Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Заключительный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль: «Физика»

Класс участия: 10

Вариант задания: 1

Задача 1(8 баллов).

Камень, брошенный горизонтально с вершины холма высотой h = 40 м, летит по параболе и падает на землю. Оказалось, что величина модуля среднего тангенциального ускорения камня за время его полета составила 75% от значения модуля вектора тангенциального ускорения камня в момент падения его на землю. С какой начальной скоростью бросили камень с вершины холма? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение:

Вектор тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ связан с изменением модуля скорости при движении по криволинейной траектории и направлен по касательной к траектории. Значит, модуль среднего тангенциального ускорения камня равен $\langle a_\tau \rangle = \dfrac{v_\text{п} - v_0}{t_\text{п}}$, где $t_\text{п} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ – время падения на землю, $v_\text{п}$ – скорость камня в момент падения: $v_\text{п} = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, $v_y = gt_\text{п}$ – вертикальная компонента вектора скорости камня в момент падения на землю. Модуль вектора тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ камня найдем как проекцию на касательную вектора полного ускорения камня $\vec{g}$: $a_\tau = g\sin\varphi = g\dfrac{v_y}{v_\text{п}} = \dfrac{g^2 t_\text{п}}{v_\text{п}}$, φ – угол, который образует вектор скорости камня с горизонтом в момент падения на землю.

Проделаем преобразования. $\dfrac{a_\tau}{\langle a_\tau \rangle} = \dfrac{g^2 t_\text{п}^2}{v_\text{п}(v_\text{п} - v_0)} = \dfrac{v_\text{п}^2 - v_0^2}{v_\text{п}(v_\text{п} - v_0)} = \dfrac{v_\text{п} + v_0}{v_\text{п}}$. Тогда

$$1 + \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \frac{4}{3}, \Rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{gh}}{2} = 10 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_0 = \dfrac{\sqrt{gh}}{2} = 10$ **м/с.**

Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 1	
Элемент решения	Баллы
Получена формула для тангенциального ускорения в момент падения на землю	2
Записана формула для среднего тангенциального ускорения	1
При наличии всех необходимых верных формул проделаны преобразования, с целью получения ответа к задаче.	3
1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	
Получена верная конечная формула ответа	1
Получен правильный числовой ответ.	1
ИТОГО	8

Задача 2 (8 баллов).

В герметичном сосуде объемом V = 5 л находится некоторое количество воды (H_2O) при давлении $p = 10^5$ Па. Никаких других веществ, кроме воды, в сосуде нет. Воду из сосуда откачивают при неизменной температуре сосуда и его содержимого. Когда откачали Δm = 3,55 г воды, давление в сосуде уменьшилось в 2 раза. Какое общее количество воды было первоначально в сосуде?

Решение:

В сосуде часть воды находится в жидком состоянии, а другая часть – насыщенный пар. Тогда давление насыщенного пара $p = p_н = 10^5$ Па соответствует температуре $T_к$ = 373 К (100°С). Докажем это. Предположим, что это не так, т.е. вся вода – ненасыщенный пар при давлении $p = 10^5$ Па, что возможно, если температура пара $T > T_к$. Масса $m_п$ пара при этом должна быть больше, чем Δm = 3,55 г.

$$T = \frac{p_н V \mu}{R m_п} < \frac{10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 18}{8{,}31 \cdot 3{,}55} = 305 \text{ К } < T_к.$$

Полученное противоречие означает, что в сосуде будет сохраняться постоянное давление $p_н = 10^5$ Па при температуре $T_к$ = 373 К до тех пор, пока не будет выкачана вся вода в жидком состоянии. При дальнейшем откачивании уже ненасыщенного пара при неизменной температуре $T_к$ давление пара начнет уменьшаться пока не станет равным $0{,}5p_н$, при этом останется масса пара $m'_п = \dfrac{0{,}5 p_н V \mu}{R T_к}$. поскольку откачали $\Delta m = m - m'_п$, то первоначально в сосуде было

$$m = \Delta m + \frac{0{,}5 p_н V \mu}{R T_к} = 3{,}55 + \frac{0{,}5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 18}{8{,}31 \cdot 373} = 5 \text{ г.}$$

