



## Заключительный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

### Профиль: «Компьютерное моделирование и графика»

#### Тур по математике и инженерной графике

Класс участия: 10-11

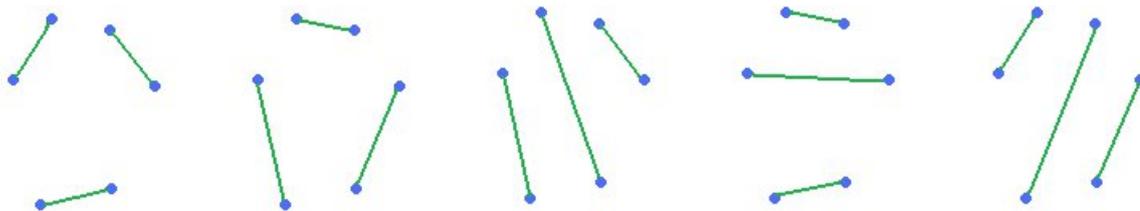
Вариант: 1

#### Задача 1.

На плоскости даны 2026 точек, являющиеся вершинами выпуклого многоугольника. Случайно выбрали 6 точек A, B, C, D, E, F и соединили отрезками AB, CD, EF. Найти вероятность того, что хотя бы два отрезка пересекутся. Ответ запишите в процентах, округлив до 0,01%.

#### Решение:

Какие 6 точек мы ни выберем, они будут вершинами выпуклого 6-угольника. Есть 15 способов соединить их попарно (5 способов выбрать пару вершине №1, затем 3 способа выбрать пару следующей за ней по часовой стрелке свободной вершине). И только при 5 способах получатся непересекающиеся отрезки. Так что вероятность пересечения  $10/15 = 2/3$



Ответ: 66,67%.



### *Критерии оценивания*

Содержание критерия	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	<b>10</b>
Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	<b>8</b>
Правильно и обоснованно получено количество всех способов соединения вершин выпуклого $n$ -угольника ( $n=8$ или $n=6$ ), <b>или</b> правильно и обоснованно вычислено количество случаев, при которых нужные отрезки попарно не пересекаются.	<b>5</b>
Задача обоснованно сведена к соединению вершин выпуклого $n$ -угольника ( $n=8$ или $n=6$ ). Предприняты попытки вычисления количества всех способов соединения вершин выпуклого $n$ -угольника и количества случаев, при которых нужные отрезки попарно не пересекаются, но верные результаты не получены. Итоговый ответ неверный, или итоговый ответ верный, но доказательство его истинности не представлено.	<b>3</b>
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	<b>0</b>



## Задача 2.

Пусть  $B$  – сумма всех натуральных делителей числа  $10!$ . Найдите целую часть числа  $\frac{B}{10!}$ .

### Решение:

*Решение.*  $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ , следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{B}{10!} &= (2^9 - 1) \cdot \frac{3^5 - 1}{2} \cdot (25 + 5 + 1) \cdot (7 + 1) / 10! = 2(1 - 2^{-9}) \cdot \frac{3}{2}(1 - 3^{-5}) \cdot \frac{31}{25} \cdot \frac{8}{7} = \\ &= \frac{744}{175}(1 - 2^{-9})(1 - 3^{-5}) \begin{cases} < \frac{744}{175} < 5 \\ > \frac{744}{175} \left(1 - \frac{2}{744}\right) \left(1 - \frac{4}{742}\right) = \frac{738}{175} > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

