



Отборочный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль: «Математика»

Класс участия: 11

Вариант задания: 2

Задача 1.

По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 км и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 км. Сколько автобусов при этом могло его обогнать? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.) В ответ напишите сумму всех возможных решений.

Решение:

Пусть T – интервалы времени, через которые идут автобусы.

$$1) 5T \leq 4, \quad 7T > 4 \Rightarrow \frac{4}{7} < T \leq \frac{4}{5}$$

$$2) 7T \leq 7, \quad 9T > 7 \Rightarrow \frac{7}{9} < T \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{7}{9} < T \leq \frac{4}{5}$$

$$(n-1)T \leq 17 < (n+1)T \Rightarrow \frac{17}{T} - 1 < n \leq \frac{17}{T} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{17 \cdot 5}{4} - 1 \leq \frac{17}{T} - 1 < n \leq \frac{17}{T} + 1 < \frac{17 \cdot 9}{7} + 1 \Rightarrow$$

$$20,25 < n < 22\frac{6}{7} \Rightarrow n = 21; 22$$

Ответ: 43

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	5



Задача 3.

Пусть $g(x) = \frac{2}{x^2 - 8x + 17}$. Найдите все возможные значения параметра a ,

при которых неравенство $a^2 + 6a + \frac{727}{145} \leq g(g^4(x)) \leq 10a^2 + 29a + 2$ выполняется

при всех действительных x . В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим возможными значениями параметра a .

Решение:

Функция $g(x) = \frac{2}{x^2 - 8x + 17} = \frac{2}{(x-4)^2 + 1}$ определена на всей числовой оси

и принимает все значения из промежутка $(0; 2]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x = 4$, $g_{\max} = g(4) = 2$, на промежутке $(-\infty; 4)$

функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(4; +\infty)$ – убывает. Функция $g^4(x)$ принимает все значения из промежутка $(0; 16]$, поскольку $t = g(x) \in (0; 2]$, а

функция t^4 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x) = g(g^4(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0; 16]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(16); g(4)] = [2/145; 2]$.

Неравенство $a^2 + 6a + \frac{727}{145} \leq g(g^4(x)) \leq 10a^2 + 29a + 2$ выполняется при

всех действительных x , если $(a+1)(a+5) \leq 0$, $0 \leq a(10a+29)$, $a \in [-5; -2, 9]$.

Ответ: 2,1.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	6



Задача 4.

Сколькими способами можно начертить линию $x \sin \sqrt{16 - x^2 - y^2} = 0$ без отрывов и повторов, т.е. не отрывая карандаша и не проводя более одного раза по одной и той же линии?

Решение. Поскольку $\pi^2 < 16 < (2\pi)^2$, данная линия состоит из 2 окружностей радиусами 4 и $\sqrt{16 - \pi^2}$ и вертикального отрезка.



Эта линия уникальна, т. к. имеет лишь 2 нечетные точки $A(0; 4)$ и $B(0; -4)$. Начать вычерчивать линию надо в одной из этих точек, закончить — в другой (2 варианта). Далее, $3!$ способами можно выбрать, в каком порядке пройти левую дугу, правую дугу и диаметр. При прохождении диаметра так же $3!$ способами выбираем, в какой последовательности проходить дуги и диаметр внутренней окружности. В итоге число способов $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$.

Ответ: 72.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12



Задача 5.

Числа от 100 до 999 выписаны без пробелов. С каким остатком полученное 2700-значное число делится на 7?

Решение.

Решение. Поскольку 1001 делится на 7, получаем $1000 \equiv -1 \pmod{7} \implies 1000^n \equiv (-1)^n \pmod{7}$. Следовательно, выписанное число сравнимо по модулю 7 с числом

$$999 - 998 + 997 - 996 + \dots + 101 - 100 = 450 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Ответ: 2

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12



Задача 6.

Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y - x| = (y + x + 1)(5 - x - y)$, а стороны параллельны прямым $y = x$ и $y = -x$? В ответ запишите квадрат значения найденной площади.

