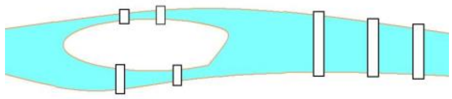
Профиль олимпиады: «Инженерное дело»,
Академическое соревнование по математике

Класс участия: 10-11 Вариант задания: 1

Задача 1 (5 *баллов*). Дан прямоугольник $П_1$. Если от него отрезать квадрат Q, одна из сторон которого совпадает с меньшей стороной $П_1$, то останется прямоугольник $П_2$. Если затем от $П_2$ отрезать прямоугольник с отношением сторон $2:1$, одна из коротких сторон которого совпадает с меньшей стороной $П_2$, а одна из длинных сторон лежит на стороне квадрата Q, то останется прямоугольник $П_3$, подобный $П_1$. Найдите отношение длинной стороны $П_1$ к короткой.

Задача 2 (10 *баллов*). На реке один остров. Имеются 7 мостов: 3 длинных – с северного берега реки на южный, и 4 коротких – два с острова на северный берег реки и два с острова на южный берег. Сколькими способами можно перейти с северного берега реки на южный, пройдя каждый мост ровно один раз?



Задача 3 (10 *баллов*). В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$ проведена биссектриса AD. Через точку *D* построена прямая, параллельная касательной к описанной около треугольника ABC окружности в точке *A* и пересекающая *AC* в точке *E*. Найдите площадь треугольника *DOE*, если *O* – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

Задача 4 (10 *баллов*). С корабля рассыпались 3 разные пары ботинок. Каждый ботинок, независимо от других, с вероятностью $2/3$ приплывает на остров Тринидад, а с вероятностью $1/3$ – на остров Тобаго. С какой вероятностью на обоих островах окажется хотя бы по одной паре ботинок с корабля? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

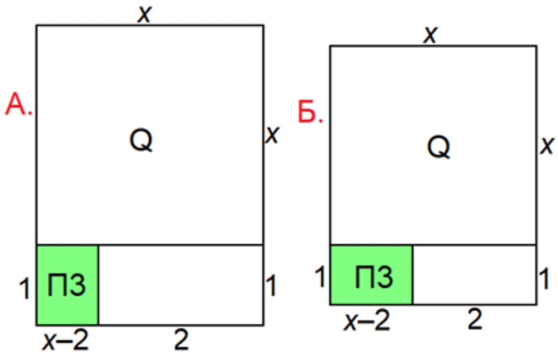
Задача 5 (15 *баллов*). В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба *BD*, наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ и пересекает прямую *AC* в точке, лежащей на отрезке, соединяющим вершину A и точку пересечения диагоналей ромба. Найдите угол между диагональю ромба B_1D и плоскостью сечения, если высота призмы в 4 раза больше диагонали ромба *BD*.

Решение варианта №1 (Инженерное дело 10-11 классы)

1. (5 баллов) Дан прямоугольник $П_1$. Если от него отрезать квадрат Q, одна из сторон которого совпадает с меньшей стороной $П_1$, то останется прямоугольник $П_2$. Если затем от $П_2$ отрезать прямоугольник с отношением сторон $2:1$, одна из коротких сторон которого совпадает с меньшей стороной $П_2$, а одна из длинных сторон лежит на стороне квадрата Q, то останется прямоугольник $П_3$, подобный $П_1$. Найдите отношение длинной стороны $П_1$ к короткой.

Решение:

Пусть короткая сторона П1 равна x, длинная $x+1$. По условию $x > 2$. Возможны два случая:



В случае А) подобие П3 и П1 дает урвнение

$$\frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{x} \implies x = (x+1)(x-2) \implies x^2 - 2x - 2 = 0 \implies x = 1 + \sqrt{3}.$$

Тогда отношение сторон П1: $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ ≈1,366.