**Ответ: 4.**

### Критерии оценивания

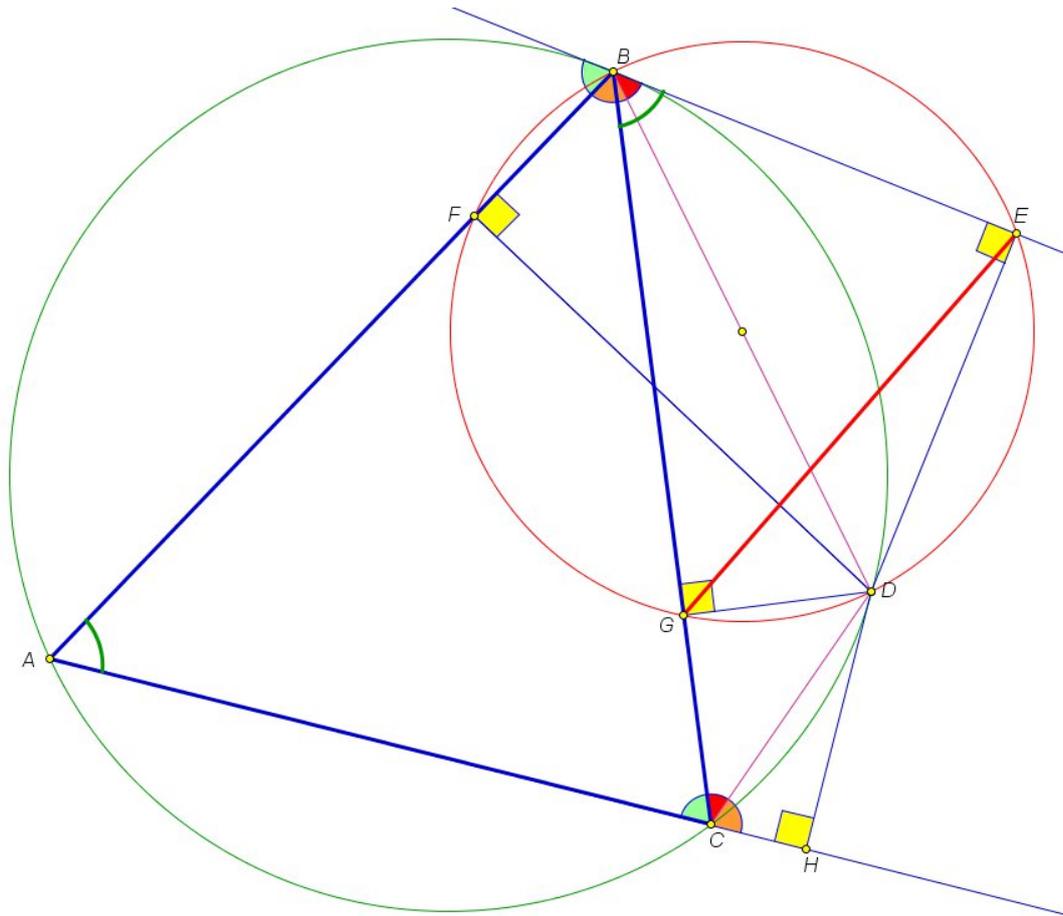
Содержание критерия	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	<b>10</b>
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	<b>8</b>
Найдено верно ближайшее большее <b>или</b> меньшее целое число.	<b>5</b>
Правильно выписано выражение для вычисления числа $A$ .	<b>3</b>
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	<b>0</b>



### Задача 3.

Около треугольника  $ABC$  описана окружность  $S_1$ . Точка  $D$  лежит на той дуге  $BC$  окружности  $S_1$ , которая не содержит точку  $A$ . Из точки  $D$  опущены перпендикуляры  $DF$ ,  $DG$  и  $DH$  к прямым  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  соответственно. Отрезок  $BD$  является диаметром окружности  $S_2$ , которая в точке  $E$ , отличной от  $B$ , пересекает касательную к окружности  $S_1$ , проведенную через вершину  $B$ . Найдите  $GE$ , если  $DF = 14$ ,  $DG = 5$ ,  $DH = 7$ , и угол  $BAC$  равен  $60^\circ$ .

### Решение:





Угол  $\angle DBE$  равен углу  $\angle DCG$  по свойствам касательной к окружности.

Треугольники  $BED$  и  $CGD$  подобны,  $\frac{DE}{DG} = \frac{BD}{CD}$ . Угол, смежный с  $\angle ABE$  равен углу

$\angle ACB$ , угол  $\angle DBF$  равен углу  $\angle DCH$ . Треугольники  $BFD$  и  $CHD$  подобны,

$\frac{DF}{DH} = \frac{BD}{CD}$ . Тогда  $\frac{DE}{DG} = \frac{DF}{DH}$ ,  $DE = \frac{DG \cdot DF}{DH} = \frac{5 \cdot 4}{7} = 10$ . Точки  $B, E, D, G$  лежат

на одной окружности,  $\angle GDE = 120^\circ$ . По теореме косинусов имеем

$GE^2 = DG^2 + DE^2 + DG \cdot DE = 5^2 + 10^2 + 5 \cdot 10 = 175$ .  $GE = 5\sqrt{7}$ .

**Ответ:**  $5\sqrt{7}$ .

### Критерии оценивания

Содержание критерия	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	12
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, задача доведена до ответа. Допущена одна арифметическая ошибка.	9
Верно и обоснованно найдена длина отрезка $DE$ .	6
Доказано подобие треугольников $BED$ и $CGD$ , а также $BFD$ и $CHD$ .	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;  
тур по математике и инженерной графике.

