Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Профиль олимпиады: «Математика»

Класс участия: 10 **Вариант задания: 2**

Задача 1 (12 *баллов*). Играя, девочка Лиза нашла 6 папиных новых носков одинаковой формы (правый не отличается от левого) трех цветов: 1 белый, 2 серых и 3 синих, при этом носки одинакового цвета визуально неразличимы. Лиза решила их надеть по три штуки на каждую ногу. Сколькими способами она это может сделать, если важно, какой носок надет раньше, какой позже и на какую ногу, а также носки можно выворачивать наизнанку?

Задача 2 (16 *баллов*). Найдите 30-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\left(3+\sqrt{11}\right)^{75}$.

Задача 3 (16 *баллов*). В треугольнике ABC с тупым углом A на стороне AB как на диаметре построена окружность. Прямые AC и BC пересекают эту окружность в точках D и E соответственно ($D \neq A,\ E \neq B$). Через точки D и E к окружности проведены касательные, пересекающиеся в точке F. Прямая CK перпендикулярна прямой AB, а точка K – точка пересечения прямых BD и CK. Найдите радиус описанной около треугольника BCK окружности, если $FE=7$, а угол CBD равен $\arcsin 0,7$.

Задача 4 (16 *баллов*). Сколько разных положительных значений, не превышающих десять миллионов, принимает многочлен $P(x,y)=8x^3+y^3-12xy^2+3x^2y-2x-y$ при всевозможных целых числах *x* и *y*?

Задача 5 (20 *баллов*). В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба *BD,* наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}$. Найдите угол между диагональю призмы AC_1 и плоскостью основания $ABCD$, если площадь сечения относится к площади основания призмы как $221:90$.

Задача 6 (20 *баллов*). См. на обороте листа.

Задача 6 (20 *баллов*). Для проведения зимнего фестиваля на городской площади подготовлена площадка сложной формы для засыпки снега. Она представляет собой квадрат со стороной 4 м, к которому снаружи присоединены два полукруга, диаметрами которых служат две противоположные стороны квадрата (форма «стадион»). Ограждений по краям площадки нет.

Известно, что снег лежит не осыпаясь, если наклон его поверхности к земле не превышает $45°$. Снег насыпан так, что занимает максимально возможный объём при соблюдении этого условия устойчивости.

Для расчёта нагрузки на водоотводную систему снежную массу разделили на два горизонтальных слоя одинаковой толщины: в верхнем слое - 1 м^3 снега даёт 0.4 м^3 воды, в нижнем слое - 1 м^3 снега даёт 0.8 м^3 воды.

Найдите максимальный объём снега $V_{\text{снега}}$, который можно разместить на площадке.

Вычислите общий объём воды $V_{\text{воды}}$, который образуется после полного таяния снега. Ответ округлите до десятых долей м^3 (число $\pi \approx 3.14$).

Решение варианта №2 (Математика - 10 класс)

1. (12 баллов) Играя, девочка Лиза нашла 6 папиных новых носков одинаковой формы (правый не отличается от левого) трех цветов: 1 белый, 2 серых и 3 синих, при этом носки одинакового цвета визуально неразличимы. Лиза решила их надеть по три штуки на каждую ногу. Сколькими способами она это может сделать, если важно, какой носок надет раньше, какой позже и на какую ногу, а также носки можно выворачивать наизнанку?

Решение. Процесс формирования (а значит и подсчета количества) различных способов надевания носков можно разбить на 3 этапа:

– сначала все 6 носков линейно упорядочиваем по очередности надевания их на себя девочкой Лизой. Для этого раскладываем эти носки по приготовленным для них 6 занумерованным местам (позициям). Для носка белого цвета выбираем из 6 мест 1 место ($C_6^1 = 6$ способов), затем из 5 оставшихся мест выбираем 2 места (C_5^2 способов), куда одним способом (так как они неразличимы) укладываем 2 серых носка, и в оставшиеся три места (1 способ выбрать) также одним способом укладываем 3 синих носка. Всего получается $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot 1 = 6 \cdot 10 = 60$ вариантов;

– поскольку очередность надевания носков определена, остается теперь только выбрать ногу, на которую эти носки будут надеваться (по 3 штуки на каждую ногу). Для этого достаточно определить, какие 3 из выстроенных в линеечку 6 носков в итоге окажутся на левой ноге (остальные автоматически будут надеты на правую ногу), т.е. надо выбрать 3 носка (3 места) из 6 ($C_6^3 = 20$ способов);

– наконец, необходимо определиться, каким образом (естественным или наизнанку) способом будет надеваться на ногу каждый носок: два варианта для каждого носка, и всего $2^6 = 64$ варианта.

