Отборочный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль: «Компьютерное моделирование и графика»

Тур по математике

Класс участия: 11

Вариант задания: 2

Задача 1.

Группу школьников, направлявшихся в школьный лагерь, планировалось рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако, оказалось, что при этом не удалось посадить трех школьников. Когда же один автобус уехал пустым, то в оставшиеся автобусы все школьники сели поровну. Сколько школьников было в группе, если известно, что для перевозки школьников было выделено не более 18 автобусов, и в каждый автобус помещается не более 36 человек. Ответ дайте в виде числа без указания размерности.

Решение.

Пусть n – количество автобусов, m – количество школьников в каждом автобусе, S - общее число школьников. Имеем $S = 22n + 3$, $S = (n-1)m$, $n \le 10$, $m \le 36$, $22n + 3 = (n-1)m$, $n = 1 + \dfrac{25}{m-22}$. Учитывая ограничения на n и m, получаем единственно возможный случай: $m = 27$, $n = 6$, $S = 135$.

Ответ: 135

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	5

Задача 2.

Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$\sqrt{7x}+17\sqrt{y}=z\sqrt{2023}$, если $z\le 10$?

Решение:

$\sqrt{7x}+17\sqrt{y}=z\sqrt{7\cdot 17\cdot 27}\Rightarrow \frac{\sqrt{7x}+17\sqrt{22y}}{17\sqrt{7}}=z\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{289}}+\sqrt{\frac{y}{7}}=z$

Если $a,\ b$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ – рациональные числа, то $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ тоже рациональные числа. Действительно, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$, и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ – рациональное число, $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ -полусумма и полуразность рациональных чисел $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Поэтому x должно делиться нацело на 289, а y – на 7, т.е. $x=289n, y=7m$, и приходим к уравнению в целых числах $\sqrt{n}+\sqrt{m}=z$.

1) $z=0$, **одно** решение $x=0, y=0$;

2) $z=1$, **два** решения: $x=0, y=7$; $x=289, y=0$;

3) $z=2$, **три** решения: $x=0, y=28$; $x=289, y=7$; $x=1156, y=0$;

4) $z=3$, **четыре** решения: $x=0, y=63$; $x=289, y=28$; $x=1156, y=7$;

$x=2601, y=0$;

5) $z=4$, **пять** решений: $x=0, y=112$; $x=289, y=63$; $x=1156, y=28$;

$x=2601, y=7$; $x=4624, y=0$;

6) $z=5$, **шесть** решений: $x=0, y=175$; $x=289, y=112$; $x=1156, y=63$;

$x=2601, y=28$; $x=4624, y=7$; $x=7225, y=0$;

7) $z=6$, **семь** решений: $x=0, y=252$; $x=289, y=175$; $x=1156, y=112$;

$x=2601, y=63$; $x=4624, y=28$; $x=7225, y=7$; $x=10404, y=0$;

8) $z=7$, **восемь** решений: $x=0, y=343$; $x=289, y=252$; $x=$

$1156, y = 175$; $x = 2601, y = 112$; $x = 4624, y = 63$; $x = 7225, y = 28$; $x = 10404, y = 7$; $x = 14161, y = 0$;

9) $z = 8$, **девять** решений: $x = 0, y = 448$; $x = 289, y = 343$; $x = 1156, y = 252$; $x = 2601, y = 175$; $x = 4624, y = 112$; $x = 7225, y = 63$; $x = 10404, y = 28$; $x = 14161, y = 7$; $x = 18496, y = 0$;

10) $z = 9$, **десять** решений: $x = 0, y = 567$; $x = 289, y = 448$; $x = 1156, y = 343$; $x = 2601, y = 252$; $x = 4624, y = 175$; $x = 7225, y = 112$; $x = 10404, y = 63$;

$x = 14161, y = 28$; $x = 18496, y = 7$; $x = 23409, y = 0$;

11) $z = 9$, **одиннадцать** решений: $x = 0, y = 700$; $x = 289, y = 567$; $x = 1156, y = 448$; $x = 2601, y = 343$; $x = 4624, y = 252$; $x = 7225, y = 175$; $x = 10404, y = 112$; $x = 14161, y = 63$; $x = 18496, y = 28$; $x = 23409, y = 7$; $x = 28900, y = 0$.

$$S = \frac{1 + 11}{2} \cdot 11 = 66.$$

Ответ: 66

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	5

Задача 3.
Найдите наибольшее целое число a, при котором выражение

$$a^2 - 15a - (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 2)(\operatorname{tg} x + 5)(\operatorname{tg} x + 8)$$

меньше 35 при любом значении $x \in (-\pi/2\,;\,\pi/2)$.

