



## Отборочный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

### Профиль: «Математика»

Класс участия: 11

Вариант задания: 2

#### Задача 1.

Группу школьников, направлявшихся в школьный лагерь, планировалось рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако, оказалось, что при этом не удалось посадить трех школьников. Когда же один автобус уехал пустым, то в оставшиеся автобусы все школьники сели поровну. Сколько школьников было в группе, если известно, что для перевозки школьников было выделено не более 18 автобусов, и в каждый автобус помещается не более 36 человек. Ответ дайте в виде числа без указания размерности.

#### Решение.

Пусть  $n$  – количество автобусов,  $m$  – количество школьников в каждом автобусе,  $S$  – общее число школьников. Имеем  $S = 22n + 3$ ,  $S = (n - 1)m$ ,  $n \leq 10$ ,  $m \leq 36$ ,

$22n + 3 = (n - 1)m$ ,  $n = 1 + \frac{25}{m - 22}$ . Учитывая ограничения на  $n$  и  $m$ , получаем

единственно возможный случай:  $m = 27$ ,  $n = 6$ ,  $S = 135$ .

**Ответ:** 135

#### Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	5



## Задача 2.

Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{7x} + 17\sqrt{y} = z\sqrt{2023}, \text{ если } z \leq 10?$$

**Решение:**

$$\sqrt{7x} + 17\sqrt{y} = z\sqrt{7 \cdot 17 \cdot 27} \Rightarrow \frac{\sqrt{7x} + 17\sqrt{22y}}{17\sqrt{7}} = z \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{289}} + \sqrt{\frac{y}{7}} = z$$

Если  $a$ ,  $b$  и  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  – рациональные числа, то  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{b}$  тоже рациональные числа. Действительно,  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ , и  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  – рациональное число,  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{b}$  – полусумма и полуразность рациональных чисел  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  и  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ . Поэтому  $x$  должно делиться нацело на 289, а  $y$  – на 7, т.е.  $x = 289n$ ,  $y = 7m$ , и приходим к уравнению в целых числах  $\sqrt{n} + \sqrt{m} = z$ .

1)  $z = 0$ , одно решение  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;

2)  $z = 1$ , два решения:  $x = 0$ ,  $y = 7$ ;  $x = 289$ ,  $y = 0$ ;

3)  $z = 2$ , три решения:  $x = 0$ ,  $y = 28$ ;  $x = 289$ ,  $y = 7$ ;  $x = 1156$ ,  $y = 0$ ;

4)  $z = 3$ , четыре решения:  $x = 0$ ,  $y = 63$ ;  $x = 289$ ,  $y = 28$ ;  $x = 1156$ ,  $y =$

7;

$x = 2601$ ,  $y = 0$ ;

5)  $z = 4$ , пять решений:  $x = 0$ ,  $y = 112$ ;  $x = 289$ ,  $y = 63$ ;  $x = 1156$ ,  $y =$

28;

$x = 2601$ ,  $y = 7$ ;  $x = 4624$ ,  $y = 0$ ;

6)  $z = 5$ , шесть решений:  $x = 0$ ,  $y = 175$ ;  $x = 289$ ,  $y = 112$ ;  $x = 1156$ ,  $y =$

63;

$x = 2601$ ,  $y = 28$ ;  $x = 4624$ ,  $y = 7$ ;  $x = 7225$ ,  $y = 0$ ;

7)  $z = 6$ , семь решений:  $x = 0$ ,  $y = 252$ ;  $x = 289$ ,  $y = 175$ ;  $x = 1156$ ,  $y =$

112;

$x = 2601$ ,  $y = 63$ ;  $x = 4624$ ,  $y = 28$ ;  $x = 7225$ ,  $y = 7$ ;  $x = 10404$ ,  $y = 0$ ;

8)  $z = 7$ , восемь решений:  $x = 0$ ,  $y = 343$ ;  $x = 289$ ,  $y = 252$ ;  $x =$



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

$1156, y = 175; x = 2601, y = 112; x = 4624, y = 63; x = 7225, y = 28; x = 10404, y = 7; x = 14161, y = 0;$

9)  $z = 8$ , девять решений:  $x = 0, y = 448; x = 289, y = 343; x = 1156, y = 252; x = 2601, y = 175; x = 4624, y = 112; x = 7225, y = 63; x = 10404, y = 28; x = 14161, y = 7; x = 18496, y = 0;$