Ответ: $m = \Delta m + \dfrac{0{,}5 p_н V \mu}{R T_к} = 5$ **г.**

Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 2	
Элемент решения	Баллы
Указано верное начальное состояние содержимого сосуда	1
Указана температура содержимого сосуда	1
Имеется доказательство, что в нач. состоянии пар – насыщ.	1
Указано верное конечное состояние содержимого сосуда	1
Записано уравнение Менделеева-Клапейрона для пара	1
При наличии всех необходимых верных формул проделаны преобразования, с целью получения ответа к задаче 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	2
Получен правильный числовой ответ	1
ИТОГО	8

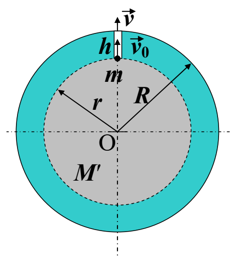
Задача 3 (14 баллов).

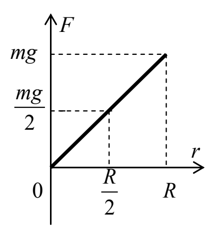
Астероид имеет форму однородного шара радиуса R. На полюсе астероида прорыли глубокую скважину, направленную к центру астероида, и на глубине $h = R/2$ установили пусковую установку. Какую минимальную начальную скорость должна иметь ракета, запущенная вертикально вверх с помощью этой пусковой установки, чтобы подняться над поверхностью астероида на высоту $H = R/2$? Считать, что первая космическая скорость при старте с поверхности этого астероида, известна и равна $V_I = 360$ м/с. *Для справки: объем шара радиусом R вычисляется по формуле* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$*, площадь поверхности шара* $S = 4\pi R^2$.

Решение:

Сила гравитационного взаимодействия однородного шара радиуса R с материальной точкой массы m, находящейся внутри шара на расстоянии $r < R$ от центра шара равна силе, с которой взаимодействует материальная точка с однородным шаром радиуса r и массы M' (см. рис) $F(r) = G\frac{mM'}{r^2}$. Это утверждение можно доказать, пользуясь, например, теоремой Гаусса для гравитационного поля. *Школьники могут использовать его без док-ва*. Тогда $F(r) = mg\frac{r}{R}$, где g – ускорение свободного падения на поверхности астероида.

Найдем скорость v, которую будет иметь ракета вблизи поверхности астероида. Работа силы тяготения, вычисляемая по графику $F(r)$, равна изменению кинетической энергии ракеты: $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{F(r)} = -\frac{1}{2}\left(mg + \frac{mg}{2}\right)\frac{R}{2} = -\frac{3}{8}mgR$.





При дальнейшем подъёме ракеты вверх пользуемся формулой для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух точечных масс, находящихся на расстоянии $r > R$ друг от друга: $E_{пот}(r) = -G\frac{mM}{r} = -\frac{mgR^2}{r}$. Тогда $\frac{mv^2}{2} - mgR = -\frac{mgR^2}{R+H}$. С учетом того, что $H = R/2$, получим $v_0 = \sqrt{\frac{17}{12}gR} = v_I\sqrt{\frac{17}{12}} = 428$ м/с.

Ответ: $v_0 = v_I\sqrt{\frac{17}{12}} = 428$ **м/с.**

Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 3	
Элемент решения	Баллы
Записана формула для первой космической скорости	1
Записана (или получена) формула для нахождения гравитационной силы взаимодействия мат. точки с шаром при $r < R$	2
Проделан расчет работы по подъему ракеты с глубины на поверхность астероида 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	2
Используется формула для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия мат. точки с шаром при $r > R$	1
Записаны все необходимые энергетические уравнения	3
При наличии всех необходимых верных формул проделаны преобразования, с целью получения ответа к задаче. 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	3
Получена верная конечная формула ответа	1
Получен правильный числовой ответ.	1
ИТОГО	14

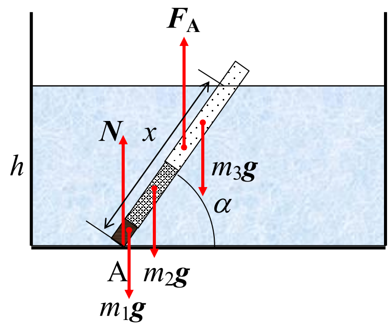
Задача 4 (14 баллов).