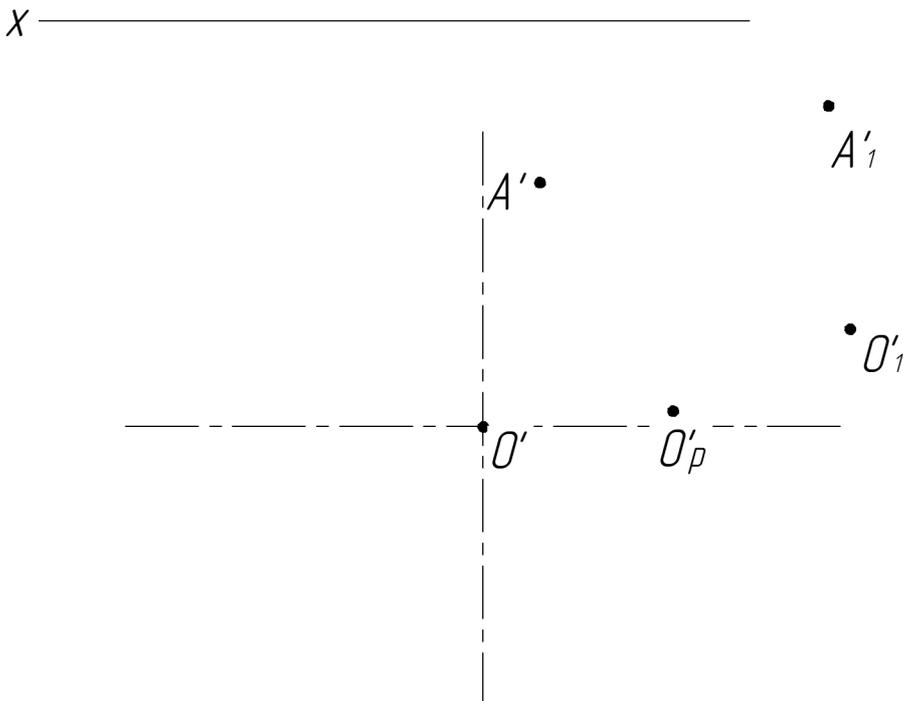
Вариант: 2

класс: 10–11

**Задача 4** (10 баллов). Даны горизонтальные проекции центров окружностей оснований наклонного цилиндра  $O'$  и  $O'_1$ , вершин  $A'$  и  $A'_1$  бокового ребра наклонной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и центра квадрата  $O'_p$  её нижнего основания. Верхние основания фигур расположены в одной плоскости. Основание цилиндра принадлежит горизонтальной плоскости проекций и его диаметр 70 мм. Высота цилиндра 70 мм. Плоскость нижнего основания призмы параллельна плоскости нижнего основания цилиндра и выше ее на 15 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции наклонного цилиндра с учетом выреза в форме наклонной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить и обозначить проекции вершин призмы и границ участков линии выреза в цилиндре;
- 3) обозначить видимость линий цилиндра с вырезом и указать осевые и центровые линии;
- 4) оформить все изображения в соответствии с требованиями ЕСКД.



Профиль: Компьютерное моделирование и графика;  
тур по математике и инженерной графике.

