Заключительный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль «Инженерное дело»

Специализация «Математика»

Класс участия: 9

Задача 1 (8 баллов). Решите уравнение

$$\frac{x^2}{4}+\frac{2{,}25x^2}{(2x-3)^2}=10$$

Решение:

Выделим полный квадрат выражения в левой части уравнения:

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{1{,}5x}{2x-3}\right)^2-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1{,}5x}{2x-3}-10=0,$$

$$\left(\frac{2x^2-3x+3x}{2\cdot(2x-3)}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2x-3}-10=0,$$

$$\left(\frac{x^2}{2x-3}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2x-3}-10=0.$$

Заменим $\frac{x^2}{2x-3}=t$

Тогда $t^2-\frac{3}{2}t-10=0,$ $\left[\begin{array}{l} t=-\frac{5}{2} \\ t=4 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{2x-3}=-\frac{5}{2}, \\ \frac{x^2}{2x-3}=4, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2x^2+10x-15=0, \\ x^2-8x+12=0 \end{array}\right. \\ x\neq\frac{3}{2}, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{-5-\sqrt{55}}{2}, \\ x=\frac{-5+\sqrt{55}}{2}, \\ x=2, \\ x=6. \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{-5-\sqrt{55}}{2};\frac{-5+\sqrt{55}}{2};2;6.$

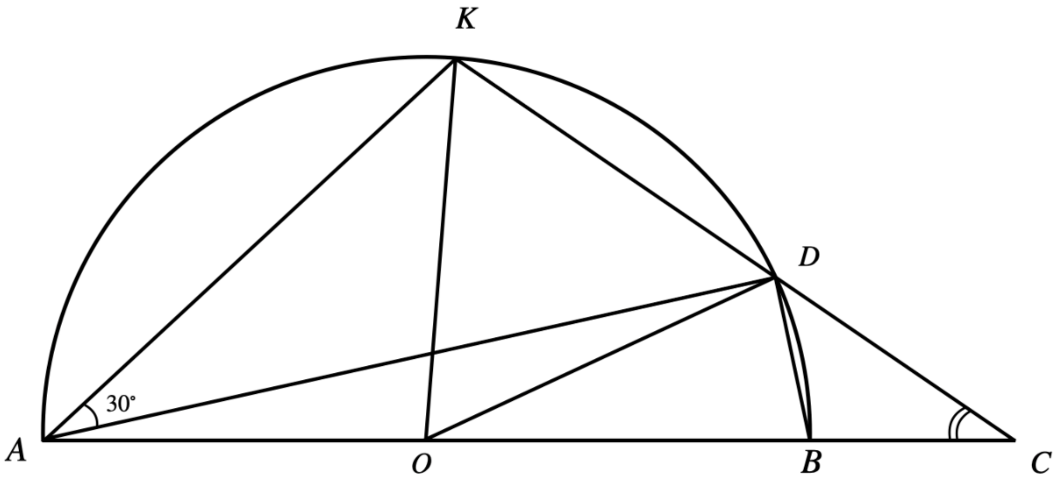
Критерии проверки:

Баллы	Содержание критерия
8	Обоснованно получен правильный ответ
6	Верно найдены не менее двух решений, при вычислении других решений допущена ошибка.
4	Верно найдены значения промежуточной переменной, дальнейшее решение неверно или отсутствует
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 2 (8 баллов). Продолжения диаметра AB полуокружности и ее хорды KD пересекаются в точке C так, что точка B лежит между точками A и C, а точка D лежит между точками K и C. Какую часть площади треугольника AKC составляет площадь треугольника BDC, если угол KAD равен 30°, а синус угла KCA равен √3/3.

Решение:

Пусть точка O – центр полуокружности, тогда $\angle KOD = 2 \cdot \angle KAD = 60°$. Следовательно, треугольник *KOD* равносторонний и *OK*=*OD*=*KD*=*r*, где *r* – радиус полуокружности. В треугольнике *KOC* по теореме синусов получим $\frac{CO}{\sin\angle OKC} = \frac{OK}{\sin\angle KCO}$, то есть $2 \cdot \frac{CO}{\sqrt{3}} = \frac{r \cdot 3}{\sqrt{3}}$, а значит $CO = \frac{3}{2}r$. Следовательно, $\frac{CB}{CA} = \frac{1}{5}$. По свойству секущих, проведенных к окружности из точки *C* имеем: $CD \cdot CK = CB \cdot CA,$ то есть $CD \cdot (CD + r) = \frac{r}{2} \cdot \frac{5r}{2}$.