Решение:

Замена: $x_1 = x + y, y_1 = y - x$. Эта замена увеличивает все размеры в $\sqrt{2}$ раз. Имеем $|y_1| = (x_1 + 1)(5 - x_1)$, $S(x_1) = 4(x_1 - 2)(x_1 + 1)(5 - x_1)$, $x_1 \in (2; 5)$.

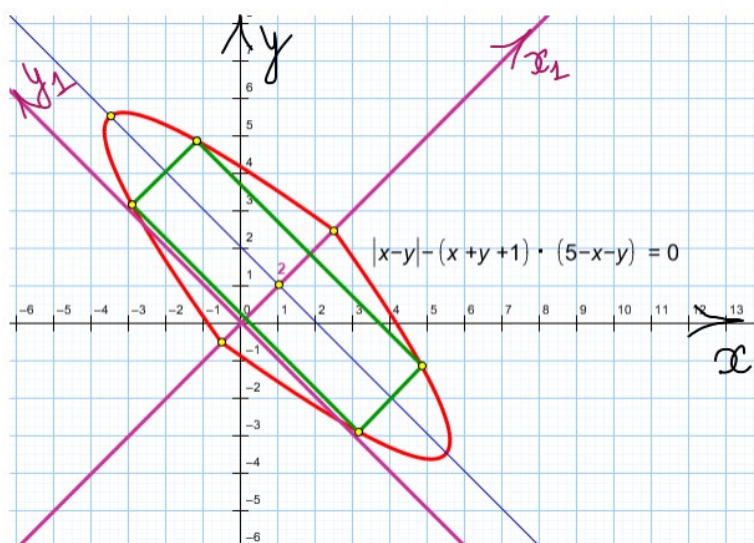
$$\begin{aligned} S'(x_1) &= 4((x_1 + 1)(5 - x_1) + (x_1 - 2)(5 - x_1) - (x_1 - 2)(x_1 + 1)) = \\ &= -12(x_1^2 - 4x_1 + 1) = -12(x_1 - 2 - \sqrt{3})(x_1 - 2 + \sqrt{3}) = 0. \end{aligned}$$

Наибольшее значение площадь принимает в точке $x_1 = 2 + \sqrt{3}$. В системе координат Ox_1y_1 наибольшее значение площади равно

$$S(2 + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 24\sqrt{3}.$$

В исходной системе координат $S_{max} = 12\sqrt{3}$. $(S_{max})^2 = 432$.

Ответ: 432



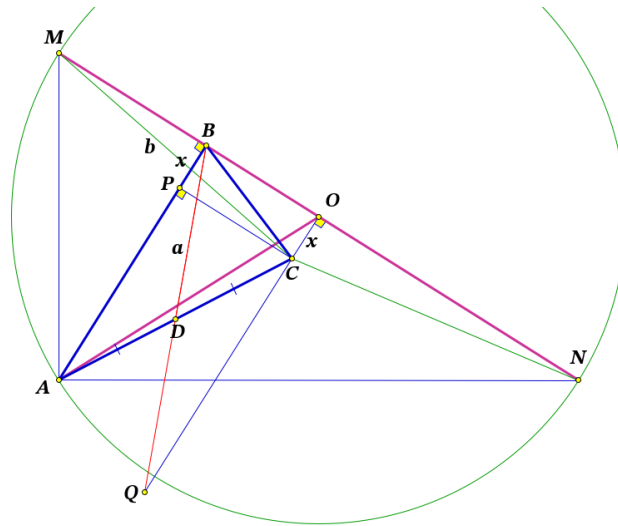
Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12



Задача 7.

Медиана BD треугольника ABC равна $\sqrt{785}$. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная стороне AB . На этой прямой лежит точка O , $\angle BOC = 90^\circ$. Окружность с центром в точке O , проходящая через точку A , пересекает прямую BO в точках M и N . Найдите площадь треугольника OAC , если $MC = 10\sqrt{17}$, тангенс угла CAB равен $7/9$.



