Заключительный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль «Инженерное дело»

Специализация «Математика»

Класс участия: 8

Задача 1 (8 баллов). Вычислите

$$\frac{2\left(t+4\sqrt{t}-12\right)+t+11\sqrt{t}+30}{\sqrt{t}+6}-3\sqrt{t}$$

Решение:

$$\frac{2\left(t+4\sqrt{t}-12\right)+t+11\sqrt{t}+30}{\sqrt{t}+6}-3\sqrt{t}=\frac{2t+8\sqrt{t}-24+t+11\sqrt{t}+30}{\sqrt{t}+6}-3\sqrt{t}=\frac{3t+19\sqrt{t}+6}{\sqrt{t}+6}-3\sqrt{t}=$$
$$\frac{3\left(\sqrt{t}+\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt{t}+6\right)}{\sqrt{t}+6}-3\sqrt{t}=3\sqrt{t}+1-3\sqrt{t}=1.$$

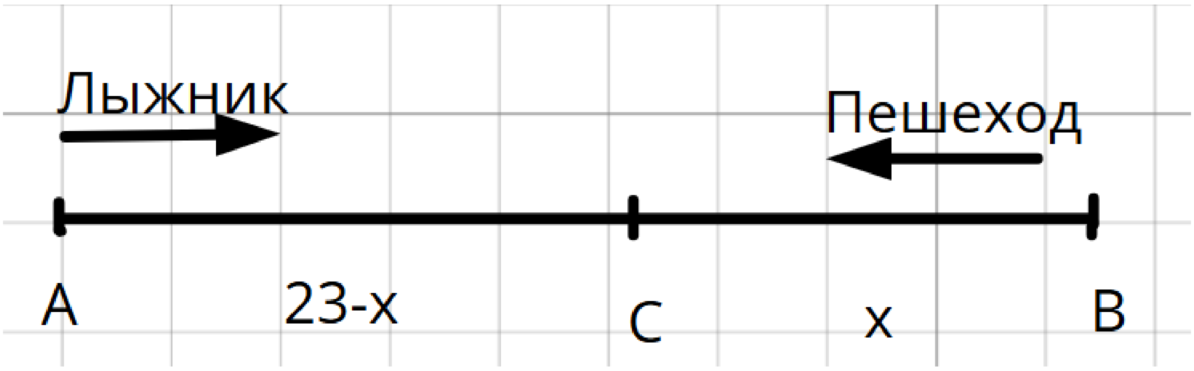
Ответ: 1.

Критерии проверки:

Баллы	Содержание критерия
8	Верное решение и верный ответ
4	Допущена 1 арифметическая ошибка.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

Задача 2 (8 баллов). Лыжник и пешеход отправляются одновременно навстречу друг другу из городов А и В, расстояние между которыми 23 км, и встречаются через 2 часа после отправления. Затем они продолжают путь, причем лыжник прибывает в В на 7,5 часов раньше, чем пешеход в А. Найдите скорость лыжника, учитывая, что двигались они с постоянными скоростями.

Решение:



$0 < x < 23$

Скорость пешехода $\frac{x}{2}$ км/ч. Время пешехода после встречи $\frac{2(23-x)}{x}$ ч

Скорость лыжника $\frac{23-x}{2}$ км/ч. Время лыжника после встречи $\frac{2x}{23-x}$ ч

Составим уравнение по условию задачи: время П – время Л = 7,5 ч.

$$\frac{2(23-x)}{x} - \frac{2x}{23-x} = \frac{15}{2}$$

$$4(23-x)^2 - 4x^2 = 15x(23-x)$$

$$4(23-x-x)(23-x+x) = 15x(23-x)$$

$$\ldots$$

$$15x^2 - 529x + 2116 = 0$$

D=391^2, $x_1 = 4{,}6$ км, $x_2 = 30\frac{2}{3} > 23$.