Тонкая цилиндрическая заготовка, состоящая из трех частей, лежит на дне широкого сосуда, который медленно заполняется жидкостью плотности ρ. Площадь поперечного сечения всех трех частей заготовки одинакова. При этом левая часть цилиндра, длиной l, сделана из материала плотности 5ρ, средняя – длиной $2l$, из материала плотности ρ, а крайняя правая имеет длину $4l$ и плотность ρ/5. Определите минимальную высоту уровня жидкости в сосуде, при которой заготовка займет вертикальное положение.

Решение:

Средняя плотность заготовки $\rho_{cp} = \dfrac{5\rho l + \rho \cdot 2l + \dfrac{\rho}{5} \cdot 4l}{l + 2l + 4l} > \rho$. Поэтому заготовка не будет плавать, а после наливания воды в бассейн будет опираться более тяжелым концом на дно. При этом более тяжелая часть цилиндра будет полностью погружена в жидкость, а легкая – лишь частично. По мере заполнения сосуда водой заготовка начнет приподниматься. Рассмотрим положение равновесия заготовки, когда она будет составлять угол α с дном сосуда (см. рис). Обозначим длину той части заготовки, которая находится в жидкости, через x, площадь поперечного сечения цилиндра – через S. Силы, действующие на заготовку, показаны на рисунке.

Запишем правило моментов сил относительно оси, проходящей через точку А.



$$m_1 g \cdot \frac{l}{2} \cancel{\cos\alpha} + m_2 g \cdot 2l \cancel{\cos\alpha} + m_3 g \cdot 5l \cancel{\cos\alpha} - F_A \cdot \frac{x}{2} \cancel{\cos\alpha} = 0\,, \quad h = x \sin\alpha\,,$$

где $m_1 = 5\rho Sl$, $m_2 = \rho S \cdot 2l$, $m_3 = \dfrac{\rho}{5} S \cdot 4l$, $F_A = \rho g S x$.

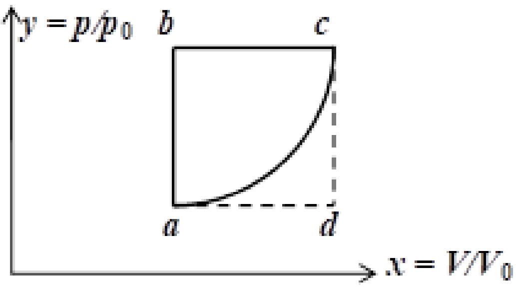
Т.к. $\cos\alpha$ в написанном уравнении сокращается, то величина x остается неизменной, при доливании жидкости в сосуд. Когда заготовка займет вертикальное положение (α = 90°), минимальная высота жидкости в сосуде равна $h_{\min} = x = l\sqrt{23}$.

Ответ: $h_{\min} = l\sqrt{23}$**.**

Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 4	
Элемент решения	Баллы
Указано, как будет вести себя заготовка, по мере заполнения сосуда	2
Есть понимание, что для решения задачи, заготовка должна быть наклонена под некоторым углом	2
На рисунке показаны все необходимые силы с их точками приложения	2
Записаны все формулы, необходимые для решения задачи: уравнение моментов сил, формулы для масс каждой части заготовки, правильно найдены плечи сил, формула для силы Архимеда)	5
Проделаны необходимые преобразования, с полученными формулами с целью получения ответа к задаче.	1
Есть понимание, что длина погруженной части заготовки не зависит от угла ее наклона	1
Получена верная конечная формула ответа	1
ИТОГО	14

Задача 5 (18 баллов).



С идеальным одноатомным газом совершают замкнутый цикл *a-b-c-a*, показанный на рисунке в безразмерных осях $x = V/V_0$ и $y = p/p_0$, где V_0 и p_0 – некоторые постоянные значения объема и давления (нам не известные). График процесса *c-a* на рисунке изображается дугой окружности, радиус которой равен 1, а центр находится в точке *b*. Масса газа не меняется.

1) Считаем, что КПД цикла *a-b-c-a* известен и равен η. Найдите КПД циклов *a-c-d-a* и *a-b-c-d-a*. Графики процессов *a-b* и *c-d* – прямые, параллельные оси *y*, а процессов *b-c* и *d-a* – прямые, параллельные оси *x*.

2) Чему равно максимальное значение КПД цикла *a-b-c-a*? Рисунок условный. Цикл *a-b-c-a* может находиться в любом месте плоскости *xy*.