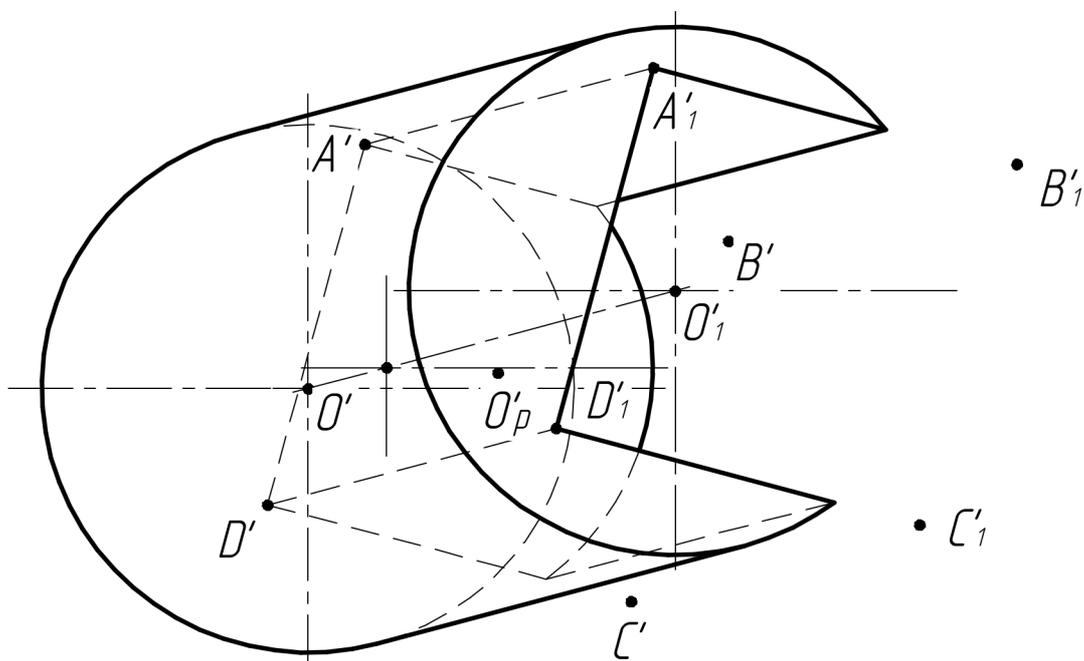
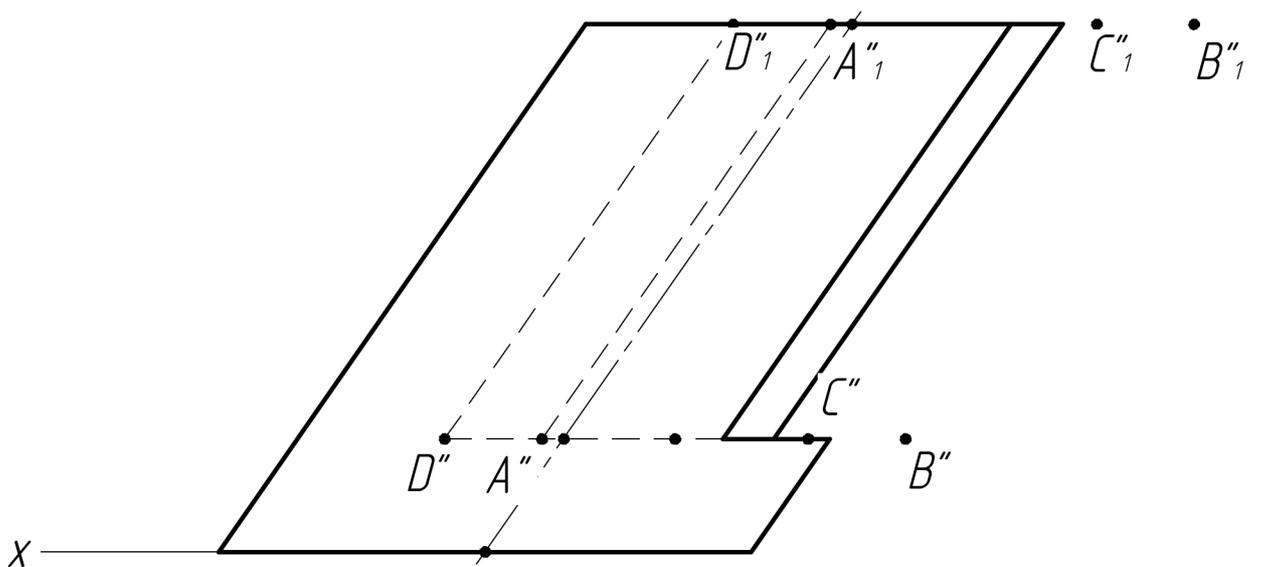
Вариант: 2

класс: 10–11

**Задача 4 (10 баллов).** Даны горизонтальные проекции центров окружностей оснований наклонного цилиндра  $O'$  и  $O'_1$ , вершин  $A'$  и  $A'_1$  бокового ребра наклонной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и центра квадрата  $O'_p$  её нижнего основания. Верхние основания фигур расположены в одной плоскости. Основание цилиндра принадлежит горизонтальной плоскости проекций и его диаметр 70 мм. Высота цилиндра 70 мм. Плоскость нижнего основания призмы параллельна плоскости нижнего основания цилиндра и выше ее на 15 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции наклонного цилиндра с учетом выреза в форме наклонной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить и обозначить проекции вершин призмы и границ участков линии выреза в цилиндре;
- 3) обозначить видимость линий цилиндра с вырезом и указать осевые и центровые линии;
- 4) оформить все изображения в соответствии с требованиями ЕСКД.