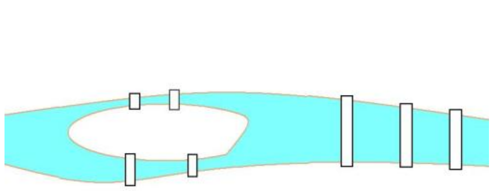
В случае Б) подобие П3 и П1 дает урвнение

$$\frac{x-2}{1} = \frac{x+1}{x} \implies x(x-2) = x+1 \implies x^2 - 3x - 1 = 0 \implies x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Тогда отношение сторон П1: $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$ ≈1,303.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$.

2. (10 баллов) На реке один остров. Имеются 7 мостов: 3 длинных – с северного берега реки на южный, и 4 коротких – два с острова на северный берег реки и два с острова на южный берег. Сколькими способами можно перейти с северного берега реки на южный, пройдя каждый мост ровно один раз?

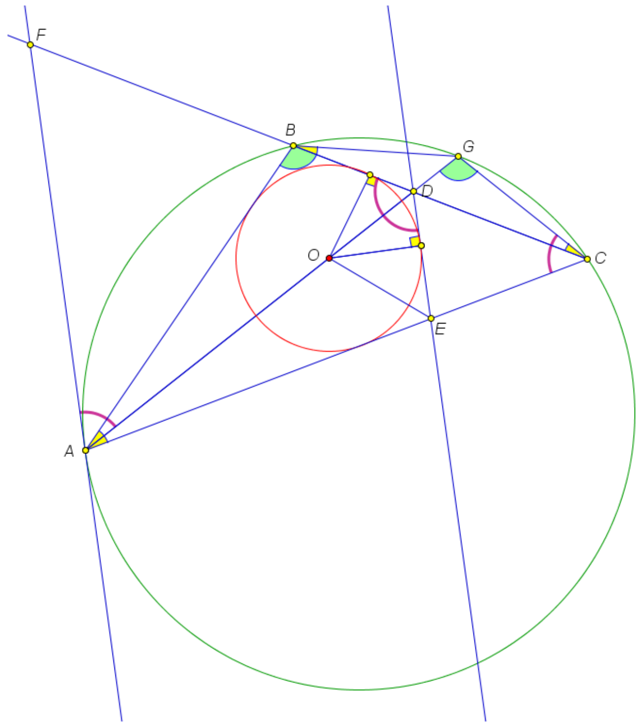


Решение. Первый тип маршрутов: «не разворачиваться на острове». Имеются 5 переходов между берегами реки: три — это длинные мосты; 4-й состоит из северо-западного короткого моста и одного (надо выбрать, какого) из 2 южных коротких мостов; 5-й – два оставшихся коротких моста. Можно $5!\cdot 2 = 240$ способами выбрать последовательность прохождения этих 5 переходов.

Второй тип маршрутов: «можно разворачиваться на острове». Можно 3! способами выбрать последовательность прохождения длинных мостов. Ещё надо сделать две петли – по северным и по южным коротким мостам. Для каждой петли надо выбрать, проходить её при первом или при втором нахождении на данном берегу реки, а также по или против часовой стрелки. В итоге число маршрутов второго типа умножится на $2\cdot2\cdot2\cdot2$, их будет 96.

Ответ: 336.

3. (10 баллов) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$ проведена биссектриса AD. Через точку D построена прямая, параллельная касательной к описанной около треугольника ABC окружности в точке A и пересекающая AC в точке E. Найдите площадь треугольника DOE, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.



Решение. Докажем, что прямая DE касается в вписанной в треугольник ABC окружности. Пусть G – точка пересечения прямой AD с описанной окружностью. А F – точка пересечения прямой BC с касательной к описанной около треугольника ABC окружности в точке A. Тогда $\angle GAF = \angle ADE = \angle GCA$, $\angle ABD = \angle AGC$, $\angle BAD = \angle GAC$, следовательно, $\angle BDA = \angle ADE$. Отсюда получаем, что DE касается в вписанной в треугольник ABC окружности.

Площадь треугольника DOE найдем по формуле $S_{DOE} = \frac{1}{2} DE \cdot r$, где r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

По теореме косинусов найдем угол $\angle ABC = \beta$:

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{25+64-49}{2\cdot5\cdot8} = \frac{1}{2}, \quad \beta = 60^\circ.$$

Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\beta = 10\sqrt{3}, \quad S_{ABC} = \frac{P_{ABC} r}{2} = \frac{(AB+BC+AC)r}{2} = 10r, \quad r = \sqrt{3}.$$

По теореме косинусов найдем угол $\angle ACB = \gamma$: $\cos\gamma = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{49+64-25}{2\cdot7\cdot8} = \frac{11}{14}$.

