



Заключительный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль: «Физика»

Класс участия: 9

Вариант задания: 2

Задача 1 (10 баллов).

Парусная яхта и большой корабль с ровным, перпендикулярным поверхности океана и зеркальным бортом, идут пересекающимися курсами. У яхты курс 350° , у корабля — 260° . Скорость корабля 10 узлов. Нарисуйте чертеж и определите скорость, с которой движется яхта, если изображение яхты движется относительно нее со скоростью 8 узлов. Примечание: узел — это единица измерения скорости в море. Один узел равен одной морской миле в час. Одна морская миля равна 1,852 км. Курс судна — это угол между текущим направлением движения судна и направлением на север.

Решение:

Так как яхты движутся пересекающимися курсами под углом 90° , — то изображение относительно яхты будет двигаться с удвоенной скоростью яхты.

Ответ: 4 узла.

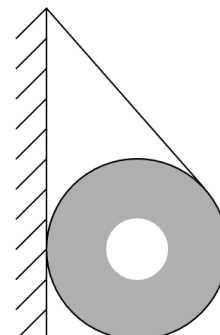
Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 1	
Элемент решения	Баллы
Верно нарисован чертеж	3
На чертеже учтено, что яхты движутся пересекающимися курсами	2
Приведены правильные математические преобразования и получен верный числовой ответ	5
ИТОГО	10



Задача 2 (10 баллов).

На стену повесили массивный диско-шар. Оказалось, что если его повесить на стену с декоративными вставками — то он не проскальзывает (см. рис). При каком минимальном коэффициенте трения такое возможно? Длина нити 12 см, радиус шара 5 см.



Решение:

Расставим силы, действующие на катушку (см. рис.).

Определим проекции сил на оси:

$$Ox: N - T \sin \alpha = 0$$

$$Oy: F_{\text{тр}} + T \cos \alpha - mg = 0$$

Где α — угол между нитью и стеной.

Запишем правило моментов относительно центра катушки:

$$F_{\text{тр}} R = TR$$

Тогда:

$$F_{\text{тр}} \sin \alpha = N$$

$$\mu N = \frac{N}{\sin \alpha}$$

$$\mu = \frac{1}{\sin \alpha}$$

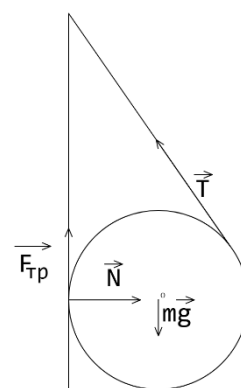
Заметим, что:

$$\frac{R + R \cos \alpha}{L} = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{L}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{L}$$

Так как $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + (\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})^2}$, — то:





$$\mu = \frac{1 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}{2\frac{R}{L}}$$

$$\mu = \frac{L}{2R} + \frac{R}{2L}$$

$$2\mu RL = L^2 + R^2$$

$$R^2 - 2\mu RL + L^2 = 0$$

Подставив значения, определим коэффициент трения:

$$\mu = \frac{R^2 + L^2}{2RL} = \frac{0,05^2 + 0,12^2}{2 \cdot 0,05 \cdot 0,12} = 1,4$$

Ответ: 1,4.

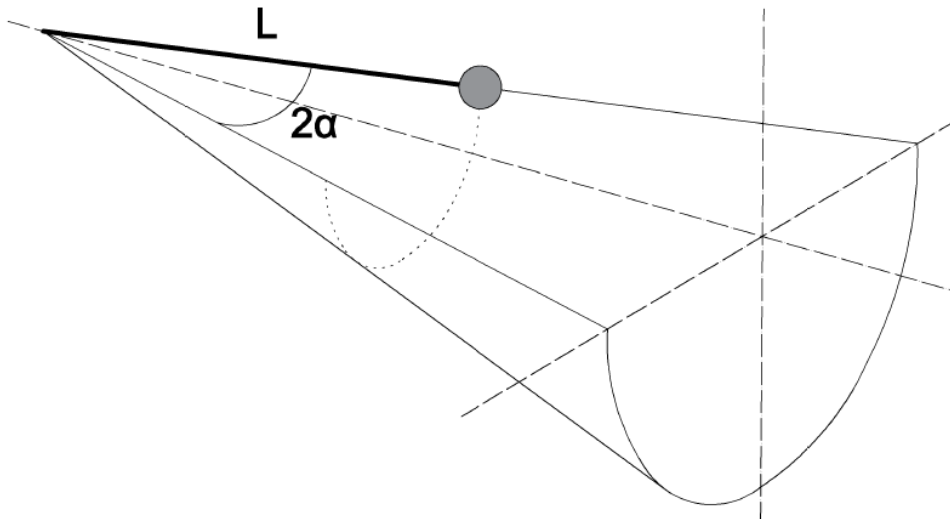
Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 2	
Элемент решения	Баллы
Верно записано правило моментов относительно центра	3
Верно записано равенство сил в проекции на оси	2
Верно определена зависимость коэффициента трения от угла	2
Приведены правильные математические преобразования и получен верный числовой ответ	3
ИТОГО	10



Задача 3 (15 баллов).