## Критерии оценки рений заданий по математике и инженерной графике

### Задание 4 (4а)

За каждый критерий выставляется **максимальный балл** при полном соответствии ему работы и **0 баллов** при несоответствии или частичном соответствии.

Баллы за критерии суммируются, максимальный балл за решение **10 баллов**.

№ п/п	Критерии	Макс. балл
1	Построена фронтальная и горизонтальная проекции цилиндра с учетом выреза в форме призмы с соблюдением проекционной связи	4
2	Построены и обозначены фронтальная и горизонтальная проекции вершин призмы и границ участков линии выреза в цилиндре	2
3	Верно обозначена видимость линий цилиндра с вырезом, обозначены осевые и центровые линии	3
4	Изображения чертежа оформлены в соответствии с требованиями ЕСКД	1



### Задача 5.

Из наклонного цилиндра вырезается призма (см. условие задачи 4).

Основаниями цилиндра являются круги с центрами в точках  $O$ ,  $O_1$  и диаметрами  $70$  мм. Высота цилиндра равна  $70$  мм. Верхнее основание призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и верхнее основание цилиндра расположены в одной плоскости. Плоскость нижнего основания призмы параллельна плоскости нижнего основания цилиндра и выше ее на  $15$  мм. Квадрат  $ABCD$  вписан в окружность с диаметром  $70$  мм. Угол между прямой  $OX$  пересечения горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций и прямой  $OO_1$  равен  $15^\circ$ ,  $O_2$  – центр сечения цилиндра плоскостью нижнего основания призмы,  $O_2$  – проекция  $O_2$  на горизонтальную плоскость проекций. Найдите длину бокового ребра призмы, если расстояние между проекциями  $O_2$  и  $O_2$  центров оснований цилиндра на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит нижнее основание цилиндра, равно  $50$  мм. Найдите также расстояние от  $O_2$  до прямой  $OX$  и площадь верхнего основания цилиндра с учетом выреза, если окружность верхнего основания цилиндра пересекает стороны  $A_1 B_1$  и  $C_1 D_1$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно, и  $A_1 K = 32$ ,  $D_1 M = 38$ .

### Решение:

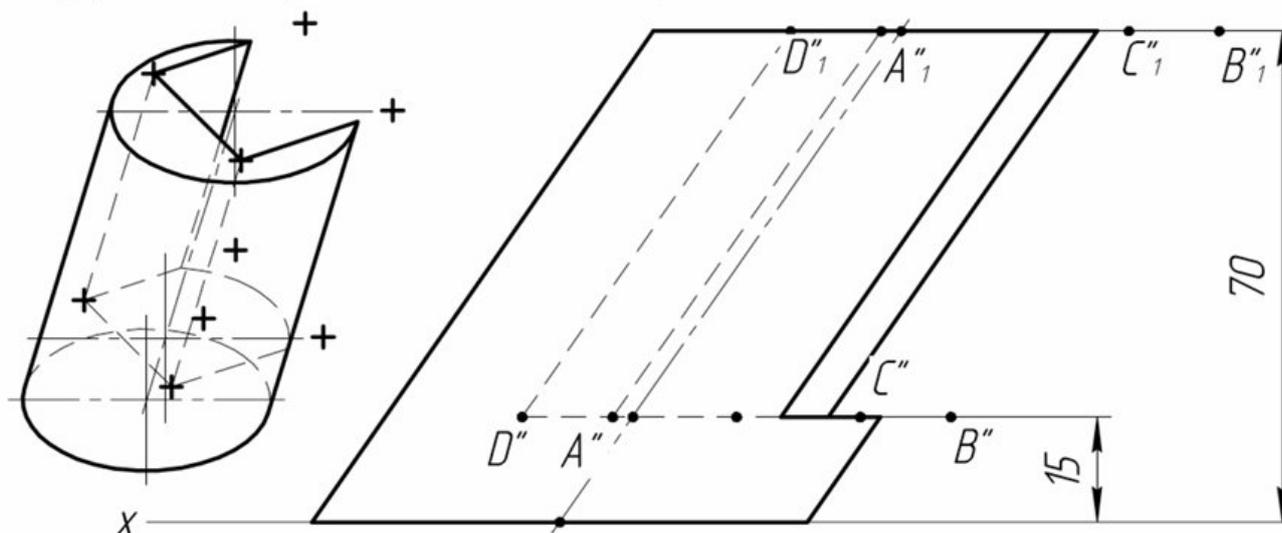
Пусть  $\alpha$  - угол наклона  $OO_1$  к плоскости основания цилиндра. Тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5}$ .