10)  $z = 9$ , десять решений:  $x = 0, y = 567; x = 289, y = 448; x = 1156, y = 343; x = 2601, y = 252; x = 4624, y = 175; x = 7225, y = 112; x = 10404, y = 63;$

$x = 14161, y = 28; x = 18496, y = 7; x = 23409, y = 0;$

11)  $z = 9$ , одиннадцать решений:  $x = 0, y = 700; x = 289, y = 567; x = 1156, y = 448; x = 2601, y = 343; x = 4624, y = 252; x = 7225, y = 175; x = 10404, y = 112; x = 14161, y = 63; x = 18496, y = 28; x = 23409, y = 7; x = 28900, y = 0.$

$$S = \frac{1 + 11}{2} \cdot 11 = 66.$$

**Ответ: 66**

***Критерии оценивания***

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	5



### Задача 3.

Найдите наибольшее целое число  $a$ , при котором выражение

$$a^2 - 15a - (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 2)(\operatorname{tg} x + 5)(\operatorname{tg} x + 8)$$

меньше 35 при любом значении  $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ .

**Решение:** Сделаем замену  $t = \operatorname{tg} x$ . Выясним, для каких  $a$  неравенство

$$a^2 - 15a - (t - 1)(t + 2)(t + 5)(t + 8) < 35 \text{ выполняется при любом действительном } t.$$

$$\text{Имеем } (t - 1)(t + 8)(t + 2)(t + 5) > a^2 - 15a - 35,$$

$$(t^2 + 7t - 8)(t^2 + 7t + 10) > a^2 - 15a - 35, \quad z = t^2 + 7t + 1, \quad (z - 9)(z + 9) > a^2 - 15a - 35,$$

$$z^2 > a^2 - 15a + 46, \quad 0 > a^2 - 15a + 46, \quad \sqrt{D} = \sqrt{41},$$

$$(15 - \sqrt{41})/2 < a < (15 + \sqrt{41})/2, \Rightarrow a = 10.$$

**Ответ:** 10

### Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	6



#### Задача 4.

Имеются по два одинаковых треугольных стекла 9 цветов со всеми сторонами по 50 см. Сколькими способами можно вставить 4 стекла в треугольную раму со сторонами по 1 м так, чтобы стёкла, имеющие общую сторону, различались цветом?

#### Решение.

Цвет центрального стекла можно выбрать 9 способами. Каждое из трех угловых стекол (соседних с центральным, но не граничащих друг с другом) можно выбрать 8 способами. Итого  $9 \cdot 8^3 = 4608$  способов. Но нужно исключить  $9 \cdot 8 = 72$  случая, когда все три угловых стекла одного цвета.

**Ответ:** 4536

#### Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12



### Задача 5.

Последовательность задана рекуррентно:

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{(n^2+n+1)x_n+1}{n^2+n+1-x_n}. \quad \text{Найдите } x_{8453}.$$

### Решение.

*Решение.* Вычисляем  $x_1 = \frac{1}{1} = 1$ ,  $x_2 = \frac{4}{2} = 2$ ,  $x_3 = \frac{15}{5} = 3$ , появляется гипотеза:  $x_n = n$ .  
Проверим по индукции:

$$x_{n+1} = \frac{(n^2+n+1)n+1}{n^2+n+1-n} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^2+1} = n+1.$$

**Ответ:** 8453

### Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12



### Задача 6.

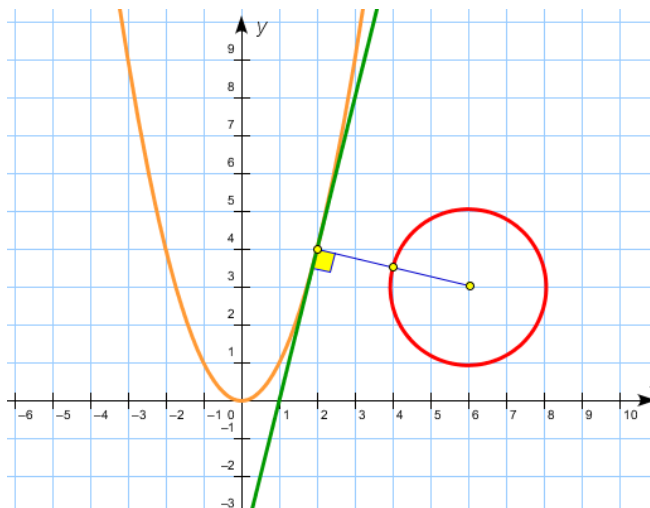
Какое наименьшее расстояние может быть между двумя точками, одна из которых лежит на графике функции  $y = x^2$ , другая — на кривой, заданной уравнением  $4x^2 + 4y^2 - 48x - 24y + 163 = 0$ . В ответ запишите квадрат найденного расстояния.

