Отборочный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль: «Математика»

Класс участия: 11

Вариант задания: 1

Задача 1.

Пусть x, y, z - произвольные положительные числа, удовлетворяющие уравнению $x + y + z = 12$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $xy + xz + yz$.

Решение.

Решение. Используем неравенство $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

$$xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}\Big(2(xy + yz + zx) + \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2}\Big) =$$
$$= \frac{1}{3}\big(2(xy + yz + zx) + x^2 + y^2 + z^2\big) = \frac{(x + y + z)^2}{3} = 48.$$

Равенство достигается при $x = y = z = 4$.

Ответ: 48

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	5

Задача 2.

Уравнение $f(x)=0$, где $f(x)=x^2+px+q$, имеет ровно одно действительное решение, а уравнение $f(f(f(x)-2025)-2025))=0$ имеет ровно три различных действительных решения. Найдите решения уравнения $f(f(f(x)-2025)-2025))=0$. В ответ запишите сумму найденных решений.

Решение:

Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет единственное решение в случае, если квадратный трехчлен является полным квадратом, т.е. уравнение имеет вид $(x-a)^2=0$, и $f(x)=(x-a)^2$. Тогда $f(f(x)-2025)=\left((x-a)^2-2025-a\right)^2$,

$f(f(f(x)-2025)-2025)=\left(\left((x-a)^2-2025-a\right)^2-2025-a\right)^2$. Обозначим

$t=x-a$. Функция $g(t)=\left(\left(t^2-2025-a\right)^2-2025-a\right)^2$ является четной и имеет ровно три различных нуля. Тогда $t=0$ является нулем этой функции, и $\left(2025+a\right)^2-2025-a=0 \Rightarrow a=-2025, \quad a=-2024$. При $a=-2025$ уравнение $f(f(f(x)-2025)-2025))=0$ имеет одно решение. При $a=-2024$ уравнение имеет ровно три различных решения.

$$\left(\left((x+2024)^2-1\right)^2-1\right)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2024)^2=2 \text{ или } x=-2024 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1=-2024+\sqrt{2}, x_2=-2024-\sqrt{2}, x_3=-2024.$

Тогда $x_1+x_2+x_3=-2024+(-2024+\sqrt{2})+(-2024-\sqrt{2})=-6072.$

Ответ: -6072

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	5

Задача 3.

Какое наименьшее значение может принимать функция $f(x)=2\cos x+3\sin x$ при x, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{4\cos x}{2\cos(x/2)+3\cos(x/3)}+\frac{8\cos(x/2)}{\cos x+3\cos(x/3)}+\frac{12\cos(x/3)}{\cos x+2\cos(x/2)}\geq 3\sqrt{2\sin x+2\cos x},$$ и

$x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

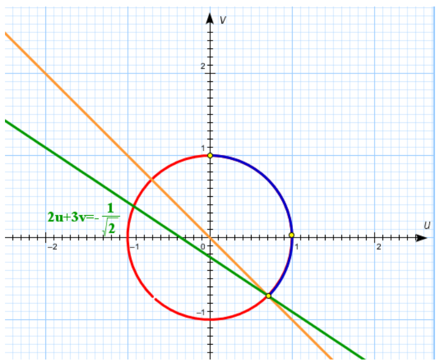
В ответ запишите квадрат найденного наименьшего значения.

Решение: Отметим, что при $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ значения $\cos x$, $\cos(x/2)$ и $\cos(x/3)$ положительны. Докажем, что для всех $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ верно неравенство

$\frac{4\cos x}{2\cos(x/2)+3\cos(x/3)}+\frac{8\cos(x/2)}{\cos x+3\cos(x/3)}+\frac{12\cos(x/3)}{\cos x+2\cos(x/2)}\geq 6.$ Обозначим $a=\cos x+2\cos(x/2)$, $b=\cos x+3\cos(x/3)$, $c=2\cos(x/2)+3\cos(x/3)$. Тогда левая часть неравенства будет иметь вид

$$2\left(\frac{a+b-c}{c}+\frac{a+c-b}{b}+\frac{b+c-a}{a}\right)=2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-3\right)$$
$$\geq 2(2+2+2-3)=6.$$

Здесь использовали неравенство для положительных чисел: $x+\frac{1}{x}\geq 2.$
Очевидно, $3\sqrt{2\sin x+2\cos x}\leq 3\sqrt{2+2}=6.$ Исходное неравенство справедливо для всех $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, для которых выполняется неравенство $\sin x+\cos x\geq 0,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, т.е. для $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, нужно найти наименьшее значение может функции $f(x)=2\cos x+3\sin x$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть



$u=\cos x,\quad v=\sin x.$ Тогда нужно определить наименьшее значение $a=2u+3v$ при условии, что $u^2+v^2=1, u\in(0;1], v\in[-1/\sqrt{2};1).$ Такое значение будет при $u=1/\sqrt{2}, v=-1/\sqrt{2}$, т.е. $a_{\min}=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad (a_{\min})^2=0,5.$

Ответ: 0,5

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	6

Задача 4.