$$AA_1 = \frac{55}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + (49/25)}} = \sqrt{\frac{49}{74}} = \frac{7}{\sqrt{74}},$$

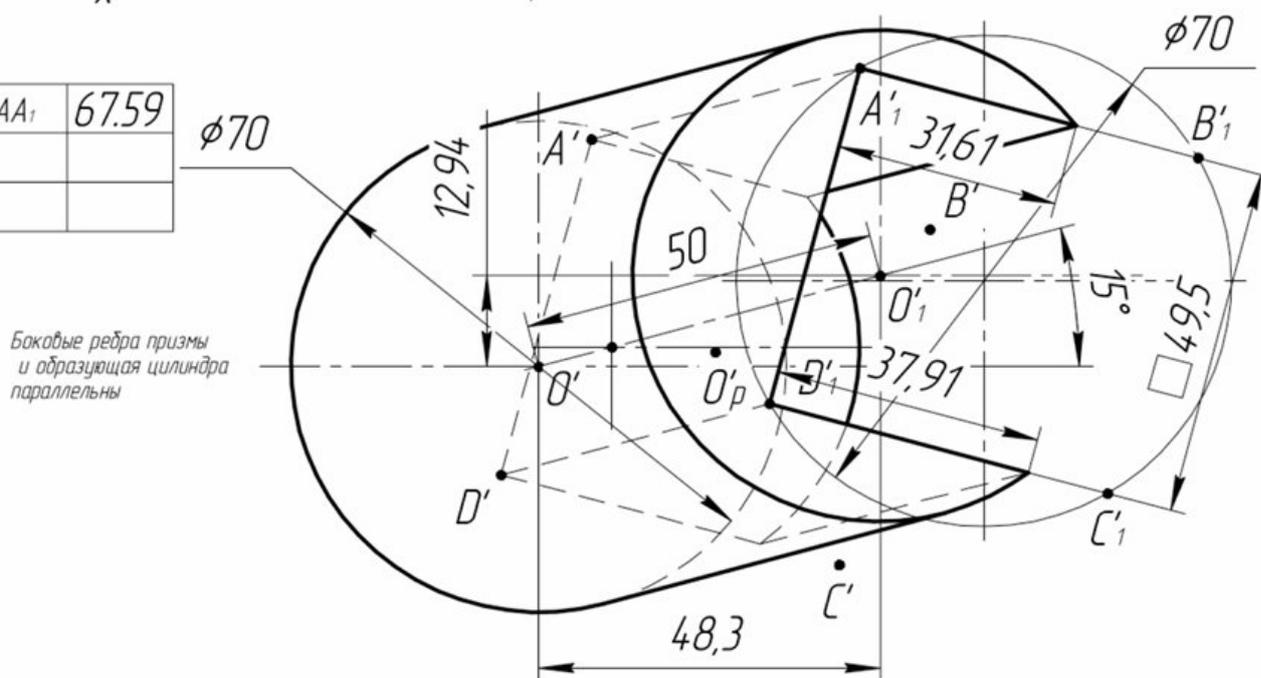
$$AA_1 = \frac{55\sqrt{74}}{7} \approx 67,59 \text{ мм}$$



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»



AA <sub>1</sub>	67.59



Поскольку  $\frac{O_1O_2}{O_1O_2} = \frac{15}{70}$ , то  $O_1O_2 = \frac{75}{7}$ , расстояние  $d$  от  $O_2$  до прямой  $O_1X$

находим по формуле  $d = O_1O_2 \sin 15^\circ = \frac{75}{7} \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{75}{4} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 9,71 \text{ мм.}$

Сторона квадрата  $A_1B_1C_1D_1$  равна  $35\sqrt{2}$ . Площадь верхнего основания цилиндра с учетом выреза находим по формуле

$$S = 35^2 \rho - \frac{(32 + 38) \cdot 35\sqrt{2}}{2} = 35^2 (\rho - \sqrt{2}) = 1225 (\rho - \sqrt{2}) \approx 2116,04 \text{ мм}^2$$