#### Решение.

Преобразуем уравнение второй кривой, выделив полные квадраты:  $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 17/4$ . Вторая кривая является окружностью с центром в точке  $(6; 3)$  и радиусом  $\sqrt{17}/2$ . Найдем наименьшее расстояние от центра этой окружности до точки, лежащей на параболе  $y = x^2$ . Квадрат расстояния от точки  $(6; 3)$  до точки  $(x; x^2)$  равен  $h(x) = (x - 6)^2 + (x^2 - 3)^2$ . Найдем производную функции  $h(x)$ :

$$h'(x) = 2(x - 6) + 4x(x^2 - 3) = 4x^3 - 10x - 12 = (x - 2)(4x^2 + 8x + 6) = 0,$$

В точке  $x = 2$  производная равна нулю и меняет знак с минуса на плюс, следовательно. Является точкой минимума функции  $h(x)$ ,  $h_{min} = 17$ .  
Наименьшее расстояние между точками на параболе и на окружности тогда будет равно  $\sqrt{17}/2$ , квадрат расстояния равен  $17/4$  или  $4,25$ .



**Ответ:** 4,25

#### Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12



### Задача 7.

Вписанная в треугольник  $ABC$  окружность радиуса 2 касается стороны  $AC$  в точке  $D$ , угол  $C$  этого треугольника равен  $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$ . На продолжениях сторон  $AC$  и  $BC$  за точку  $C$  взяты точки  $K$  и  $L$  соответственно. Длины отрезков  $AK$  и  $BL$  равны полупериметру треугольника  $ABC$ . На описанной около треугольника  $ABC$  окружности выбрана точка  $M$  так, что  $CM \parallel KL$ . Найдите синус угла  $CKL$ , если длина отрезка  $DM$  равна 4.

**Решение.** Докажем, что угол  $\angle OMC = 90^\circ$ . Построим окружность  $S$  с диаметром  $OC$ . Обозначим точку пересечения (отличную от  $C$ ) этой окружности с описанной около треугольника  $ABC$  через  $M_1$ . Обозначим точку пересечения (отличную от  $C$ ) окружности  $S$  с прямой, параллельной  $KL$ , через  $M_2$ .

Необходимо доказать, что  $M_1 = M_2$ .

Докажем подобие

треугольников  $ADM_1$  и  $BNM_1$ .

Согласно свойствам вписанных

углов, имеем  $\angle M_1AC = \angle M_1BC \Rightarrow \angle M_1AB = \angle M_1BN$ ;  $\angle M_1NC = \angle M_1DC \Rightarrow$

$\angle ADM_1 = \angle BNM_1$ . Следовательно,  $\triangle ADM_1 \sim \triangle BNM_1$  по двум углам. Тогда

$\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{AD}{BN}$ . Поскольку длины отрезков  $AK$  и  $BL$  равны полупериметру

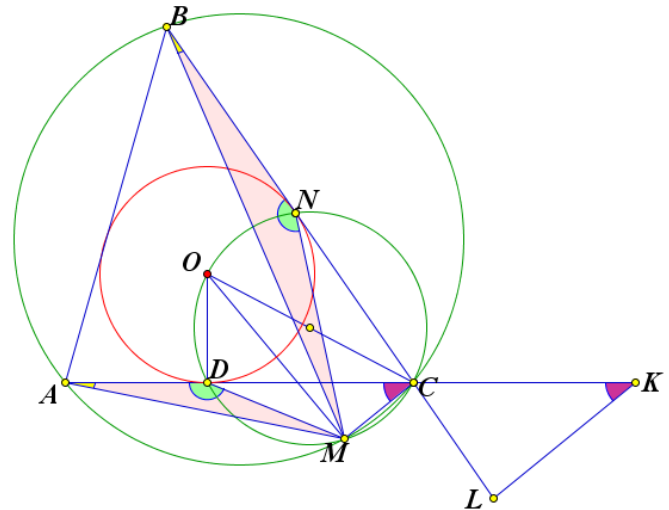
треугольника  $ABC$ , то  $AD = CL$ ,  $BN = CK$ . Получаем  $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{CL}{CK}$ . Обозначим

$\angle ACM_2 = \angle CKL = \alpha$ ,  $\angle KCL = \beta$ . Тогда  $\angle ACB = \beta$ ,  $\angle M_2CB = \alpha + \beta$ . Для

треугольников  $DM_2C$  и  $M_2NC$  применим теорему синусов:  $\frac{DM_2}{\sin \alpha} =$

$\frac{M_2C}{\sin \angle M_2DC}$ ;  $\frac{NM_2}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{M_2C}{\sin \angle M_2NC}$ . Поскольку  $\angle M_2DC = \angle M_2NC$ , то  $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ .

Поскольку  $\angle CLK = 180 - (\alpha + \beta)$ , то, применяя теорему синусов для





ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

треугольника  $CLK$ , имеем  $\frac{CL}{CK} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ . Таким образом,  $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{CL}{CK} = \frac{DM_1}{NM_1}$ . Точки  $D, N, M_1, M_2$  лежат на одной окружности, следовательно,  $M_1 = M_2$ .

Треугольник  $OMC$  прямоугольный, радиус описанной окружности равен  $CO/2$ . Эта же окружность описана около треугольника  $CDM$ .

$$OC = \frac{OD}{\sin \angle DCO} = \frac{2}{\sqrt{(1 - \cos \angle ACB)/2}} = 8.$$

Угол  $CKL$  равен углу  $DCM$ . Тогда  $\sin CKL = \frac{DM}{2R_{\text{оп}}} = \frac{DM}{OC} = 0,5$

**Ответ:** 0,5

**Критерии оценивания**

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16



### Задача 8.

При каком максимальном значении параметра  $a$  ( $a \neq 0$ ) уравнение

$$(\cos x + a)^7 - (\cos^7 x + a^7) = \frac{7}{2}a(\cos^2 x + a \cos x + a^2)^2$$
 имеет более двух корней на

интервале  $(0; 2\pi)$ ? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра.

В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на  $\pi$ .

### Решение.

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} (y+a)^7 - (y^7 + a^7) &= (y+a)(y^6 + 6y^5a + 15y^4a^2 + 20y^3a^3 + 15y^2a^4 + 6ya^5 + a^6 - \\ &\quad - y^6 + y^5a - y^4a^2 + y^3a^3 - y^2a^4 + ya^5 - a^6) = \\ &= (y+a)(7ay^5 + 14y^4a^2 + 21y^3a^3 + 14y^2a^4 + 7ya^5) = \\ &= 7ay(y+a)(y^4 + 2y^3a + 3y^2a^2 + 2ya^3 + a^4) = 7ay(y+a)(y^2 + ay + a^2)^2 \end{aligned}$$

Сделаем в исходном уравнении замену  $y = \cos x$ , тогда исходное

уравнение примет вид

$$7ay(y+a)(y^2 + ay + a^2)^2 = \frac{7}{2}a(y^2 + ay + a^2)^2 \quad \Rightarrow \quad y(y+a) = \frac{1}{2} \text{ или}$$

$2y^2 + 2ay - 1 = 0$ . Дискриминант уравнения  $D/4 = a^2 + 2 > 0$ , следовательно

уравнение всегда имеет два корня разных знаков  $y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2}}{2}$

Проверим выполнение неравенств:  $-1 \leq \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2}}{2} < 0 < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2}}{2} \leq 1$ :

$$\frac{-a - \sqrt{a^2 + 2}}{2} \geq -1 \Rightarrow 2 - a \geq \sqrt{a^2 + 2} \Rightarrow \begin{cases} 2 - a > 0 \\ a^2 - 4a + 4 \geq a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 2 \\ a \leq 1/2 \end{cases} \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 2}}{2} \leq 1 \Rightarrow 2 + a \geq \sqrt{a^2 + 2} \Rightarrow \begin{cases} 2 + a > 0 \\ a^2 + 4a + 4 \geq a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -2 \\ a \geq -1/2 \end{cases} \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2}$$

Следовательно, когда параметр  $a$  рассматривается на отрезке  $[-1/2, 1/2]$

уравнение относительно косинуса имеет 2 различных корня (разных знаков).

При этом на интервале  $(0; 2\pi)$  будет находиться 4 корня, если  $a \in (-1/2; 1/2)$



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

$$x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-a - \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right),$$

$$x = \arccos\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right),$$

$$x = \arccos\left(\frac{-a - \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right),$$

$$x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right)$$

При  $a = 1/2$  только три корня лежат в указанном интервале

$x = \pi$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3}$ . При значениях параметра больше  $1/2$  существует только

косинус, принимающий положительные значения, и исходное уравнение будет иметь не более двух корней. Значит, условию задачи удовлетворяет только  $a = 1/2$ . Сумма полученных корней  $3\pi$ .