Шарик массой m прикреплен за нить длиной L к вершине правильного конуса, высота которого параллельна, а плоскость основания перпендикулярна поверхности Земли. В начальный момент шарик касается внутренней поверхности конуса, а нить натянута. Его отпускают и он начинает скользить без трения. Найдите скорость и силу натяжения нити при прохождении им нижнего положения. Угол при вершине конуса равен 2α . Ускорение свободного падения g .



Решение:

Заметим, что шарик будет двигаться по окружности.

Запишем закон сохранения энергии:

$$mgL \sin \alpha = \frac{mv^2}{2}$$

Запишем формулу центростремительного ускорения:

$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R}$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вдоль нити в нижней точке:

$$T - mg \sin \alpha = m a_{\text{ц}} \cos \alpha$$



Выразим T :

$$T = ma_{ц} \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

$$T = m2g \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

$$T = m2g \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

$$T = mg(2 \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Ответ: $v = \sqrt{2gL \sin \alpha}$; $T = gm(2 \cos \alpha + \sin \alpha)$.

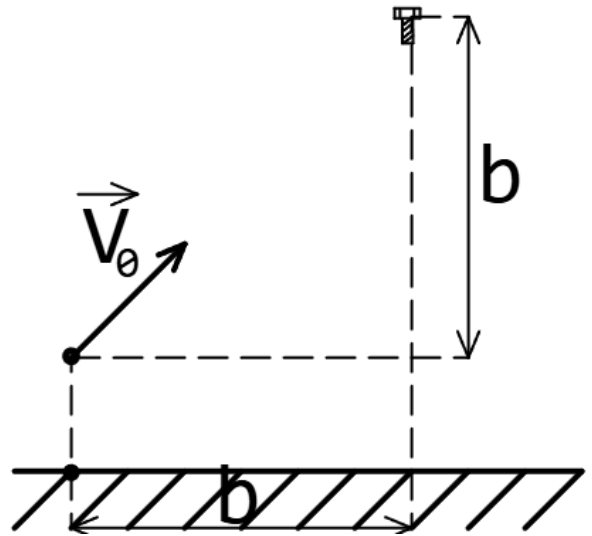
Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 3	
Элемент решения	Баллы
Верно записан закон сохранения энергии	3
Верно записан второй закон Ньютона в проекции на ось, связанную с нитью	6
Приведены правильные математические преобразования и получен верный числовой ответ	6
ИТОГО	15



Задача 4 (20 баллов).

На соревнованиях по стрельбе из рогатки спортсмен навесом стрелял снарядами по мишени. В момент выстрела на некотором расстоянии от него и с такой же высоты относительно рогатки, начинает падать плохо закрепленный небольшой болтик. Определите расстояние b (см. рис.). Известно, что при начальной скорости V_0 снаряд столкнется с болтиком имея в этот момент наименьшую скорость? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g .



Решение:

Докажем, что тангенс угла начальной скорости с горизонтом должен равняться 1:

$$x_1 = x_2: \quad b = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y_1 = y_2: \quad b - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Решая уравнения, получим, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{b} = 1$.

В момент столкновения $t = \frac{b\sqrt{2}}{v_0}$ скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$

$$\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gb + \frac{2g^2 b^2}{v_0^2}} =$$

$$\sqrt{\left(v_0 - \frac{\sqrt{2}gb}{v_0}\right)^2 + 2(\sqrt{2} - 1)gb}.$$

Минимальное значение скорости будет приниматься, если $\left(v_0 - \frac{\sqrt{2}gb}{v_0}\right) = 0$.

То есть, если $v_0 = \sqrt{\sqrt{2}gb}$.

Выразим b :



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

$$b = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}g}$$

Ответ: $b = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}g}$.

Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 4	
Элемент решения	Баллы
Доказано, что угол, с которым необходимо запустить снаряд равен 45° .	7
Верно определен момент столкновения	3
Определена скорость снаряда в момент столкновения и правильно определено, когда она принимает минимальное значение	7
Приведены правильные математические преобразования и получен верный числовой ответ	3
ИТОГО	20



Задача 5 (25 баллов).

Космический корабль массой m и площадью поперечного сечения S , сбросивший все обтекатели и имеющий правильную форму цилиндра, влетает по нормали к поверхности со скоростью V_0 в неподвижное космическое облако межзвездной пыли, форму которого для упрощения можно считать шаром. Плотность пыли зависит от расстояния до центра по формуле $\rho = \rho_0(1+kx)$, где x — расстояние от поверхности до центра облака, k — заданный коэффициент. Найдите радиус облака, если он много больше размеров корабля. Известно, что частицы пыли прилипают к кораблю при касании и он вылетает из облака со скоростью V .

Решение:

Запишем формулу средней плотности:

$$\rho_{cp} = \rho_0 \left(1 + \frac{kR}{2} \right)$$

Тогда масса налипшей пыли:

$$M = \rho_0 2RS \left(1 + \frac{kR}{2} \right)$$

Запишем закон сохранения импульса:

$$mv_0 = (M + m)v$$

Тогда:

$$v = \frac{mv_0}{s2R\rho_0 \left(1 + \frac{kR}{2} \right) + m}$$

$$2vsR\rho_0 \left(1 + \frac{kR}{2} \right) + vm = mv_0$$

$$2vsR\rho_0 + 2vsR\rho_0 \frac{kR}{2} + m(v - v_0) = 0$$

$$vs\rho_0 kR^2 + 2vsR\rho_0 - m(v_0 - v) = 0$$

При решении квадратного уравнения корнями будут:

$$R = \frac{-2vs\rho_0 \pm \sqrt{4v^2s^2\rho_0^2 + 4vs\rho_0 km(v_0 - v)}}{2vs\rho_0 k}$$



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Отрицательный радиус не подходит.

$$\text{Ответ: } R = \frac{-2vs\rho_0 + \sqrt{4v^2s^2\rho_0^2 + 4vs\rho_0km(v_0 - v)}}{2vs\rho_0k}.$$

Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 5	
Элемент решения	Баллы
Верно записана формула средней плотности	8
Верно найдена масса налипшей пыли	6
Верно записан закон сохранения импульса	5
Приведены правильные математические преобразования и получен верный числовой ответ	6
ИТОГО	25



Задача 6 (20 баллов).

Ветряная мельница является устройством с горизонтальной осью, которое можно запускать без какого-либо дополнительного воздействия, только от дуновения ветра. При этом воздушный поток должен быть направлен вдоль оси вращения мельницы.

Определите угол установки лопасти у её конца (угол между плоскостью лопасти и плоскостью вращения винта), если в каждой точке плоскость лопасти должна совпадать с направлением относительной скорости воздуха (для данного малого участка лопасти). Ветряк работает при скорости ветра $10 \frac{м}{с}$, а его трёхлопастной винт диаметром 24 метра вращается с частотой 60 оборот в минуту.

Решение:

Запишем закон сложения скоростей:

$$\vec{U} = \vec{v} + \overrightarrow{v_{отн}},$$

где \vec{U} – скорость ветра относительно земли (абсолютная скорость), \vec{v} – переносная скорость (скорость вращательного движения точки лопасти), $\overrightarrow{v_{отн}}$ – относительная скорость воздуха.

Для определения угла установки лопасти рассмотрим схему движения воздуха относительно лопасти.

Скорость точки вращательного движения лопасти равна

$$v = 2\pi R\nu,$$

где $2\pi R$ – путь, который проходит лопасть на данном радиусе за 1 оборот, а ν – частота вращения винта.

Тогда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U}{v} = \frac{U}{2\pi R\nu},$$

откуда угол установки лопасти равен

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{U}{2\pi R\nu} \right).$$



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{10}{2 \cdot 3,14 \cdot 12 \cdot 1}\right) = 7^{\circ}33'.$$

Ответ: Угол установки лопасти у конца $\alpha = 7^{\circ}33'$.

Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 6	
Элемент решения	Баллы
Сформулирована расчётная схема (в том числе, графически), выделены и правильно формализованы все необходимые физические законы	5
Составлена система уравнений и математическая модель	5
Верно учтены технические параметры, характеристики и ограничения	5
Проведены расчеты, получен верный ответ, разумный с точки зрения физического смысла	5
ИТОГО	20