**Ответ:**

$$AA_1 = \frac{55\sqrt{74}}{7} \approx 67,59 \text{ мм},$$

$$\frac{75}{4}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 9,71 \text{ мм},$$

$$1225(p - \sqrt{2}) \approx 2116,04 \text{ мм}^2$$

**Критерии оценивания**

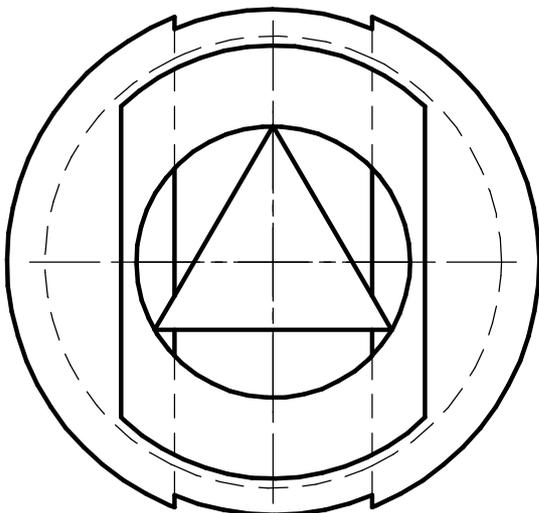
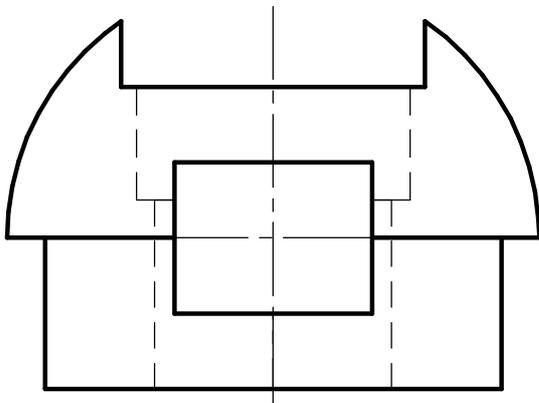
Содержание критерия	Балл
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы. Все ответы даны точно, а не приближенно.	8
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	6
Верно и обоснованно найдены две из трех требуемых величин.	4
Верно и обоснованно найдена одна из трех требуемых величин.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;  
тур по математике и инженерной графике.  
Вариант: 2 класс: 10–11

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции предмета.

Требуется:

- 1) выполнить изображение предмета на месте вида слева как полный профильный разрез для случая без обозначения разреза;
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза с обозначением разреза, плоскость разреза указать через ось цилиндра;
- 3) все изображения выполнить в проекционной связи на местах соответствующих основных видов и оформить по ГОСТ 2.305–2008;
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011;
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