**Ответ:** 3

**Критерии оценивания**

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16



### Задача 9.

Боковая грань правильной треугольной пирамиды  $SABC$  наклонена к плоскости основания  $ABC$  под углом  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ . Точки  $M, N, K$  являются серединами сторон основания  $ABC$ . Треугольник  $MNK$  является нижним основанием прямой призмы. Ребра верхнего основания призмы пересекают боковые ребра пирамиды  $SABC$ , соответственно, в точках  $F, P$  и  $R$ . Площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках  $M, N, K, F, P, R$  равна  $53\sqrt{3}$ . Найдите сторону треугольника  $ABC$ .

### Решение.

Высота пирамиды  $SO = h$ . Сторона

основания пирамиды  $AC = a$ .

Высота призмы  $3h/4$ , стороны

основания призмы равны  $a/2$ .

Площадь треугольника  $MNK$ :

$$S_{MNK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

Площадь треугольника  $FPR$ :

$$S_{FPR} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$$

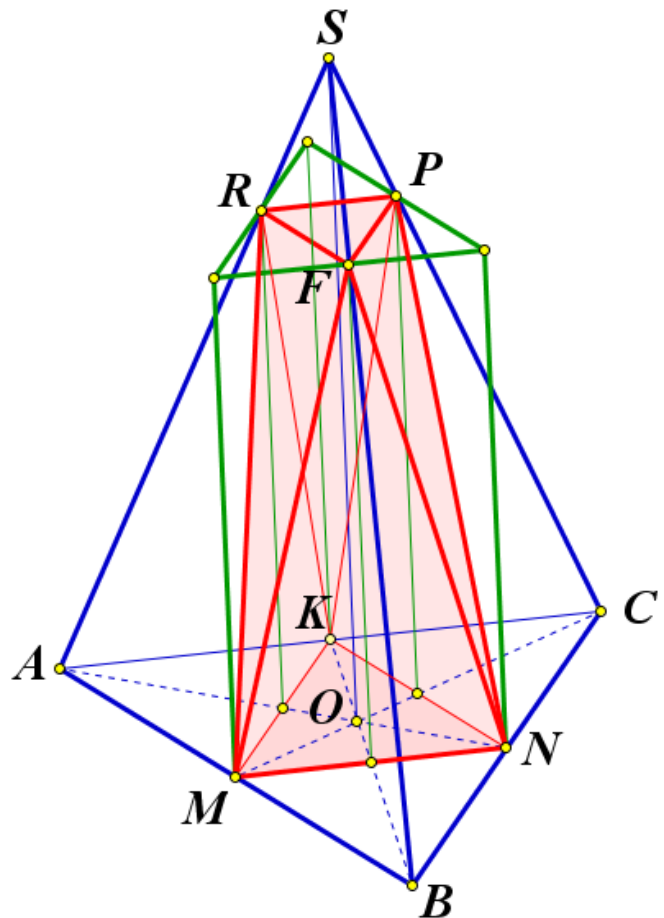
Площадь треугольника  $MPN$ :

$$S_{MPN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3h}{4}, \quad S_{MPN} = S_{NPK} = \\ = S_{KRM}.$$

Площадь треугольника  $FPM$ :

$$S_{FPM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{9h^2}{16} + \frac{3a^2}{64}}, \quad S_{FPM} =$$

$$S_{PRK} = S_{RFM}.$$





Поскольку радиус вписанной в треугольник  $ABC$  окружности равен  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ , а все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом  $\alpha = \arctg \frac{3}{4}$ , то

$$h = a\sqrt{3}/8.$$

По условию площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках  $M, N, K, F, P, R$  равна  $53\sqrt{3}$ , т. е.

$$\begin{aligned} S_{\text{мн}} &= S_{MNK} + S_{FPR} + 3S_{MPN} + 3S_{FPN} = \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9ah}{16} + \frac{3a}{8} \sqrt{\frac{9h^2}{16} + \frac{3a^2}{64}} = \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{128} + \frac{3a}{8} \sqrt{\frac{27a^2}{16 \cdot 64} + \frac{3a^2}{64}} = \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{128} + \frac{15a^2\sqrt{3}}{256} = \frac{53a^2\sqrt{3}}{16^2} = 53\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $a = 16$ .

**Ответ:** 16

### *Критерии оценивания*

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16