Решение:

1. Кпд цикла *a-b-c-a* равен $\eta = \dfrac{A_{abca}}{Q_{пол}}$, где $Q_{пол} = Q_{ab} + Q_{bc} = Q$, $A_{abca} = Q_{пол} - |Q_{отд}|$, $|Q_{отд}| = |Q_{ca}|$. С другой стороны, работа газа в цикле *a-b-c-a* равна $A_{abca} = \dfrac{\pi}{4} p_0 V_0$. Тогда $|Q_{ca}| = Q - \dfrac{\pi}{4} p_0 V_0$, $\eta = \dfrac{\pi p_0 V_0}{4Q}$, $\Rightarrow$ $Q = \dfrac{\pi p_0 V_0}{4\eta}$.

Запишем аналогичные соотношения для цикла *a-b-c-d-a*.

$\eta_{abcda} = \dfrac{A_{abcda}}{Q} = \dfrac{p_0 V_0}{Q}$. Тогда $\eta_{abcda} = \dfrac{4}{\pi}\eta$.

Для цикла *a-c-d-a*. $\eta_{acda} = \dfrac{A_{acda}}{Q_{ac}}$. $A_{acda} = \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) p_0 V_0$,

$$Q_{ac} = |Q_{ca}| = Q - \frac{\pi}{4} p_0 V_0 = \frac{\pi p_0 V_0}{4\eta} - \frac{\pi}{4} p_0 V_0 = \frac{\pi}{4} p_0 V_0 \left(\frac{1}{\eta} - 1\right). \Rightarrow$$

$$\eta_{acda} = \frac{1 - \dfrac{\pi}{4}}{\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{\eta} - 1\right)} = \frac{(4 - \pi)\eta}{\pi(1 - \eta)}.$$

2. Пусть значения величин *x* и *y* в состоянии *a* равны α и β соответственно, что означает, что значения объёма *V* и давления *p* в состояниях *a*, *b*, *c* равны $V_a = V_b = \alpha V_0$, $V_c = (\alpha+1)V_0$, $p_a = \beta p_0$, $p_b = p_c = (\beta+1)p_0$.

Для цикла *a-b-c-a* $Q_{пол} = Q_{ab} + Q_{bc} = A_{abc} + \Delta U_{ac} = (\beta+1)p_0V_0 + \frac{3}{2}\nu R(T_c - T_a)$.

Воспользуемся уравнениями состояний *a* и *c*: $\nu RT_a = \alpha\beta p_0V_0$, $\nu RT_c = (\alpha+1)(\beta+1)p_0V_0$.

Тогда

$$Q_{пол} = \left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta + \frac{5}{2}\right)p_0V_0.\quad \eta = \frac{A_{abca}}{Q_{пол}} = \frac{\frac{\pi}{4}p_0V_0}{\left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta + \frac{5}{2}\right)p_0V_0} = \frac{\pi}{6\alpha + 10\beta + 10}.$$

Т.к. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $\eta = \frac{\pi}{6\alpha + 10\beta + 10} < \frac{\pi}{10}$. Соответственно $\eta_{\max} = \frac{\pi}{10} = 0,314$.

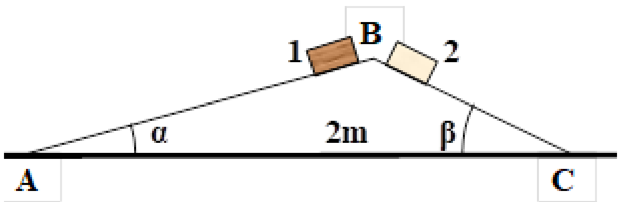
Ответ: 1) $\eta_{acda} = \frac{(4-\pi)\eta}{\pi(1-\eta)}$**,** $\eta_{abcda} = \frac{4}{\pi}\eta$**. 2)** $\eta_{\max} = \frac{\pi}{10} = 0,314$ **(31,4%).**

Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 5	
Элемент решения	Баллы
Записаны общие формулы для КПД цикла, $Q_{пол}$ и работы за цикл, применительно к циклу *a-b-c-a*	3
Записана формула для КПД цикла *a-b-c-d-a*.	1
Получена формула для работы в цикле *a-b-c-d-a*.	1
Проделаны необходимые преобразования с целью получения КПД цикла *a-b-c-d-a*.	1
Записаны необходимые соотношения (η_{acda}, A_{acda}, $Q_{пол}$) и проделаны необходимые преобразования с целью получения КПД цикла *acda*.	3
Записаны необходимые формулы (формула для $Q_{пол}$, формула для КПД, уравнения Менделеева-Клапейрона) и проделаны преобразования с целью получения общего выражения (с двумя переменными параметрами) для КПД цикла *a-b-c-a*	5
Получено общее выражение для КПД цикла *a-b-c-a* (с двумя переменными параметрами) с целью получения макс. КПД	1
Получены правильные ответы на вопрос 1)	2
Получен правильный ответ на вопрос 2 (макс. КПД)	1
ИТОГО	18

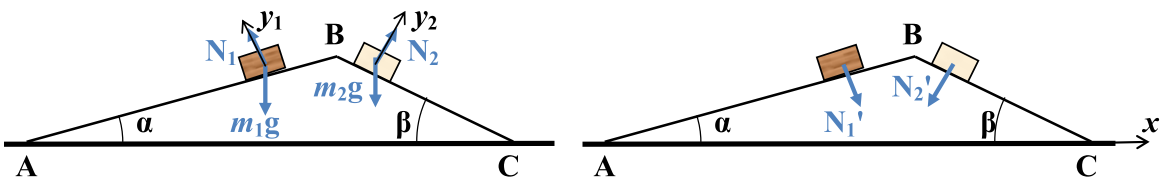
Задача 6 (18 баллов).

Ледяная горка, боковые грани которой составляют углы α = 30° и β = 45° с горизонтом, находится на гладкой горизонтальной поверхности (см. рисунок). На грани AB и BC горки аккуратно кладут два бруска, при этом горка остается неподвижной, а бруски движутся. Трение между брусками и гранями горки отсутствует. 1) Чему равна масса бруска 2, если масса бруска 1 известна и равна *m*? 2) Бруски меняют местами. С каким ускорением и в каком направлении в этом случае начнет двигаться горка, если ее масса 2*m*?



Решение:

1. Горка неподвижна. Пусть массы брусков $m_1 = m$ и m_2. На первом рисунке показаны силы, действующие на оба бруска, на втором – силы, действующие на горку. Найдем силы нормальной реакции N_1 и N_2, действующие на оба бруски со стороны клина.



$$y_1: N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0, \Rightarrow N_1 = m_1 g\cos\alpha .$$

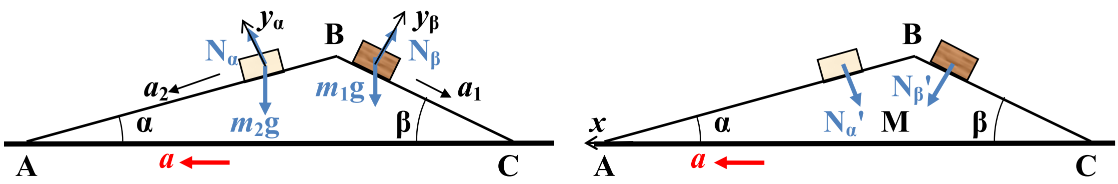
$$y_2: N_2 - m_2 g\cos\beta = 0, \Rightarrow N_2 = m_2 g\cos\beta .$$

Силы давления, действующие на горку, по третьему закону Ньютона, равны силам нормальной реакции $N_1' = N_1$ и $N_2' = N_2$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для неподвижной горки в проекции на ось *x* (см. второй рис).

$$x: N_1\sin\alpha - N_2\sin\beta = 0. \Rightarrow m_2 = m_1\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{m\sqrt{3}}{2}.$$

2. Поменяем бруски местами. Докажем, что горка движется влево, и найдем

ускорение a горки.



Ускорения брусков в ИСО, связанной с землей, равны $\vec{A}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}$, $\vec{A}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}$, где $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1$ – ускорения брусков в системе отсчета, связанной с горкой. Тогда

$y_\alpha : N_\alpha - m_2 g\cos\alpha = m_2 a\sin\alpha$,

$y_\beta : N_\beta - m_1 g\cos\beta = -m_1 a\sin\beta$.

Этих уравнений достаточно для нахождения сил давления на горку N'_α и N'_β

$$N_\alpha = m_2(g\cos\alpha + a\sin\alpha) = N'_\alpha,$$

$$N_\beta = m_1(g\cos\beta - a\sin\beta) = N'_\beta$$

Уравнение движения горки в проекции на ось x:

$x: -N_1\sin\alpha + N_2\sin\beta = Ma$.