Решение: Сделаем замену $t = tgx$. Выясним, для каких a неравенство

$a^2 - 15a - (t-1)(t+2)(t+5)(t+8) < 35$ выполняется при любом действительном t.

Имеем $(t-1)(t+8)(t+2)(t+5) > a^2 - 15a - 35$,

$(t^2 + 7t - 8)(t^2 + 7t + 10) > a^2 - 15a - 35,\ z = t^2 + 7t + 1, (z-9)(z+9) > a^2 - 15a - 35,$

$z^2 > a^2 - 15a + 46,\ 0 > a^2 - 15a + 46,\ \sqrt{D} = \sqrt{41},$

$(15 - \sqrt{41})/2 < a < (15 - \sqrt{41})/2, \Rightarrow a = 10.$

Ответ: 10

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	6

Задача 4.

Имеются по два одинаковых треугольных стекла 9 цветов со всеми сторонами по 50 см. Сколькими способами можно вставить 4 стекла в треугольную раму со сторонами по 1 м так, чтобы стёкла, имеющие общую сторону, различались цветом?

Решение.

Цвет центрального стекла можно выбрать 9 способами. Каждое из трех угловых стекол (соседних с центральным, но не граничащих друг с другом) можно выбрать 8 способами. Итого $9\cdot 8^3 = 4608$ способов. Но нужно исключить $9\cdot 8 = 72$ случая, когда все три угловых стекла одного цвета.

Ответ: 4536

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12

Задача 5.

Последовательность задана рекуррентно:

$x_0 = 0,\ x_{n+1} = \frac{(n^2+n+1)x_n+1}{n^2+n+1-x_n}$. Найдите x_{8453}.

Решение.

Решение. Вычисляем $x_1 = \frac{1}{1} = 1$, $x_2 = \frac{4}{2} = 2$, $x_3 = \frac{15}{5} = 3$, появляется гипотеза: $x_n = n$. Проверим по индукции:

$$x_{n+1} = \frac{(n^2+n+1)n+1}{n^2+n+1-n} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^2+1} = n+1.$$

Ответ: 8453

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12

Задача 6.

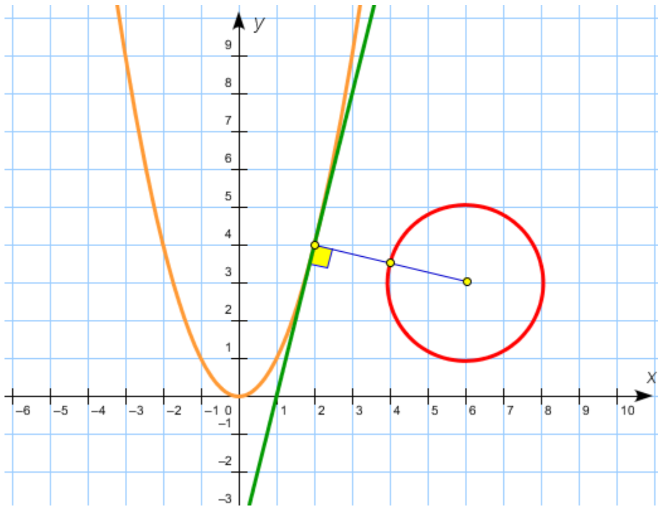
Какое наименьшее расстояние может быть между двумя точками, одна из которых лежит на графике функции $y = x^2$, другая — на кривой, заданной уравнением $4x^2 + 4y^2 - 48x - 24y + 163 = 0$. В ответ запишите квадрат найденного расстояния.