Следовательно, общее количество различных способов надевания носков равно $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3 \cdot 2^6 = 60 \cdot 20 \cdot 64 = 76800.$

Ответ: 76800.

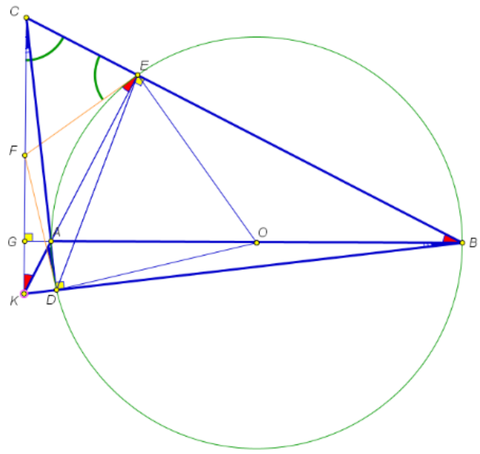
2. (16 баллов) Найдите 30-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\left(3+\sqrt{11}\right)^{75}$.

Решение. Используем формулу бинома Ньютона: $\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$. Тогда $\left(3+\sqrt{11}\right)^{75} = \sum_{k=0}^{75} C_{75}^k 3^{75-k} \left(\sqrt{11}\right)^k$, и при всех четных k слагаемые в разложении будут натуральными числами. Аналогично, $\left(3-\sqrt{11}\right)^{75} = \sum_{k=0}^{75} C_{75}^k 3^{75-k} \left(-\sqrt{11}\right)^k$. Тогда $N = \left(3+\sqrt{11}\right)^{75} + \left(3-\sqrt{11}\right)^{75}$ – натуральное число.

Поскольку $0 > \left(3-\sqrt{11}\right)^{75} > -\left(1/3\right)^{75} > -\left(1/243\right)^{15} > -10^{-30}$, то $0 < \left(3+\sqrt{11}\right)^{75} - N < 10^{-30}$, и 30-я цифра после запятой в десятичной записи числа $\left(3+\sqrt{11}\right)^{75}$ будет равна 0.

Ответ: 0.

3. (16 баллов) В треугольнике ABC с тупым углом A на стороне AB как на диаметре построена окружность. Прямые AC и BC пересекают эту окружность в точках D и E соответственно $(D \neq A,\ E \neq B)$. Через точки D и E к окружности проведены касательные, пересекающиеся в точке F. Прямая CK перпендикулярна прямой AB, а точка K – точка пересечения прямых BD и CK. Найдите радиус описанной около треугольника BCK окружности, если $FE = 7$, а угол CBD равен $\arcsin 0,7$.



Решение. Пусть G – точка пересечения прямых AB и CK. Отрезки AE, BD и CG - высоты треугольника ABC. Они пересекаются в одной точке K. Отрезки AD, BE и KG - высоты треугольника ABK. Они пересекаются в одной точке C. Докажем, что точка F является серединой отрезка CK. По свойствам касательных $\angle FEA = \angle EBA$. Пусть F_1 - точка пересечения касательной FE с прямой CK. Поскольку $\angle CEA = \angle CGB = 90°$, то $\angle F_1CE = \angle F_1EC$, следовательно, треугольник FCE равнобедренный, и $F_1C = F_1E$. Поскольку треугольники BGK и KEB прямоугольные с общей гипотенузой, то $\angle GKE = \angle EBA$, и, следовательно, $\angle GKE = \angle FEA$, и треугольник KF_1E равнобедренный, и $F_1K = F_1E = F_1C$. Тогда F_1 - середина CK. Пусть теперь F_2 - точка пересечения касательной FD с прямой CK. Рассуждая аналогично, получаем, что F_2 - середина CK. Таким образом, $F = F_1 = F_2$, и $CK = 2FE = 2FD$.

