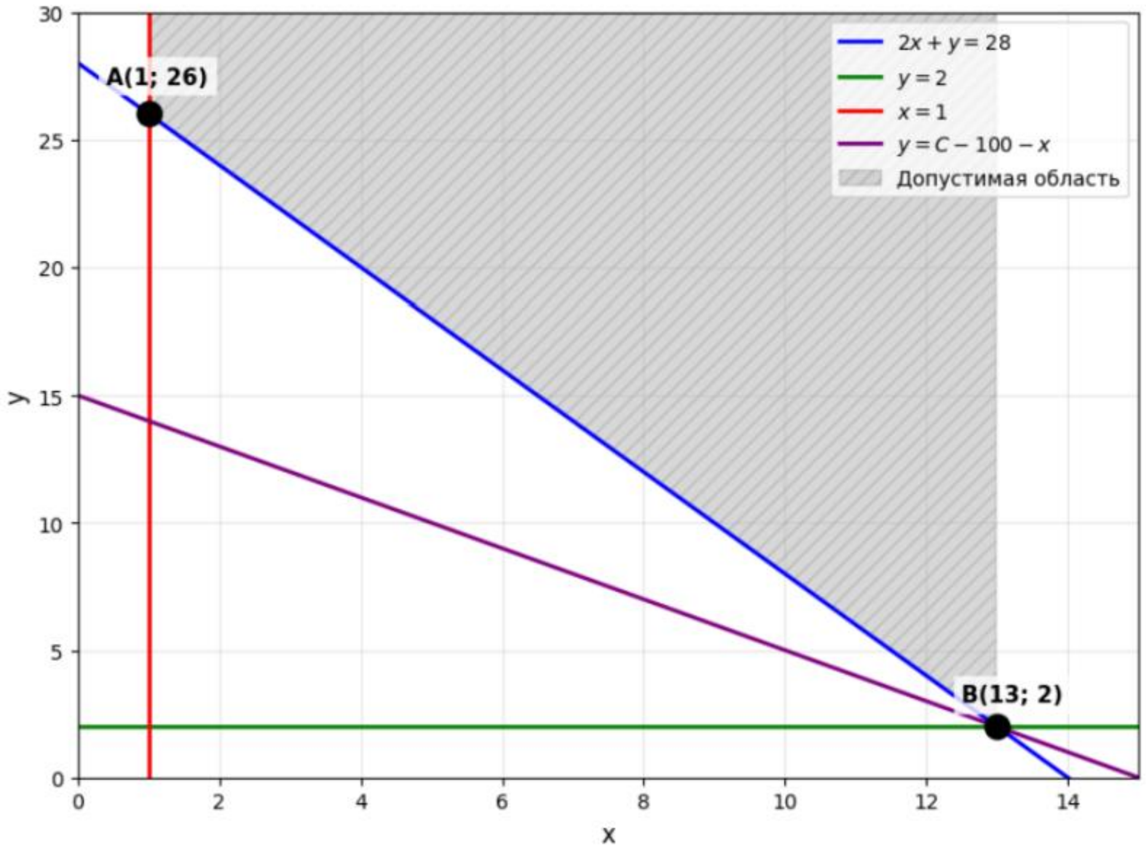
при условиях:

$$x \geq 1, y \geq 2, y + 2x \geq 28$$

5. Нахождение минимума

Минимальная стоимость соответствует такому положению прямой $y = -x + C - 100$, при котором её свободный член $C - 100$ минимален, но прямая всё ещё имеет общие точки с допустимой областью.

Это происходит, когда прямая проходит через точку пересечения $y = 2$ и $2x + y = 28$, то есть через точку $B(13; 2)$.



То есть при $x = 13, y = 2$

Находим z:

$$z = \frac{100 - 2 \cdot 13 - 2}{6} = 12 > 0$$

Стоимость:

$$C = 100 + 13 + 2 = 115$$

Ответ: Минимальная стоимость изготовления желобов равна **115 у.е.** Она достигается при изготовлении:

- 13 трапециевидных желобов,
- 2 полукруглых желоба,
- 12 квадратных желобов.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Решение верно.	20
Найдена функция стоимости	18
Правильно подсчитана суммарная площадь желобов и верно наложено ограничение на каждую переменную	15
Правильно подсчитана суммарная площадь желобов	10
Правильно подсчитана площадь желоба в форме трапеции	5
Правильно подсчитаны площади желобов в форме квадрата и полукруга	2
Решение неверно или отсутствует	0