Из этих уравнений получим ускорение горки

$$a = \frac{g\left(m_1\sin 2\beta - m_2\sin 2\alpha\right)}{2\left(M + m_2\sin^2\alpha + m_1\sin^2\beta\right)}.$$

Подставим в это выражение массы брусков $m_1 = m$, $m_2 = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$ и массу горки $M = 2m$, а также значения углов α = 30° и β = 45°.

$$\Rightarrow a = \frac{g}{20+\sqrt{3}} = 0,46 \text{ м/с.}$$

Т.к. $a > 0$, значит предположение, что клин движется влево верно.

Ответ: $m_2 = m_1\dfrac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$, клин движется влево с ускорением

$$a = \frac{g}{20+\sqrt{3}} = 0,46 \text{ м/с}$$

Критерии оценивания

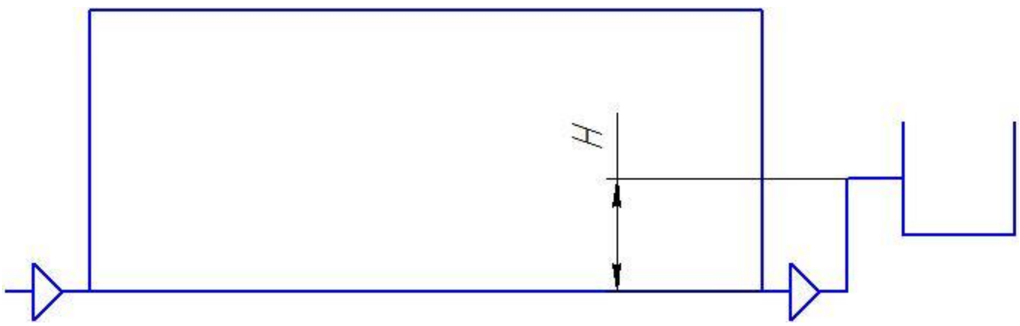
Критерии оценивания задания 6	
Элемент решения	Баллы
Записаны все необходимые уравнения динамики в случае неподвижной горки 1 балл, если верных уравнений недостаточно	2
При наличии всех верных уравнений динамики, проделаны необходимые преобразования с целью найти массу бруска 2 1 балл, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	2
Получен верный ответ для массы бруска 2	1
Записана связь ускорения любого из брусков с ускорением горки	1
Записаны уравнения динамики брусков и получены N_α и N_β	2
Записаны уравнения динамики горки	2
При наличии всех необходимых верных формул проделаны преобразования, с целью получения ускорения горки 2 балла, если в преобразованиях пропущены важные логические шаги или преобразования недостаточные, но получен верный ответ 0 баллов, если преобразования отсутствуют или в них допущены ошибки	4
Получена формула для ускорения горки	2
Получен верный ответ для величины и направления движения горки	2
ИТОГО	18

Задача 7 (20 баллов).

Термический насос может перекачивать воду с минимальными затратами энергии, используя суточные колебания температуры окружающей среды. Он представляет собой герметичный сосуд, снабженный двумя односторонними клапанами, способными пропускать воду только в одном направлении (входным и выпускным), установленными на уровне дна. Сосуд заполнен воздухом. Источник воды располагается на уровне входного клапана, а выходное отверстие трубы, подсоединённой к выпускному клапану, далее поднимается на высоту 0,5 м.

Определите достаточную для выполнения полного цикла работы насоса дневную температуру, если ночная температура составила 5ºС. Атмосферное давление считайте постоянным, равным 10^5 Па. Температура сосуда равна температуре окружающей среды. Считайте, что воды в сосуде не остаётся после завершения каждого цикла работы устройства.

Решение:



В течение суток происходит изменение температуры воздуха как снаружи, так и внутри контейнера.

Вечером при остывании давление будет снижаться, и вода будет засасываться в контейнер. Днем, при нагреве, давление будет повышаться, и вода будет выдавливаться через выходной клапан.