Тогда $4CD^2 + 4r \cdot CD - 5r^2 = 0.$

Откуда $CD = \frac{-2+\sqrt{24}}{4} \cdot r = \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \cdot r$ и $CK = r + \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \cdot r = \frac{1+\sqrt{6}}{2} \cdot r.$

$$\frac{S_{BDC}}{S_{AKC}} = \frac{CD}{CK} \cdot \frac{CB}{CA} = \frac{(-1+\sqrt{6}) \cdot 2}{2 \cdot (1+\sqrt{6})} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}{25}.$$

Или можно использовать подобие треугольников BCD и KCA. Тогда

$$\frac{S_{BDC}}{S_{AKC}} = \left(\frac{CD}{CA}\right)^2 = \left(\frac{\frac{-1+\sqrt{6}}{2} \cdot r}{\frac{5}{2} \cdot r}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}{25}$$

Ответ: $\frac{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}{25}$

Критерии проверки:

Баллы	Содержание критерия
8	Обоснованно получен верный ответ
6	При верном и обоснованном ходе решения допущена арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
4	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (найдено отношение CO/CA, где O – центр полуокружности), дальнейшее решение неверно или отсутствует
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 3 (10 баллов). Компания А. владеет группой отелей, расположенных у подножия горы М. Для отдыхающих на склоне горы оборудованы две трассы: одна – трасса 2 уровня на высоте 50 м., другая – трасса 3 уровня на высоте 100 м. Подняться на нужную высоту и спуститься с нее можно только на фуникулере, который работает исключительно в светлое время суток. В остальное время суток находиться на склоне горы строго запрещено. При подъеме на максимальную высоту и при спуске к подножию горы все пассажиры обязаны покинуть фуникулер.

Компания решила открыть кофейню рядом с одной из трасс и с целью получения максимальной прибыли провела исследование, которое показало, что за весь день:

1. из отдыхающих, входящих в фуникулер на высоте 50 м., половина едет вниз, а другая половина едет наверх;
2. среди отдыхающих, выходящих из фуникулера, меньше трети делают это на высоте 100 м.;
3. число отдыхающих, которые поднимаются со 2 уровня на 3 уровень, равно числу отдыхающих, спустившихся с 3 уровня на второй.

На какой высоте выгоднее открыть кофейню? Каково наименьшее число отдыхающих, входящих в фуникулер на высоте 50 м., если число отдыхающих, выходящих из фуникулера на высоте 100 м, составляет не менее 300?

Решение:

Исходя из условия задачи, число отдыхающих, выходящих их фуникулера в течение дня на любой высоте, равно числу отдыхающих, входящих в него на данной высоте.

Обозначим n_{12} – число отдыхающих, которые поднялись с первого уровня, расположенного у подножия горы, на второй уровень, расположенный рядом с трассой 2 уровня; n_{21} – число отдыхающих, спустившихся со второго уровня на первый. Аналогично определим числа n_{13}, n_{31}, n_{23} и n_{32}.
Тогда число отдыхающих, выходящих на третьем уровне равно $(n_{13} + n_{23})$. Число отдыхающих, вошедших в фуникулер на 3 уровне, равно $(n_{32} + n_{31})$. Так как числа $n_{13} + n_{23} = n_{32} + n_{31}$ и каждое из них меньше трети числа всех отдыхающих, выходящих из фуникулера, то числа $n_{13} + n_{23} = n_{32} + n_{31} < n_{12} + n_{21}$. Так как по условию (1) $n_{23} = n_{21}$, то $n_{13} < n_{12}$.
Чтобы сравнить загруженность трасс, следует сравнить $(n_{12} + n_{32})$ и $(n_{13} + n_{23})$. И так как $n_{32} = n_{23}$, то $n_{12} + n_{32} > n_{13} + n_{23}$. Таким образом, загруженность трассы 2 уровня выше, а значит кофейню целесообразно открыть на высоте 50 м.
Так как $n_{12} + n_{32} > n_{13} + n_{23} \geq 300$, то наименьшее значение $n_{12} + n_{32} = 302$ (301 не делится на 2). При этом условие задачи может быть реализовано, т.к. если число входящих в фуникулер на 2 уровне равно 302, то $n_{23} = n_{21} = \frac{1}{2} \cdot 302 = 151$ и так как $n_{32} = n_{23} = 151$ и число, выходивших на 3 уровне равно 300, то $n_{31} = 300 - 151 = 149$. Тогда общее число выходящих из фуникулера равно 300+302+151+149=902, а значит условие $300 < \frac{1}{3} \cdot 902$ выполнено.