На какое минимальное число натуральных слагаемых можно так разложить число 2025, чтобы, складывая некоторые из этих слагаемых, можно было получить любое число от 1 до 2025?

Решение.

Решение. Если k слагаемых, то любое из них можно взять или не взять, так что получится не более 2^k разных сумм, одна из них 0. Следовательно, 10 слагаемых не хватит, так как $2025 > 1023$. Если использовать десять слагаых 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, то получатся все числа от 1 до 1023. Одиннадцатым слагаемым будет 2025-1023 = 1002. Прибавляя его к числам от 22 до 1023, получим все числа от 1024 до 2025.

Ответ: 11

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12

Задача 5.

Пусть $Q(x) = x^2 + c$. При каких значениях параметра c уравнение $Q(Q(x)) = x$ имеет четыре различных решения?

Решение:

Решение. Рассмотрим параболы $y = x^2 + c$ и $x = y^2 + c$. Тогда решения нашего уравнения — абсциссы общих точек парабол; очевидно, все абсциссы различны.

При непрерывном изменении параметра c параболы движутся непрерывно. Число общих точек парабол может измениться лишь в тот момент, когда параболы касаются друг друга. Найдем значения c, при которых параболы касаются. Пусть α — угол наклона касательной.

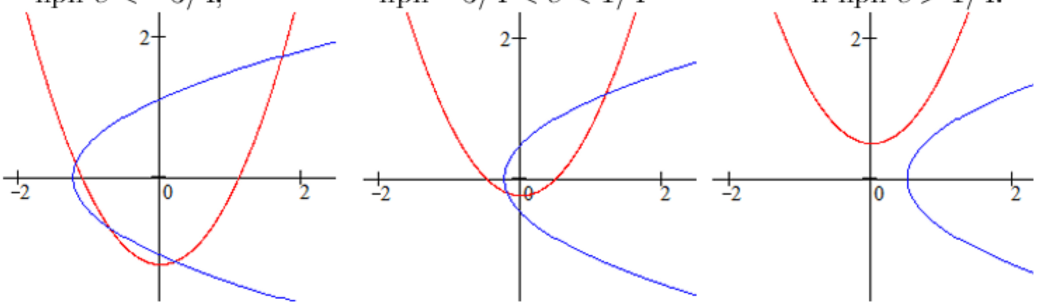
$$\begin{cases} y = x^2 + c \\ x = y^2 + c \\ \operatorname{tg}\alpha = 2x = (2y)^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{-1}/4 = x^2 + c \\ x = x^{-2}/16 + c \\ 4xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + cx - 1/4 = 0 \\ x^3 - cx^2 - 1/16 = 0 \end{cases} \Rightarrow cx^2 + cx - \frac{3}{16} = 0.$$

Последнему уравнению удовлетворяет также y, так что из теоремы Виета получаем две возможности: $y = x$ и $y = -1 - x$. Рассмотрим их по очереди.

$$\begin{cases} x = x^2 + c \\ 4x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1/2,\ c = 1/4 \\ x = -1/2,\ c = -3/4 \end{array} \right. ; \qquad \begin{cases} -1 - x = x^2 + c \\ 4x(-1 - x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3/4 \\ x = -1/2 \end{cases}$$

Остается выяснить методом интервалов, сколько общих точек будут иметь параболы

при $c < -3/4$, при $-3/4 < c < 1/4$ и при $c > 1/4$.