Так как устройство закрыто днем, то масса воздуха внутри равна

$$M_{\text{возд}} = V\rho_{\text{возд}}.$$

Плотность воздуха можно определить из уравнения состояния идеального газа:

$$\rho_{\text{возд}} = \frac{\mu p_0}{RT}.$$

Тогда

$$\mathrm{M}_{\text{возд}} = \frac{\mu p_0}{RT_{\text{дн}}}\mathrm{V}. \tag{1}$$

Начальное дневное состояние

$$p_0 V = \frac{M_{\text{возд}}}{\mu} RT_{\text{дн}}. \tag{2}$$

После засасывания воды (вода засасывается ночью)

$$p_0 V_{\text{воздух}_{\text{ноч}}} = \frac{\mathrm{M}_{\text{возд}}}{\mu} RT_{\text{ноч}}. \tag{3}$$

Разделим (2) на (3)

$$\frac{\mathrm{V}}{V_{\text{воздух}_{\text{ноч}}}} = \frac{T_{\text{дн}}}{T_{\text{ноч}}},$$

тогда

$$V_{\text{воздух}_{\text{ноч}}} = \mathrm{V}\frac{T_{\text{ноч}}}{T_{\text{дн}}}.$$

Объём засасываемой воды

$$V_{\text{воды}_{\text{ноч}}} = V - V_{\text{воздух}_{\text{ноч}}} = \mathrm{V}\left(1 - \frac{T_{\text{ноч}}}{T_{\text{дн}}}\right).$$

Утром воздух в контейнере начинает нагреваться, давление начинает расти. Впускной клапан закрыт, выпускной открывается, и вода начинает подниматься по выходной трубе. Максимальное давление в контейнере соответствует давлению столба жидкости высотой 0,5 м.

$$P_{max} = p_0 + \rho_{\text{воды}} g h.$$

После выдавливания воды

$$p_{max} V_{\text{воздух}_{\text{дн2}}} = \frac{M_{\text{в}}}{\mu} RT_{\text{дн}},$$

тогда с учётом (1)

$$V_{\text{воздух}_{\text{дн2}}} = \frac{M_{\text{в}} R T_{\text{дн}}}{\mu\left(p_0 + \rho_{\text{воды}} g h\right)} = V \frac{p_0}{p_0 + \rho_{\text{воды}} g h}.$$

Оставшееся количество воды

$$V_{\text{воды}_{\text{ост}}} = V - V_{\text{воздух}_{\text{дн2}}} = V\left(1 - \frac{p_0}{p_0 + \rho_{\text{воды}} g h}\right).$$

Объём выдавленной воды

$$V_{\text{воды}_{\text{выдав}}} = V_{\text{воды}_{\text{ноч}}} - V_{\text{воды}_{\text{ост}}},$$

тогда

$$V_{\text{воды}_{\text{выдав}}} = V\left(1 - \frac{T_{\text{ноч}}}{T_{\text{дн}}}\right) - V\left(1 - \frac{p_0}{p_0 + \rho_{\text{воды}} g h}\right) = V\left(\frac{p_0}{p_0 + \rho_{\text{воды}} g h} - \frac{T_{\text{ноч}}}{T_{\text{дн}}}\right).$$

Производительность

$$m_{\text{воды}} = \rho_{\text{воды}} V_{\text{воды}_{\text{выдав}}} = \rho_{\text{воды}} V\left(\frac{p_0}{p_0 + \rho_{\text{воды}} g h} - \frac{T_{\text{ноч}}}{T_{\text{дн}}}\right) \ (4).$$

Из (4) видно, что работа насоса возможна, если выражение в скобках больше нуля.

$$\frac{p_0}{p_0 + \rho_{\text{воды}} g h} - \frac{T_{\text{ноч}}}{T_{\text{дн}}} = 0,$$

Тогда

$$T_{\text{дн}} = T_{\text{ноч}} \frac{p_0 + \rho_{\text{воды}} g h}{p_0}.$$

$$T_{\text{дн}} = 278 \cdot \frac{10^5 + 1000 \cdot 10 \cdot 0.5}{10^5} = 291{,}1\ K \approx 19\ ºС.$$

Ответ: $T_{\text{дн}} = 291{,}1\ K \approx 19\ ºС$

Критерии оценивания

Критерии оценивания задания 7	
Элемент решения	Баллы
Сформулирована расчётная схема (в том числе, графически), выделены и правильно формализованы все необходимые физические законы	5
Составлена система уравнений и математическая модель	5
Верно учтены технические параметры, характеристики и ограничения	5
Проведены расчеты, получен верный ответ, разумный с точки зрения физического смысла	5
ИТОГО	20