Ответ: 50 м.; 302.

Критерии проверки:

Баллы	Содержание критерия
10	Обоснованно получен правильный ответ на оба вопроса
8	Обоснованно получен правильный ответ на первый вопрос, ответ на второй вопрос недостаточно обоснован.
6	Обоснованно получен ответ только на один вопрос, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
4	Решение верно начато, сделаны правильные промежуточные выводы.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

Задача 4 (10 баллов). Фигура состоит из непустого множества точек координатной плоскости XOY, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 6x \\ y < x \\ y > |x-3| - a \end{cases}$$

Найдите все действительные значения параметра a, при которых внутри фигуры лежат не более 11 точек с целыми координатами.

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 6x & (1) \\ y < x & (2) \\ y > |x-3| - a & (3) \end{cases}$$

Неравенством (1) задается множество точек плоскости XOY, расположенных внутри круга $(x-3)^2 + y^2 < 9$ с центром в точке $(3;0)$ и радиуса 3.

Неравенством (2) задается множество точек плоскости XOY, расположенных ниже прямой $y = x$.

Неравенством (3) задается множество точек плоскости, расположенных выше графика функции $y = |x-3| - a$.

Прямая $y = x$ пересекает окружность в точках (0;0) и (3;3).

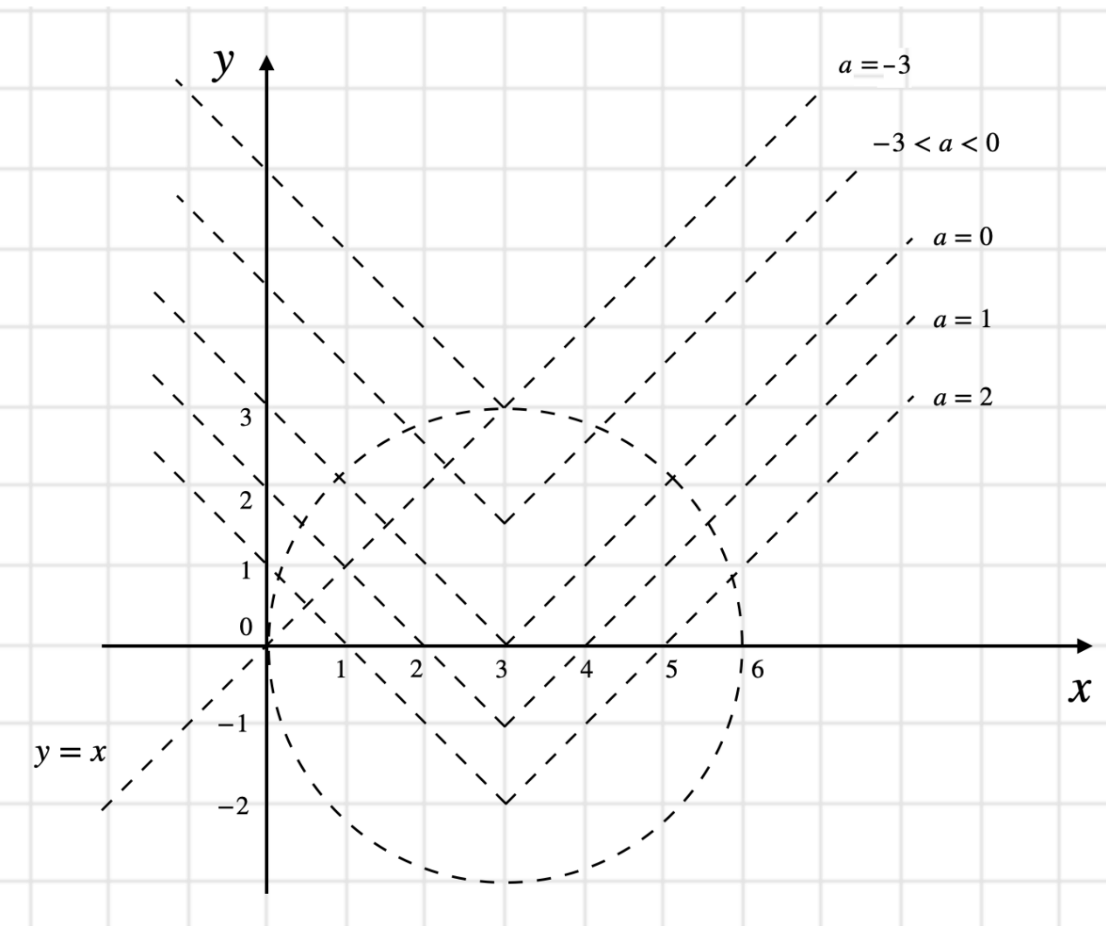