Тогда $R_{BCK} = \dfrac{CK}{2\sin(\angle CBD)} = \dfrac{14}{2 \cdot 0,7} = 10.$ **Ответ:** 10.

4. (16 баллов) Сколько разных положительных значений, не превышающих десять миллионов, принимает многочлен $P(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy^2 + 3x^2y - 2x - y$ при всевозможных целых числах x и y?

Решение. Докажем, что все значения $P(x,y)$ делятся на 3. Для любых целых x и y имеем

$P(x,y) = (8x^3 - 2x) + (y^3 - y) - (12xy^2 - 3x^2y) =$
$= (2x-1)2x(2x+1) + (y-1)y(y+1) - 3xy(4y - x) \vdots 3,$

так как произведение трех последовательных целых чисел делится на 3. Теперь покажем, что любое число, кратное трем, может быть значением многочлена $P(x,y)$. Возьмем $x = y$. Тогда $P(x,x) = 8x^3 + x^3 - 12x \cdot x^2 + 3x^2x - 2x - x = -3x$. Таким образом, нужно посчитать количество всех положительных чисел, кратных трем, не превышающих десять миллионов. Получаем $\dfrac{9999999}{3} = 3333333.$

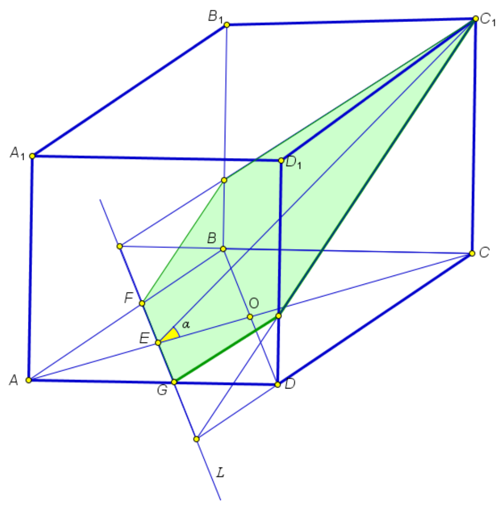
Ответ: 3333333.

5. (20 баллов) В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба *BD,* наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$. Найдите угол между диагональю призмы AC_1 и плоскостью основания $ABCD$, если площадь сечения относится к площади основания призмы как $221:90$.

Решение.

Плоскость сечения пересекает прямую *AC* по прямой *L*, параллельной *BD*. Если точка пересечения *L* с *AC* лежит вне отрезка *AC* или совпадает с концами этого отрезка, то площадь проекции сечения на плоскость основания совпадает с площадью основания или равна 0. Поскольку $S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\alpha}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$, $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{144}{25}}}=\frac{5}{13}$, $\frac{S_{сеч}}{S_{пр}}=\frac{13}{5}$, то такой случай противоречит условию. Пусть *O* – точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Если точка пересечения *L* с *AC* лежит на отрезке *OC* и не совпадает с *C,* то сечением является треугольник, площадь проекции которого на плоскость основания не превышает половины площади основания, т.е. $\frac{221}{90}=\frac{S_{сеч}}{S_{осн}}=\frac{S_{пр}}{S_{осн}}\cdot\frac{13}{5}\le\frac{13}{10}$, что неверно. Таким образом, точка пересечения *L* с *AC* лежит между точками *A* и *O*.

Обозначим $CC_1=x,\ AC=d$, *E* – точка пересечения прямой *L* с *AC*. Поскольку диагонали ромба перпендикулярны, а $L\parallel BD, L\perp AC$, то угол α между плоскостью сечения и плоскостью основания совпадает с углом CEC_1, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$. Тогда $CE=\frac{5}{12}x$. Пусть *F* – точка пересечения прямой *L* и *AB*, а *G* – точка пересечения *L* и *AD*. Тогда проекцией сечения на плоскость основания является пятиугольник $BCDGF$.