Решение.

Преобразуем уравнение второй кривой, выделив полные квадраты: $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 17/4$. Вторая кривая является окружностью с центром в точке $(6;\ 3)$ и радиусом $\sqrt{17}/2$. Найдем наименьшее расстояние от центра этой окружности до точки, лежащей на параболе $y = x^2$. Квадрат расстояния от точки $(6;\ 3)$ до точки $(x;\ x^2)$ равен $h(x) = (x-6)^2 + (x^2-3)^2$. Найдем производную функции $h(x)$:

$$h'(x) = 2(x-6) + 4x(x^2-3) = 4x^3 - 10x - 12 = (x-2)(4x^2 + 8x + 6) = 0,$$

В точке $x = 2$ производная равна нулю и меняет знак с минуса на плюс, следовательно. Является точкой минимума функции $h(x)$, $h_{min} = 17$. Наименьшее расстояние между точками на параболе и на окружности тогда будет равно $\sqrt{17}/2$, квадрат расстояния равен 17/4 или 4,25.



Ответ: 4, 25

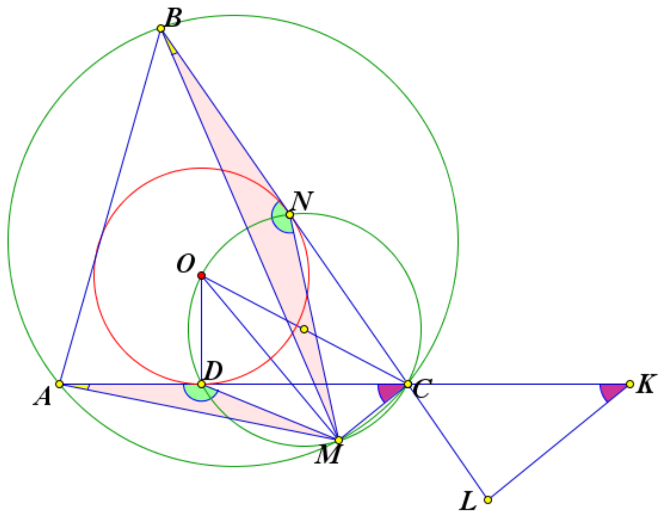
Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12

Задача 7.

Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса 2 касается стороны AC в точке D, угол C этого треугольника равен $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$. На продолжениях сторон AC и BC за точку C взяты точки K и L соответственно. Длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC. На описанной около треугольника ABC окружности выбрана точка M так, что $CM \parallel KL$. Найдите синус угла CKL, если длина отрезка DM равна 4.

Решение. Докажем, что угол $\angle OMC = 90°$. Построим окружность S с диаметром OC. Обозначим точку пересечения (отличную от C) этой окружности с описанной около треугольника ABC через M_1. Обозначим точку пересечения (отличную от C) окружности S с прямой, параллельной KL, через M_2. Необходимо доказать, что $M_1 = M_2$.



Докажем подобие треугольников ADM_1 и BNM_1. Согласно свойствам вписанных углов, имеем $\angle M_1AC = \angle M_1BC \Rightarrow \angle M_1AB = \angle M_1BN$; $\angle M_1NC = \angle M_1DC \Rightarrow \angle ADM_1 = \angle BNM_1$. Следовательно, $\Delta ADM_1 \sim \Delta BNM_1$ по двум углам. Тогда $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{AD}{BN}$. Поскольку длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC, то $AD = CL, BN = CK$. Получаем $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{CL}{CK}$. Обозначим $\angle ACM_2 = \angle CKL = \alpha,\ \angle KCL = \beta$. Тогда $\angle ACB = \beta, \angle M_2CB = \alpha + \beta$. Для треугольников DM_2C и M_2NC применим теорему синусов: $\frac{DM_2}{\sin\alpha} = \frac{M_2C}{\sin\angle M_2DC}$; $\frac{NM_2}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{M_2C}{\sin\angle M_2NC}$. Поскольку $\angle M_2DC = \angle M_2NC$, то $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Поскольку $\angle CLK = 180 - (\alpha + \beta)$, то, применяя теорему синусов для треугольника CLK, имеем $\frac{CL}{CK}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Таким образом, $\frac{DM_2}{NM_2}=\frac{CL}{CK}=\frac{DM_1}{NM_1}$. Точки D, N, M_1, M_2 лежат на одной окружности, следовательно, $M_1 = M_2$.