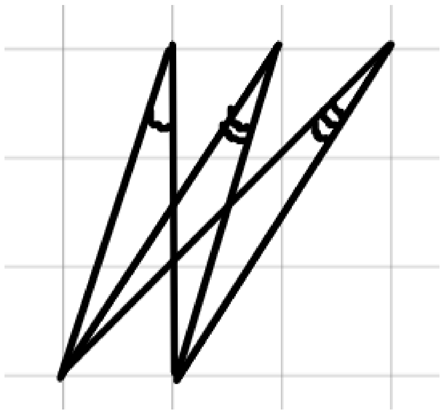
Скорость лыжника 9,2 км/ч.

Ответ: 9,2 км/ч.

Критерии проверки:

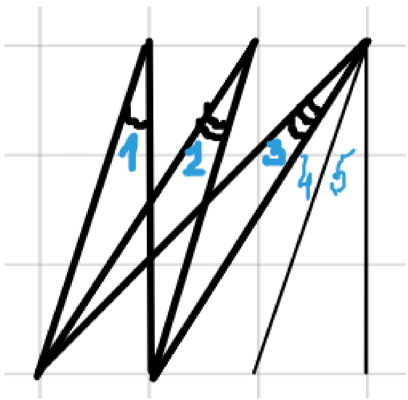
Баллы	Содержание критерия
8	Верное решение и верный ответ
6	Допущена 1 арифметическая ошибка.
4	Верно введены переменные и составлено уравнение.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

Задача 3 (10 баллов). Посмотрите рисунок на клетчатой бумаге. Найдите сумму отмеченных углов.



Решение:

Исходя из условия задачи, число отдыхающих, выходящих их фуникулера в течение дня на любой высоте, равно числу отдыхающих, входящих в него на данной высоте.



$\angle 1 = \angle 5$ (равны треугольники, в которых расположены эти углы).
$\angle 2 = \angle 4$ (равны треугольники, в которых расположены эти углы).
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4 + \angle 3 = 45^0$.

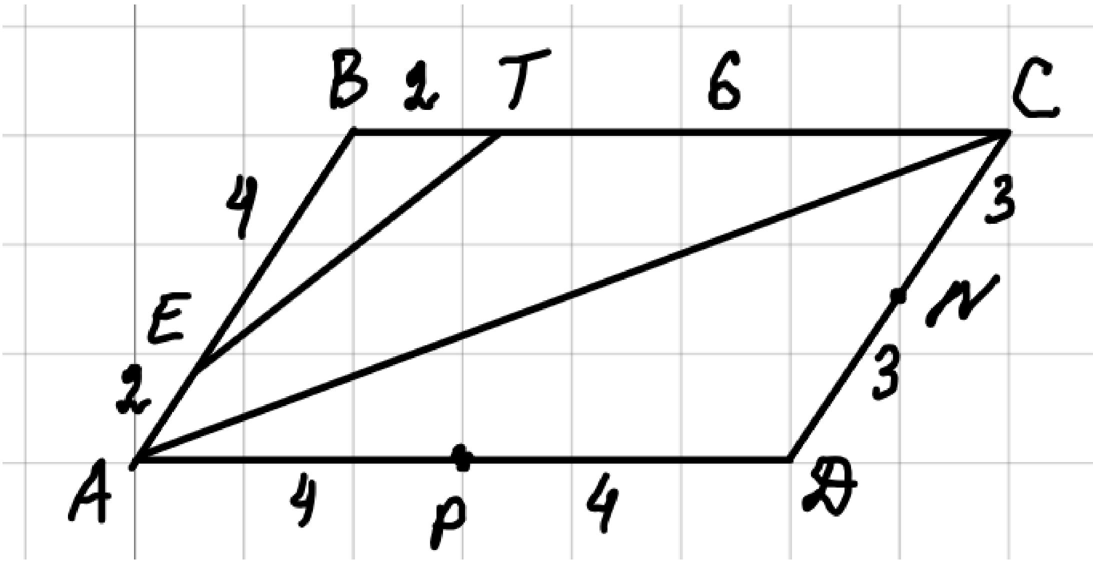
Ответ: 45^0.