Тогда $\sin\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

Имеем $\angle DEC = \angle FAC = \angle FAB + \angle BAC = \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$. Тогда по теореме синусов $\frac{DE}{\sin\gamma} = \frac{DC}{\sin 120^\circ}$, $DE = \frac{2DC}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{5}{7} DC$. По свойству биссектрисы

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{7}$, $DC=\frac{7}{12}BC=\frac{14}{3}$, $DE=\frac{5}{7}DC=\frac{10}{3}$. Тогда $S_{DOE}=\frac{1}{2}DE\cdot r=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

4. (10 баллов) С корабля рассыпались 3 разные пары ботинок. Каждый ботинок, независимо от других, с вероятностью $2/3$ приплывает на остров Тринидад, а с вероятностью $1/3$ – на остров Тобаго. С какой вероятностью на обоих островах окажется хотя бы по одной паре ботинок с корабля? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Решение:

Для каждой пары ботинок вероятность целиком попасть на Тринидад $4/9$, целиком попасть на Тобаго $1/9$, попасть на разные острова $4/9$.

Введем следующие обозначения:

A — событие „на Тринидад ни одной пары"; B — событие „на Тобаго ни одной пары".

Тогда AB — событие „никуда ни одной пары".

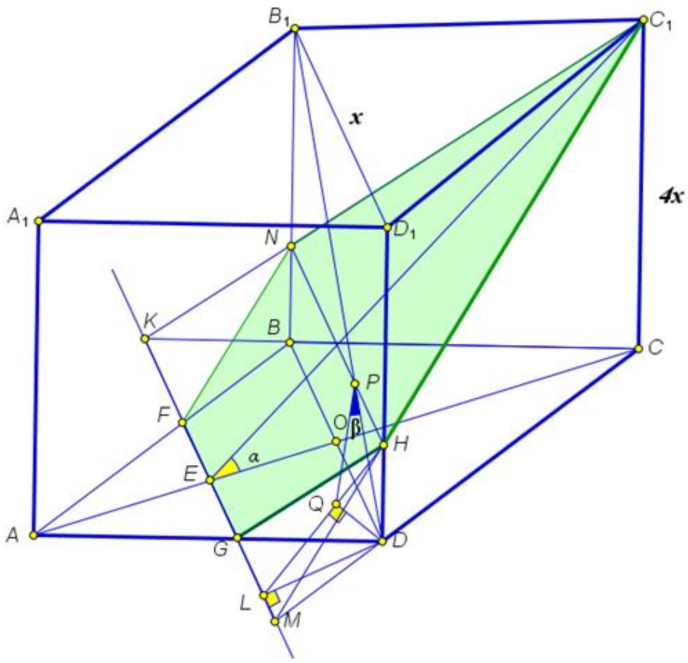
$$\mathbf{P}(A)=\left(1-\frac{4}{9}\right)^3=\frac{5^3}{9^3};\qquad \mathbf{P}(B)=\left(1-\frac{1}{9}\right)^3=\frac{8^3}{9^3};\qquad \mathbf{P}(AB)=\left(\frac{4}{9}\right)^3.$$

Вероятность нужного нам события

$$\mathbf{P}(\overline{A}\,\overline{B})=1-\mathbf{P}(A+B)=1-\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(AB)=\frac{9^3-5^3-8^3+4^3}{9^3}=\frac{156}{729}$$

Ответ: $52/243$.

5. (15 баллов) В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C_1 параллельно диагонали ромба BD, наклонено к плоскости основания призмы под углом $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ и пересекает прямую AC в точке, лежащей на отрезке, соединяющим вершину А и точку пересечения диагоналей ромба. Найдите угол между диагональю ромба B_1D и плоскостью сечения, если высота призмы в 4 раза больше диагонали ромба BD.