График $y = |x-3| - a$ можно получить из графика функции $y = |x-3|$ смещением на $-a$ единиц вдоль оси OY.
При $a = 0$ фигура ограничена снизу графиком функции $y = |x-3|$, причем прямая $y = x - 3$ параллельна $y = x$, а прямая $y = x + 3$ пересекает прямую $y = x$ в точке $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Внутри фигуры находятся 3 точки с целыми координатами: (3;1), (3;2), и (4;2).
При $a < 0$ график $y = |x-3| - a$ перемещается вверх вдоль прямой $x = 3$ и множество точек, находящихся внутри фигуры, не превысит 3, т. е. такие значения параметра будут удовлетворять условию до тех пор, пока фигура состоит из непустого множества точек. Фигура вырождается при $a = -3$. Следовательно, $a \in (-3; 0]$ удовлетворяют условию.
При $a \in (0; 1]$ внутри фигуры дополнительно к имеющимся трем точкам добавятся еще 4 точки, которые лежали на графике $y = |x-3|$, внутри круга и ниже прямой $y = x$ $\big((2;1),\ (3;0), (4;1), (5;2)\big)$, т.е. точек фигуры, имеющих целые координаты, будет 7.
На графике $y = |x-3| - 1$ тоже 4 точки, имеющих целые координаты $\big((2;0), (3;-1), (4;0), (5;1)\big)$. А значит, при $a \in (1; 2]$ внутри фигуры лежат 11 точек с целыми координатами.
При $a > 2$ количество таких точек превысит 11. Таким образом, внутри фигуры лежат не более 11 точек с целыми координатами при $a \in (-3; 2]$.