$S_{BCDGF}=S_{ABCD}-S_{AFG}$. Треугольники *AFG* и *ABD* подобны, $\frac{FG}{BD}=\frac{AE}{AO}=\frac{d-\frac{5}{12}x}{d/2}=2-\frac{5x}{6d}$.

$$S_{AFG}=\frac{1}{2}\left(2-\frac{5x}{6d}\right)^2 S_{ABCD},\quad S_{BCDGF}=S_{ABCD}\left(1-\frac{1}{2}\left(2-\frac{5x}{6d}\right)^2\right),$$

$\frac{221}{90}=\frac{S_{сеч}}{S_{осн}}=\frac{13S_{пр}}{5S_{осн}}=\frac{13}{5}\left(1-\frac{1}{2}\left(2-\frac{5x}{6d}\right)^2\right)$, $\frac{17}{18}=1-\frac{1}{2}\left(2-\frac{5x}{6d}\right)^2$, $2-\frac{5x}{6d}=\frac{1}{3}, x=2d$. Случай $2-\frac{5x}{6d}=-\frac{1}{3}$ не удовлетворяет условию $\frac{5}{6}x<d$, поскольку здесь $\frac{x}{d}=\frac{14}{5}$. Тогда угол между диагональю призмы AC_1 и плоскостью основания $ABCD$ равен $\operatorname{arctg}2$.

Ответ: $\operatorname{arctg}2$.

6. (20 баллов) Для проведения зимнего фестиваля на городской площади подготовлена площадка сложной формы для засыпки снега. Она представляет собой квадрат со стороной 4 м, к которому снаружи присоединены два полукруга, диаметрами которых служат две противоположные стороны квадрата (форма «стадион»). Ограждений по краям площадки нет.

Известно, что снег лежит не осыпаясь, если наклон его поверхности к земле не превышает 45°. Снег насыпан так, что занимает максимально возможный объём при соблюдении этого условия устойчивости.

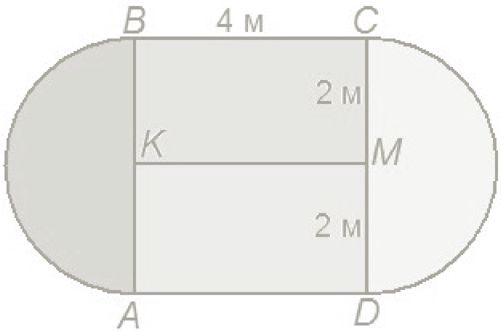
Для расчёта нагрузки на водоотводную систему снежную массу разделили на два горизонтальных слоя одинаковой толщины: в верхнем слое - 1 м³ снега даёт 0.4 м³ воды, в нижнем слое - 1 м³ снега даёт 0.8 м³ воды.

Найдите максимальный объём снега $V_{\text{снега}}$, который можно разместить на площадке.

Вычислите общий объём воды $V_{\text{воды}}$, который образуется после полного таяния снега. Ответ округлите до десятых долей м^3 (число $\pi \approx 3.14$).

Решение.

1. Геометрия фигуры и полный объём. Площадка состоит из квадрата 4×4 м и двух полукругов радиуса $R = 2$ м. Условие устойчивости: угол наклона $\leq 45°$, значит $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Высота снега в любой точке равна расстоянию до границы площадки ($z = d$). В центре квадрата расстояние до прямых сторон равно 2м. Расстояние до дуг полукругов также не меньше 2м. Следовательно, максимальная высота $H = 2$м.



Над квадратной частью: расстояние до границы определяется прямыми сторонами квадрата. Сечение перпендикулярно длинной оси — треугольник с основанием 4м и высотой 2м. Это треугольная призма длиной 4м. Над полукруглыми частями: расстояние до границы определяется дугами. Это две половины конуса с радиусом основания 2м и высотой 2м.

Расчёт объёма снега ($V_{\text{снега}}$):

1) Объём призмы (центральная часть): площадь треугольного сечения: $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$м². Длина призмы: $L = 4$м. $V_{\text{пр}} = 4 \cdot 4 = 16$м³.

2) Объём конусов (торцевые части): две половины конуса составляют один полный конус с $R = 2, H = 2$. $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{3}$м³.

Итого: $V_{\text{снега}} = 16 + \frac{8\pi}{3} \approx 16 + 8.37 = 24.37$ м^3

2. Расчёт объёма воды по слоям

Разделим кучу снега на нижний слой ($0 \leq z \leq 1$) и верхний слой ($1 \leq z \leq 2$). Объём верхнего слоя проще найти как объём «верхней части» кучи высотой 1м.