Критерии проверки:

Баллы	Содержание критерия
10	Верное, обоснованное решение и ответ.
8	Верный ответ, но решение не до конца обосновано.
5	Верные обоснования и ход решения, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

Задача 4 (12 баллов). В параллелограмме АВСД на сторонах АВ, ВС, СД и АД отмечены соответственно точки Е, Т, N и Р таким образом, что отрезки АЕ=2 см, ВЕ=4 см, ВТ=2 см, ТС=6 см, CN=ND=3 см, DP=AP=4 см. Найдите площадь четырехугольника ETNP, если площадь параллелограмма ABCD равна 36 см².

Решение:



Пусть $S_{ABCD} = S$, тогда $S_{ABC} = S_{ACD} = \frac{1}{2}S$.

1. $\frac{S_{ABT}}{S_{ABC}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, S_{ABT} = \frac{1}{4} * \frac{1}{2}S = \frac{1}{8}S$. (отношение площадей треугольников с общей высотой).
2. $\frac{S_{BTE}}{S_{ABT}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, S_{BTE} = \frac{2}{3}S_{ABT} = \frac{2}{3} * \frac{1}{8}S = \frac{1}{12}S$.
3. $\frac{S_{PDN}}{S_{ADC}} = \frac{DP*DN}{DA*DC} = \frac{4*3}{8*6} = \frac{1}{4}, S_{PDN} = \frac{1}{4} * \frac{1}{2}S = \frac{1}{8}S$. (отношение площадей треугольников с равными углами).
4. $S_{ABD} = \frac{1}{2}S; \frac{S_{AEP}}{S_{ABD}} = \frac{2*4}{6*8} = \frac{1}{6};\ S_{AEP} = \frac{1}{6} * \frac{1}{2}S = \frac{1}{12}S$.
5. $\frac{S_{CTN}}{S_{BCD}} = \frac{6*3}{8*6} = \frac{3}{8};\ S_{CTN} = \frac{3}{16}S$.
6. $S_{ETNP} = S - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{3}{16}\right)S = \frac{25}{48}S$.
7. $S_{ETNP} = \frac{25}{48} * 36 = 18{,}75$.

Ответ: 18,75

Критерии проверки:

Баллы	Содержание критерия
12	Верное, обоснованное решение и верный ответ.
10	Верный ответ, но решение не до конца обосновано.
6	Верные обоснования и ход решения, но получен неверный ответ из-за одной вычислительной ошибки.
4	Верный ход решения и верные обоснования, но итоговый ответ не найден.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

Задача 5 (12 баллов). Найдите значения параметра а, при которых уравнение $x^2-(2a-10)x-3a^2-2a+21=0$ имеет корни разных знаков. В ответе укажите наименьшее натуральное значение параметра a.

Решение:

D > 0, чтобы были корни, свободный член < 0, чтобы корни были разных знаков.

$$\begin{cases} D>0; \\ -a^2-2a+21<0. \end{cases}$$

$D=(2a-10)^2-4(-3a^2-2a+21)=\ldots=16(a-1)^2>0$ при всех а, кроме 1;

$$x_1=\frac{2a-10+4(a-1)}{2}=a-5+2a-2=3a-7;$$

$$x_2=\frac{2a-10-4(a-1)}{2}=a-5-2a+2=-a-3.$$

x*1*>0;x2<0.

$$\begin{cases} x_1>0; \\ x_2<0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1<0; \\ x_2>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a-7>0 \\ -a-3<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a-7<0 \\ -a-3>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>\frac{7}{3} \\ a>-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a<\frac{7}{3} \\ a<-3 \end{cases}$$

$$a>\frac{7}{3} \qquad a<-3$$

Объединяя полученные промежутки, получаем $a\in(-\infty;-3)\cup\left(\frac{7}{3};+\infty\right)$.

Наименьшее натуральное число = 3.

Ответ: 3

Критерии проверки:

Баллы	Содержание критерия
12	Верное, обоснованное решение и верный ответ.
10	Верные обоснования и ход решения, но получен неверный ответ из-за одной вычислительной ошибки.
6	Верный ход решения и верные обоснования, но неверно решено неравенство $D>0$.
4	Верный ход решения и верные обоснования, но итоговый ответ не найден или найден неверно.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.