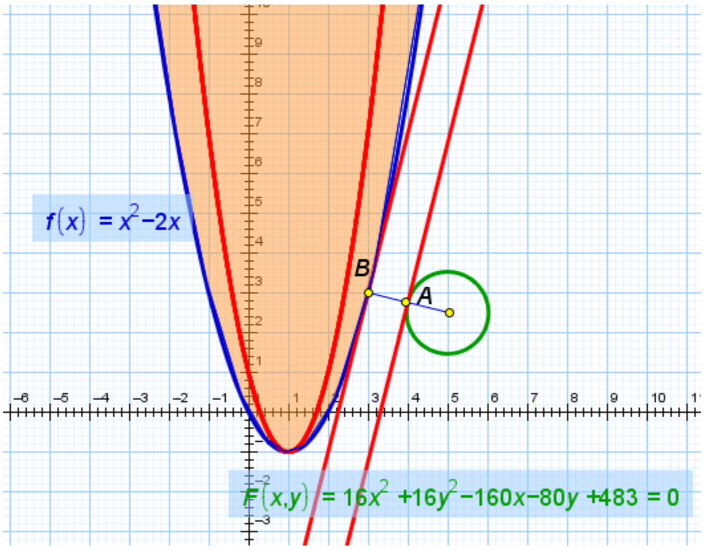
Ответ: $(-\infty;\ -0{,}75)$

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12

Задача 6.

Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если точка A принадлежит кривой $16x^2+16y^2-160x-80y+483=0$, а точка B – одному из графиков семейства функций $y=(k^2+2k+2)(x^2-2x)+k^2+2k+1, k\in\mathbb{R}$? В ответ запишите сумму квадрата найденной наименьшей длины и значения k, при котором эта длина достигается.



Решение. Имеем $y=(k^2+2k+2)(x-1)^2-1, k\in\mathbb{R}$. Это семейство парабол с фиксированной вершиной (1; -1) и ветвями, направленными вверх.

Минимальное значение коэффициент k^2+2k+2 принимает при $k=-1$, и это значение равно 1. Все параболы $y=(k^2+2k+2)(x^2-2x)+k^2+2k+1$, $k\in\mathbb{R}$, расположены в области $y\geq x^2-2x$. Минимальное расстояние от точки на окружности

$16x^2+16y^2-160x-80y+483=0$, или

$(x-5)^2+(y-2{,}5)^2=1{,}0625$, до параболы $y=x^2-2x$ равно разности расстояния d от центра (5; 2,5) этой окружности до указанной параболы и радиуса $r=\sqrt{17}/4$ этой окружности.

$$d^2=(x-5)^2+(x^2-2x-2{,}5)^2,\quad \left(d^2\right)'=2(x-5)+2(x^2-2x-2{,}5)\cdot 2(x-1),$$

$$x-5+(x^2-2x-2{,}5)(2x-2)=0,\quad 2x^3-6x^2=0,\quad 2x^2(x-3)=0,\quad x_{\min}=3,$$

$$d^2_{\min}=4{,}25=\frac{17}{4},\quad d=\frac{\sqrt{17}}{2},\quad d-r=\frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Следовательно, в ответе имеем $1{,}0625-1=0{,}0625$.

Ответ: 0,0625

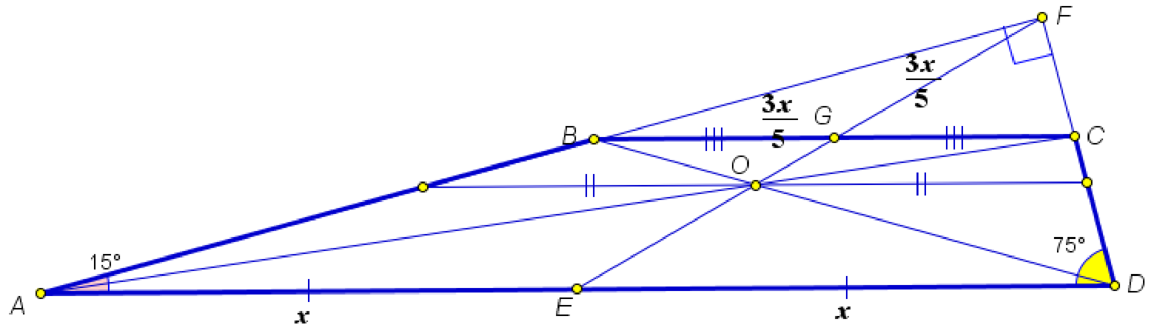
Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12

Задача 7.

В трапеции $ABCD$ углы при основании AD равны $15°$ и $75°$, $BC : AD = 3:5$. Длина отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей трапеции с серединой основания AD равна 1. Найдите площадь трапеции.