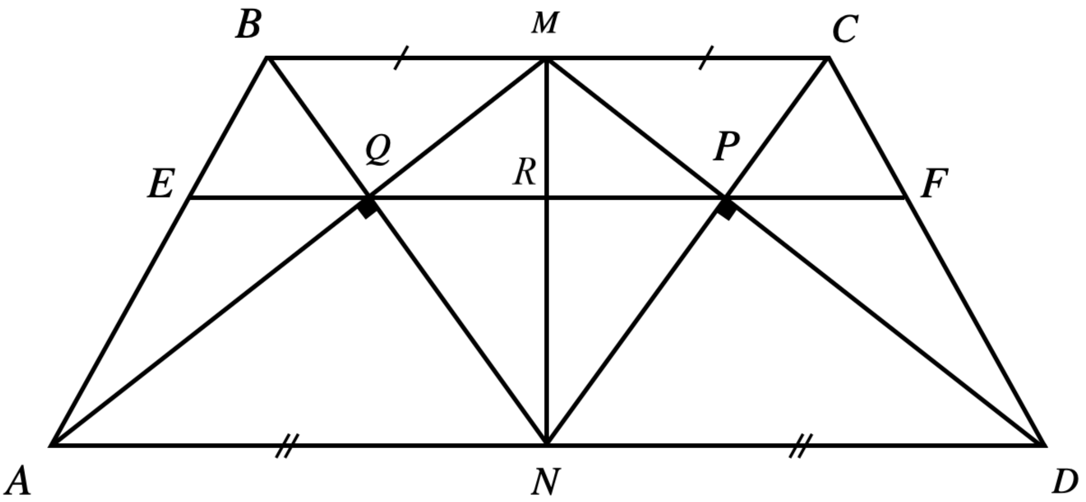
Ответ: $a \in (-3;2]$

Критерии проверки:

Баллы	Содержание критерия
10	Обоснованно получен правильный ответ
8	При обоснованном решении ответ отличается от правильного одной точкой.
6	Получен промежуток для параметра, который входит в правильный ответ.
4	Решение правильно начато, получены отдельные значения параметра, удовлетворяющие условию.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

Задача 5 (14 баллов). В трапеции ABCD точки M и N служат серединами оснований BC и AD соответственно. Известно, что AM ⊥ BN, NC ⊥ MD. Найдите площадь трапеции ABCD, если BM = 1, а угол BNC равен 60°.

Решение:



Обозначим $Q = AM \cap BN$, $P = NC \cap MD$, $QP \cap MN = R$. Фигуры $ABMN$ и $DCMN$ – трапеции с равными основаниями и общей стороной MN. По свойству диагоналей трапеции $\Delta BQM \sim \Delta NQA$ *и* $\Delta MPC \sim \Delta DPN$, следовательно, $\frac{MQ}{AQ} = \frac{BM}{NA} = \frac{MC}{DN} = \frac{MP}{DP}$. Тогда $QP \parallel AD \parallel BC$.

Обозначим $E = QP \cap AB$ *и* $F = QP \cap CD$. *Тогда* $ER \parallel BM$, $RF \parallel MC$, следовательно $EQ = QR = \frac{AE}{AB} \cdot BM = \frac{NR}{NM} \cdot BM = \frac{NR}{NM} \cdot MC = PR = PF$ по свойству отрезков прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей и параллельной основаниям трапеции.

Таким образом, $QR = RP$. В четырехугольнике $QMPN$ $\angle Q + \angle P = 90° + 90° = 180°$, следовательно, он вписан в окружность с диаметром MN. QP – хорда этой окружности, которую диаметр делит пополам, а значит MN ⊥ QP и, следовательно, $MN \perp BC$. Тогда в треугольнике BNC медиана MN служит высотой и, т.к. угол $BNC = 60°$, то треугольник BNC – правильный со стороной $BC = 2BM = 2$. Следовательно, $MN = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Так как треугольник BNC правильный и $QP \parallel BC$, то треугольник QNP тоже правильный и NR – его высота и, значит, биссектриса. Следовательно, $\angle QNM = 30°$ и из ΔQMN $(\angle Q = 90°)$ $\angle QMN = 60°$. Тогда $QM = MN \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AM = 2MN = 2\sqrt{3}$, $AQ = AM - QM = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Следовательно, $\frac{BM}{NA} = \frac{MQ}{AQ} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

Таким образом, $AN = 3BM = 3$, а значит $AD = 6$ и $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot (6 + 2) \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$

P.S. Отношение $\frac{MQ}{QA}$ может быть найдено и иначе: $\frac{MQ}{QA} = \frac{MR}{RN} = \frac{QM^2}{QN^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}MN\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}MN\right)^2} = \frac{1}{3}$ (т.к. QR – высота в прямоугольном треугольнике MQN).

Критерии проверки:

Баллы	Содержание критерия
14	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном и обоснованном ходе решения (доказано, что треугольник BNC правильный) получен неверный ответ, или дальнейшее решение недостаточно обосновано.
6	Решение задачи верно начато, сделаны верные промежуточные выводы с использованием свойств диагоналей трапеций, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.