Треугольник OMC прямоугольный, радиус описанной окружности равен $CO/2$. Эта же окружность описана около треугольника CDM.

$$OC=\frac{OD}{\sin\angle DCO}=\frac{2}{\sqrt{(1-\cos\angle ACB)/2}}=8.$$

Угол CKL равен углу DCM. Тогда $\sin CKL=\frac{DM}{2R_{\text{оп}}}=\frac{DM}{OC}=0{,}5$

Ответ: 0,5

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16

Задача 8.

При каком максимальном значении параметра a $(a \neq 0)$ уравнение $(\cos x + a)^7 - (\cos^7 x + a^7) = \dfrac{7}{2} a(\cos^2 x + a\cos x + a^2)^2$ имеет более двух корней на интервале $(0;2\pi)$? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра. В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на π.

Решение.

Преобразуем выражение

$$(y+a)^7 - (y^7 + a^7) = (y+a)(y^6 + 6y^5 a + 15y^4 a^2 + 20y^3 a^3 + 15y^2 a^4 + 6ya^5 + a^6 -$$
$$- y^6 + y^5 a - y^4 a^2 + y^3 a^3 - y^2 a^4 + ya^5 - a^6) =$$
$$= (y+a)(7ay^5 + 14y^4 a^2 + 21y^3 a^3 + 14y^2 a^4 + 7ya^5) =$$
$$= 7ay(y+a)(y^4 + 2y^3 a + 3y^2 a^2 + 2ya^3 + a^4) = 7ay(y+a)(y^2 + ay + a^2)^2$$

Сделаем в исходном уравнении замену $y = \cos x$, тогда исходное уравнение примет вид

$$7ay(y+a)(y^2 + ay + a^2)^2 = \frac{7}{2} a(y^2 + ay + a^2)^2 \quad \Rightarrow \quad y(y+a) = \frac{1}{2} \text{ или}$$

$2y^2 + 2ay - 1 = 0.$ Дискриминант уравнения $D/4 = a^2 + 2 > 0$, следовательно уравнение всегда имеет два корня разных знаков $y = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2+2}}{2}$

Проверим выполнение неравенств: $-1 \le \dfrac{-a - \sqrt{a^2+2}}{2} < 0 < \dfrac{-a + \sqrt{a^2+2}}{2} \le 1$:

$$\frac{-a - \sqrt{a^2+2}}{2} \ge -1 \Rightarrow 2 - a \ge \sqrt{a^2+2} \Rightarrow \begin{cases} 2 - a > 0 \\ a^2 - 4a + 4 \ge a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 2 \\ a \le 1/2 \end{cases} \Rightarrow a \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{-a + \sqrt{a^2+2}}{2} \le 1 \Rightarrow 2 + a \ge \sqrt{a^2+2} \Rightarrow \begin{cases} 2 + a > 0 \\ a^2 + 4a + 4 \ge a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -2 \\ a \ge -1/2 \end{cases} \Rightarrow a \ge -\frac{1}{2}$$

Следовательно, когда параметр a рассматривается на отрезке [-1/2, 1/2] уравнение относительно косинуса имеет 2 различных корня (разных знаков). При этом на интервале $(0;2\pi)$ будет находиться 4 корня, если $a \in (-1/2; 1/2)$

$$x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+2}}{2}\right), \qquad x = \arccos\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+2}}{2}\right),$$

$$x = \arccos\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+2}}{2}\right), \qquad x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+2}}{2}\right)$$

При $a = 1/2$ только три корня лежат в указанном интервале $x = \pi,\ x = \dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{5\pi}{3}$. При значениях параметра больше 1/2 существует только косинус, принимающий положительные значения, и исходное уравнение будет иметь не более двух корней. Значит, условию задачи удовлетворяет только $a = 1/2$. Сумма полученных корней 3π.