Решение:



Достроим трапецию до треугольника, продлив боковые стороны AB и CD до пересечения в точке F. Поскольку углы при основании AD трапеции в сумме равны $90°$, то треугольник AFD прямоугольный. Прямая, проходящая через точку F и точку пересечения диагоналей трапеции (точку O) делит основания трапеции пополам, т.е. проходит через середины E и G оснований AD и BCсоответственно. Пусть $AE = FE = x$. Тогда $BG = FG = \frac{3x}{5}$. Имеем

$\frac{OG}{OE} = \frac{3}{5}$, $\frac{x - \frac{3x}{5} - 1}{1} = \frac{3}{5}$, $x = 4$. Найдем площадь треугольника AFD:

$$S_{AFD} = \frac{AF \cdot FD}{2} = \frac{1}{2} 2x\cos 15° \cdot 2x\sin 15° = x^2 \sin 30° = \frac{x^2}{2} = 8.$$

Треугольники BFC и AFD подобны с коэффициентом подобия $\frac{3}{5}$.

Следовательно, $S_{ABCD} = \left(1 - \frac{9}{25}\right) S_{AFD} = \frac{128}{25} = 5{,}12.$

Ответ: 5,12

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16

Задача 8.

Найдите наибольшее значение параметра *a,* при котором уравнение $(x^2 - a)^2 + 2(x^2 - a) + (x - a) + 2 = 0$ имеет ровно одно решение. В ответе укажите сумму найденного значения параметра a и решения уравнения в этом случае.

Решение. Преобразуем уравнение $(x^2 - a)^2 + 2(x^2 - a) + (x - a) + 2 = 0$ к виду $a^2 - a\left(2x^2 + 3\right) + x^4 + 2x^2 + x + 2 = 0.$ Это квадратное уравнение относительно параметра a. Найдем его дискриминант

$$D = (2x^2 + 3)^2 - 4(x^4 + 2x^2 + x + 2) = (2x - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \left[\begin{array}{l} x^2 + x + 1, \\ x^2 - x + 2. \end{array}\right.$$

Решим два новых полученных квадратных уравнения относительно переменной x:

$$x^2 + x + 1 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2},$$
$$x^2 - x + 2 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4a - 7}}{2}.$$

Отметим, что уравнения имеют совпадающие решения при $a = \frac{7}{4}$.

Максимально возможное значение параметра, при котором уравнение имеет 2 корня $a = 7/4$, при этом первый корень $x_1 = -3/2$, а остальные корни совпадают $x_2 = x_3 = x_4 = 1/2.$

Единственное решение $x_1 = -1/2$ получается при $a = 3/4.$

$a = 0,75, \quad x_1 = -0,5, \quad a + x_1 = 0,75 - 0,5 = 0,25.$

Ответ: 0,25

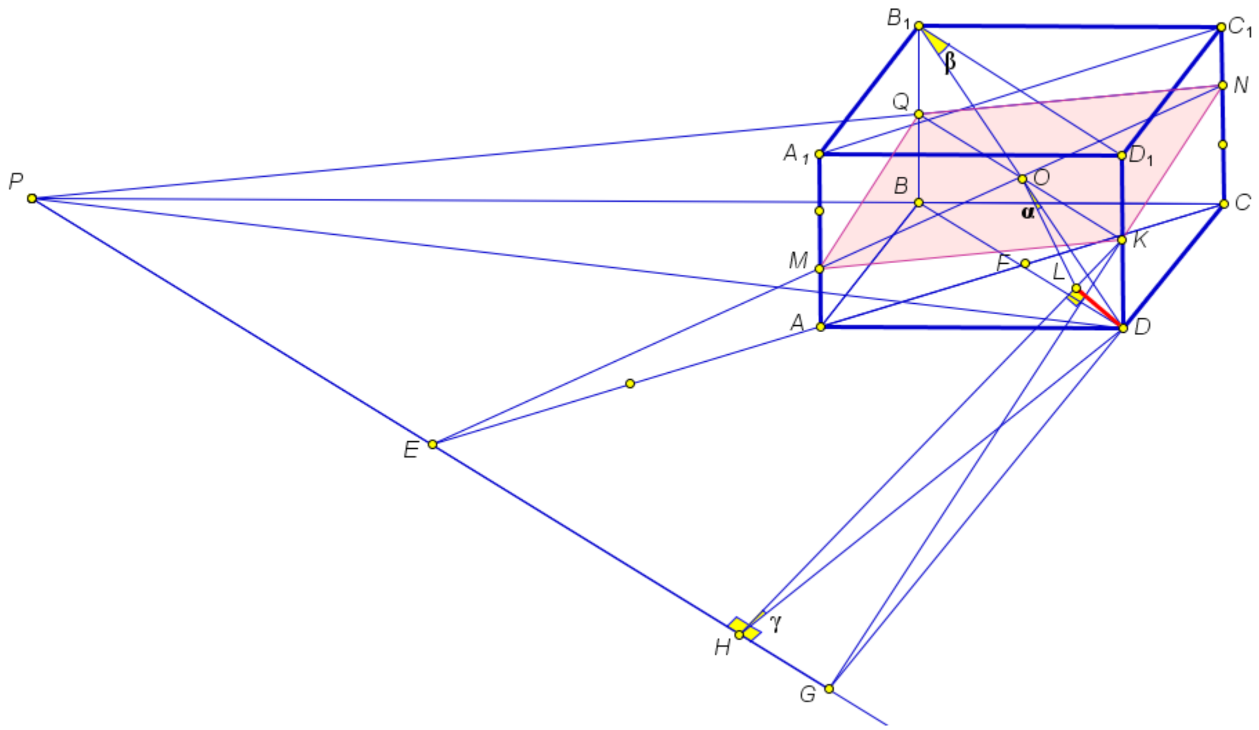
Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	14