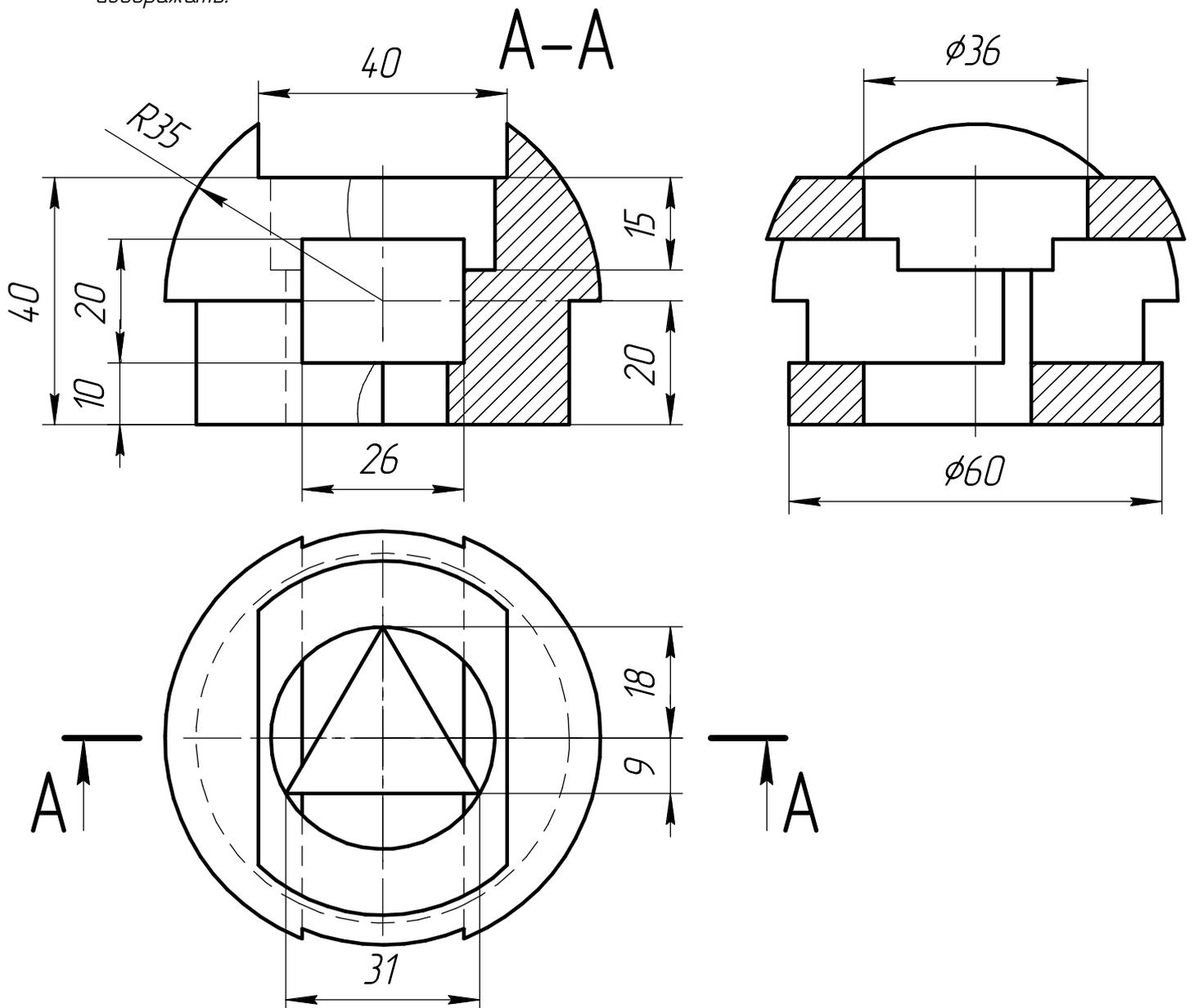


Профиль: Компьютерное моделирование и графика;  
тур по математике и инженерной графике.  
Вариант: 2 класс: 10-11

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции предмета.

Требуется:

- 1) выполнить изображение предмета на месте вида слева как полный профильный разрез для случая без обозначения разреза;
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза с обозначением разреза, плоскость разреза указать через ось цилиндра;
- 3) все изображения выполнить в проекционной связи на местах соответствующих основных видов и оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307-2011;
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.



## Критерии оценки рений заданий по математике и инженерной графике

### Задание 6, вариант 1(2)

Баллы за критерии суммируются, максимальный балл за решение **20 баллов**.

№ п/п	Критерии	Макс. балл
1	<b>Выполнены общие требования:</b> построены три изображения в проекционной связи; на видах невидимый контур показан штриховой линией, на разрезах линии невидимого контура не обозначены. <i>Указанные требования выполнены полностью: 2 балла</i> <i>Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов</i>	2
2	<b>Верно выполнен главный вид:</b> главный вид выполнен как соединение части вида и части фронтального разреза <u>с указанием</u> положения секущей плоскости и обозначения разреза ( <u>с указанием</u> волнистой линии разделения вида и разреза справа от линии ребра) <i>Указанные требования выполнены полностью: 5 балла</i> <i>Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов</i>	5
3	<b>Верно выполнен вид слева:</b> Вид слева выполнен как полный профильный разрез <u>без указания</u> положения секущей плоскости и обозначения разреза ( <u>без указания</u> волнистой линии разделения вида и разреза) <i>Указанные требования выполнены полностью: 7 баллов</i> <i>Вид слева выполнен как соединение части вида и части профильного разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза с указанием волнистой линии разделения вида и разреза: 5 баллов</i> <i>Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов</i>	7
4	<b>Верно обозначены размеры:</b> <i>Все размеры обозначены правильно: 5 баллов</i> <i>Не менее 8(10) из 10(13) размеров обозначены правильно: 4 балла</i> <i>Менее 10 из 13 размеров обозначены правильно: 0 баллов</i>	5
5	<b>Соблюдены требования ЕСКД:</b> <i>Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии с требованиями ЕСКД: 1 балл</i> <i>В изображении, толщине линии и/или штриховке есть существенные отступления от требований ЕСКД: 0 баллов</i>	1