Решение. Обозначим $BD = x$, $CC_1 = 4x$. E – точка пересечения плоскости сечения с AC. Плоскость сечения и плоскость основания $ABCD$ пересекаются по прямой FG, $F \in AB, G \in AD.$ Поскольку диагонали ромба перпендикулярны, а $FG \| BD$, $FG \perp AC$, то угол α между плоскостью сечения и плоскостью основания совпадает с углом CEC_1, $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{3}$. Тогда $CE = 3x.$ Пусть K, M – точки пересечения прямой FG с прямыми BC и CD соответственно. Точки N и H – точки пересечения прямых C_1K и C_1M с ребрами BB_1 и DD_1 соответственно. Пусть $\dfrac{DM}{CM} = k.$ Тогда $\dfrac{HD}{C_1C} = k,$ и $HD = 4kx.$ Поскольку $B_1D = \sqrt{17}x,$ то $PD = \sqrt{17}kx,$ где P – точка пересечения B_1D с NH. Пусть $DL \perp GM, L \in GM,$ а $DQ \perp HL, Q \in HL.$ Тогда прямая DQ перпендикулярна плоскости сечения, и проекцией PD на плоскость сечения является $PQ.$ Угол β между диагональю ромба B_1D и плоскостью сечения равен углу DPQ в прямоугольном треугольнике DPQ, $\sin\beta = \dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{DQ}{\sqrt{17}kx}.$ Поскольку $\dfrac{DL}{CE} = k,$ то $DL = 3kx,$ и $HL = 5kx,$ $DQ = \dfrac{12kx}{5}.$ Отсюда получаем $\sin\beta = \dfrac{12}{5\sqrt{17}}$, $\beta = \arcsin\dfrac{12\sqrt{17}}{85}.$ **Ответ:** $\arcsin\dfrac{12\sqrt{17}}{85}$ **.**

Правила выставления баллов за выполнение заданий

Инженерное дело. Математика 10-11 классы

<table>
<tr><th>№</th><th>Критерии оценивания задания</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Геометрия и алгебра</td><td>0, 2, 3, 4, 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Оба случая рассмотрены. Допущена одна арифметическая ошибка.</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Верно найдено отношение сторон для одного из возможных случаев.</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Верно составлено уравнение для нахождения отношения сторон для одного из возможных случаев.</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Комбинаторика</td><td>0, 3, 5, 8, 10</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="2">Все рассуждения верные. Допущена одна арифметическая ошибка.</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Верно найдено количество способов без учета разворота на острове, предприняты попытки вычисления числа способов с учетом разворота на острове.</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Верно найдено количество способов без учета разворота на острове.</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Планиметрия</td><td>0, 3, 5, 8, 10</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.</td><td>10</td></tr>
</table>

Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.		**8**
Доказано, что DE является касательной к вписанной в треугольник ABC окружности, найден радиус этой окружности. Предприняты верные попытки поиска DE.		**5**
Доказано, что DE является касательной к вписанной в треугольник ABC окружности.		**3**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.		**0**
4.	Теория вероятностей	**0, 3, 5, 8, 10**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.		**10**
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные результаты получены. Допущена одна арифметическая ошибка.		**8**
Задача сведена к поиску вероятности противоположного события. Верно использованы теоремы сложения и умножения вероятностей.		**5**
Верно найдены вероятности для каждой пары ботинок целиком попасть на каждый остров и на разные острова.		**3**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.		**0**
5.	Стереометрия	**0, 4, 8, 12, 15**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ. Сделан верный чертеж; все обозначения, используемые в решении, четко определены; приведена непротиворечивая цепочка рассуждений, опирающаяся на известные из школьного курса факты; используемые утверждения не из школьного курса строго доказаны.		**15**
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены. Допущена одна арифметическая ошибка.		**12**

Указаны все необходимые соотношения. Верно определен прямоугольный треугольник, с помощью которого можно найти требуемый угол.	**8**
Полностью описано построение сечения призмы. Доказано, что угол наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы есть угол C_1EC, где E - точка пересечения плоскости сечения с прямой AC. Построен угол между диагональю ромба BD_1 и плоскостью сечения.	**4**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	**0**