Геометрия верхней части (от $z = 1$ до $z = 2$):

1) призменная часть: на высоте $z = 1$ ширина снежной кучи над квадратом определяется уравнением склона $z = 2-|\ y\ | \Rightarrow 1 = 2-|\ y\ | \Rightarrow |\ y\ | = 1$. Ширина сечения 2м. Верхняя часть призмы — это призма меньшего размера: длина 4м, сечение — треугольник с основанием 2м и высотой 1м.

$V_{\text{пр}}^{\text{верх}} = (\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1) \cdot 4 = 4$ м³.

2) Коническая часть: Верхушки конусов высотой 1м. По подобию, радиус основания этих верхушек на высоте $z = 1$равен $r = 1$м (так как уклон 1:1). Это две половины конуса с $r = 1, h = 1$. Вместе — один конус. $V_{\text{кон}}^{\text{верх}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{3}$ м³.

Объём верхнего слоя: $V_{\text{верх}} = 4 + \frac{\pi}{3}$ м^3

Объём нижнего слоя: $V_{\text{низ}} = V_{\text{снега}} - V_{\text{верх}} = \left(16+\frac{8\pi}{3}\right) - \left(4+\frac{\pi}{3}\right) = 12 + \frac{7\pi}{3}$ м^3

Итоговый объём воды: Коэффициенты таяния: $k_{\text{верх}} = 0.4$, $k_{\text{низ}} = 0.8$.

$$V_{\text{воды}} = 0.4 \cdot V_{\text{верх}} + 0.8 \cdot V_{\text{низ}} = 0.4\left(4+\frac{\pi}{3}\right) + 0.8\left(12+\frac{7\pi}{3}\right) = 1.6 + \frac{0.4\pi}{3} + 9.6 + \frac{5.6\pi}{3}$$

$$V_{\text{воды}} = 11.2 + \frac{6\pi}{3} = 11.2 + 2\pi$$

Подставим $\pi \approx 3.14$: $V_{\text{воды}} = 11.2 + 2 \cdot 3.14 = 11.2 + 6.28 = 17.48$ м^3

Округляем до десятых: $V_{\text{воды}} \approx 17.5$ м^3

Ответ: 1) $16 + \frac{8\pi}{3}$м³ (или ≈ 24.4м³); 2) 17.5м³.

Критерии оценивания олимпиадной работы

Задание 1 максимальная оценка: 12 баллов

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	12
Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	9
Задача решена без учета выворачивания или смены ног.	6
Задача решена без учета выворачивания и смены ног.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 2 максимальная оценка: 16 баллов

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Получены верные оценки, приводящие к верному ответу.	8
Использована формула бинома Ньютона, имелись соображения относительно использования, сопряженного до разности квадратов, аналогичного выражения.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 3 максимальная оценка: 16 баллов

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Доказано, что F - середина CK, верно найден угол CAK.	8
Доказано, что F - середина CK.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 4 максимальная оценка: 16 баллов

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	16
Все рассуждения верные, все утверждения обоснованы. Допущена одна вычислительная ошибка.	12
Доказано, что все значения P (x,y) делятся на 3, и любое число, кратное трем, может быть значением многочлена P (x,y).	8
Доказано, что все значения P (x,y) делятся на 3.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 5 максимальная оценка: 20 баллов

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.	20
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены. Допущена одна арифметическая ошибка.	15
Получено верное уравнение с одним неизвестным, которым является искомое отношение.	10
Доказано, что сечением является пятиугольник. Полностью описано построение сечения призмы. Установлены необходимые подобия. Получены формулы для вычисления объема меньшей части.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 6 максимальная оценка: 20 баллов

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получены все верные ответы, все утверждения обоснованы. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений.	20
Верно вычислен объем снежной кучи с подробным обоснованием, имеется верный подход к вычислению объема воды, т.е. верно произведена разбивка на слои, но не получен верный окончательный ответ или допущена одна арифметическая ошибка в вычислении объемов.	15
Верно посчитан объем снежной кучи, но продемонстрирован неверный подход к вычислению объема воды, или имеются арифметические ошибки в вычислении объема воды и сделана попытка подсчета объемов слоев, без верного ответа или верный ответ, но без подробного обоснования.	10
частник «разбил» снежную кучу на составляющие – призму и пирамиду (конус), написал формулы для вычисления объема, но не сделал правильных вычислений, или имеется верный ответ, но без подробного обоснования.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0