Ответ: 3

Критерии оценивания

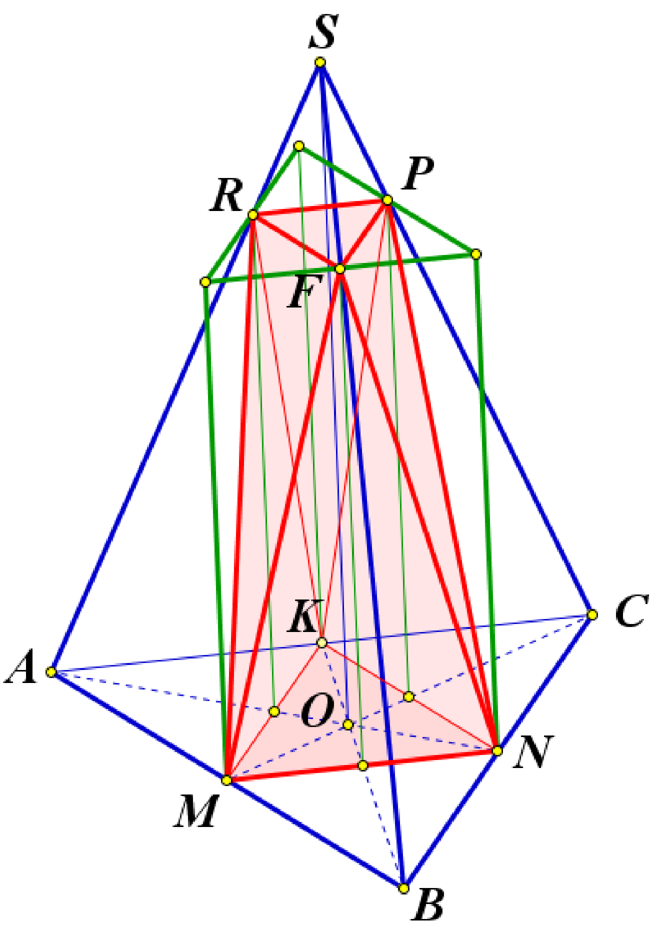
Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16

Задача 9.

Боковая грань правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонена к плоскости основания ABC под углом $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{3}{4}$. Точки M, N, K являются серединами сторон основания ABC. Треугольник MNK является нижним основанием прямой призмы. Ребра верхнего основания призмы пересекают боковые ребра пирамиды $SABC$, соответственно, в точках F, P и R. Площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках M, N, K, F, P, R равна $53\sqrt{3}$. Найдите сторону треугольника ABC.

Решение.

Высота пирамиды $SO = h$. Сторона основания пирамиды $AC = a$. Высота призмы $3h/4$, стороны основания призмы равны $a/2$.



Площадь треугольника MNK:

$$S_{MNK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

Площадь треугольника FPR:

$$S_{FPR} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$$

Площадь треугольника MPN:

$$S_{MPN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3h}{4}, \ S_{MPN} = S_{NPK} = = S_{KRM}.$$

Площадь треугольника FPM:

$$S_{FPN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{9h^2}{16} + \frac{3a^2}{64}}, \quad S_{FPN} = S_{PRK} = S_{RFM}.$$

Поскольку радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, а все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, то

$$h = a\sqrt{3}/8.$$

По условию площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках M, N, K, F, P, R равна $53\sqrt{3}$, т. е.

$$S_{\text{мн}} = S_{MNK} + S_{FPR} + 3S_{MPN} + 3S_{FPN} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9ah}{16} + \frac{3a}{8}\sqrt{\frac{9h^2}{16} + \frac{3a^2}{64}} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{128} + \frac{3a}{8}\sqrt{\frac{27a^2}{16\cdot 64} + \frac{3a^2}{64}} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{128} + \frac{15a^2\sqrt{3}}{256} = \frac{53a^2\sqrt{3}}{16^2} = 53\sqrt{3}.$$

Следовательно, $a = 16$.

Ответ: 16

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»