Задача 9.

Диагонали прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ наклонены к плоскости основания $ABCD$ под углом $45°$. На ребрах AA_1 и CC_1 выбраны точки M и N соответственно, причем $MA_1 = 2AM$, и $CN = 2NC_1$. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки M и N параллельно диагонали основания BD и образует с диагональю B_1D угол, равный $\arccos\sqrt{5/8}$, если расстояние от прямой BD до этой плоскости равно 3.

Решение. Построим сечение. В плоскости ACC_1 проведем прямую MN. Пусть $E = MN \cap AC$. Треугольники AEM и CEN подобны, $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{AM}{CN} = \dfrac{1}{2}$, $AE = AC$. Через точку E проведем прямую $PG \parallel BD$, $G = CD \cap PG$, $P = BC \cap PG$. Пусть точка K - точка пересечения прямой NG с ребром DD_1, а точка Q - точка пересечения прямой NP с ребром BB_1. Тогда параллелограмм $MKNQ$ искомое сечение, $KQ \parallel DB$. Поскольку $\dfrac{CD}{CG} = \dfrac{CF}{CE} = \dfrac{1}{4}$ (F – точка пересечения диагоналей основания $ABCD$), то $\dfrac{KD}{CN} = \dfrac{3}{4}$, $KD = \dfrac{DD_1}{2}$.



Расстояние от BD до плоскости сечения равно расстоянию от D до плоскости сечения. Проведем $DH \perp PG,\ H = DH \cap PG.$ Тогда по теореме о трех перпендикулярах $KH \perp PG,$ и расстояние от D до плоскости сечения равно $DL,$ где $DL \perp KH,\ \ L = DL \cap KH.$ Точка пересечения диагоналей параллелепипеда (точка O) принадлежит плоскости сечения. Следовательно, угол $\alpha = \angle DOL$ - угол, который образует плоскость сечения с диагональю B_1D, и $\alpha = \arccos\sqrt{5/8}.$ Пусть $x = BD.$ Поскольку диагонали прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ наклонены к плоскости основания $ABCD$ под углом $45°$, то

$$DD_1 = x,\ KD = \frac{x}{2},\ B_1D = x\sqrt{2},\ OD = \frac{x\sqrt{2}}{2}, DL = OD\sin\alpha \Rightarrow 3 = \frac{x\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}.$$

Площадь сечения $MKNQ$ будем вычислять по формуле $S_{сеч} = \dfrac{S_{пр}}{\cos\gamma}$, где $S_{пр}$ - площадь проекции сечения на плоскость основания, γ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания. Проекцией является основание $ABCD$. $S_{пр} = BD\cdot\dfrac{DH}{3}.$ Имеем

$$\angle KDL = \gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{DL}{KD} = \frac{6}{x} = \sqrt{\frac{3}{4}},\ DH = \frac{KD}{\operatorname{tg}\gamma} = 6.\quad S_{пр} = 8\sqrt{3}.\quad S_{сеч} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 16.$$

Ответ: 16

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16