Решение.

$$a = BD = \sqrt{785}, \quad b = MC = 10\sqrt{17}, \quad \alpha = \angle CAB, \quad \operatorname{tg} \alpha = 7/9.$$

В треугольнике ABC имеем

$$2AB^2 + 2BC^2 = 4BD^2 + AC^2,$$

$$AC = \sqrt{2(AB^2 + BC^2) - 4a^2},$$

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= AO^2 - BO^2 + BC^2 = \\ &= AO^2 + OC^2 = b^2, \quad AC = \sqrt{2b^2 - 4a^2} = \sqrt{260}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 7/9 \Rightarrow \cos \alpha = 9/\sqrt{130},$$

$$PC \perp AB, \quad PC = BO, \quad AP = AC \cos \alpha = 9\sqrt{2}, \quad CP = 7\sqrt{2}. \quad Q = (BD) \cap (OC),$$

$$AB = CQ = x + 9\sqrt{2}, \quad CO = BP = x, \quad BQ^2 = BO^2 + OQ^2, \quad 4a^2 = 2 \cdot 7^2 + (2x + 9\sqrt{2})^2,$$



Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

$$3140 = 98 + (2x + 9\sqrt{2})^2, x = 15\sqrt{2}, CO = 15\sqrt{2}. S_{AOC} = BO \cdot CO / 2 = 105.$$

Ответ: 105

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16



Задача 8. Укажите наибольшее значение параметра p , при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$$2 \cos\left(2\pi - \frac{\pi x^2}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right) - 3 = p - 2 \sin\left(-\frac{\pi x^2}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right).$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi x^2}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi x^2}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right) = \frac{p+3}{2}, \text{ или}$$

$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi x^2}{6} - \frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right) = \frac{p+3}{2}.$$

Рассмотрим отдельно выражение $t = 2\pi - \frac{\pi x^2}{6} - \frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}$, его можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} 2\pi - \frac{\pi x^2}{6} - \frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2} &= \frac{\pi}{6}(12 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2}) = \frac{\pi}{6}(9 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2} + 3) \\ &= \frac{\pi}{6}\left((\sqrt{9-x^2} - 1)^2 + 2\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что корень принимает значения от 0 до 3, то $t \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, тогда $\cos t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Найдем, в каких пределах изменяется параметр:

$$-1 \leq \frac{p+3}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -5 \leq p \leq -2.$$

Ответ: -2

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16

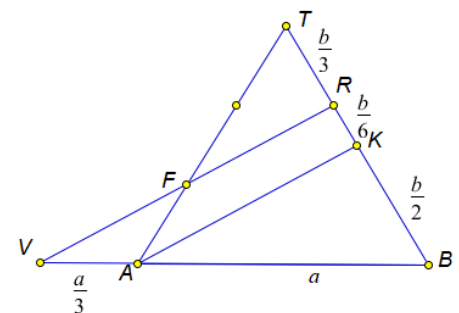


Задача 9.

Дана правильная четырехугольная пирамида $TABCD$ с основанием $ABCD$, причем $AB = 9/2$. На ее высоте TO выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки OA, OB, OC и OD , соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки O . Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане AK боковой грани TAB , проходящей через середину ребра TC и точку F отрезка TA такую, что $AF:FT = 1:2$, если известно, что расстояние от точки C до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{2/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления.

Решение.

Пусть α - плоскость сечения, ρ - расстояние от точки C до этой плоскости сечения, a - сторона основания пирамиды $TABCD$, φ - угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды.



1. Построение сечения $T_1A_1B_1C_1D_1$

1) R – точка пересечения плоскости сечения

α с BT

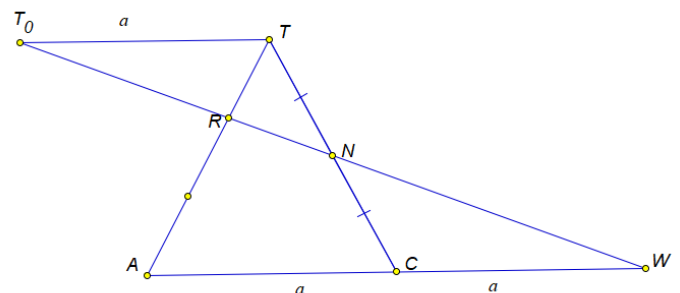
$$FR \parallel AK, \quad TB = b, \quad TR : RB = 1 : 2,$$

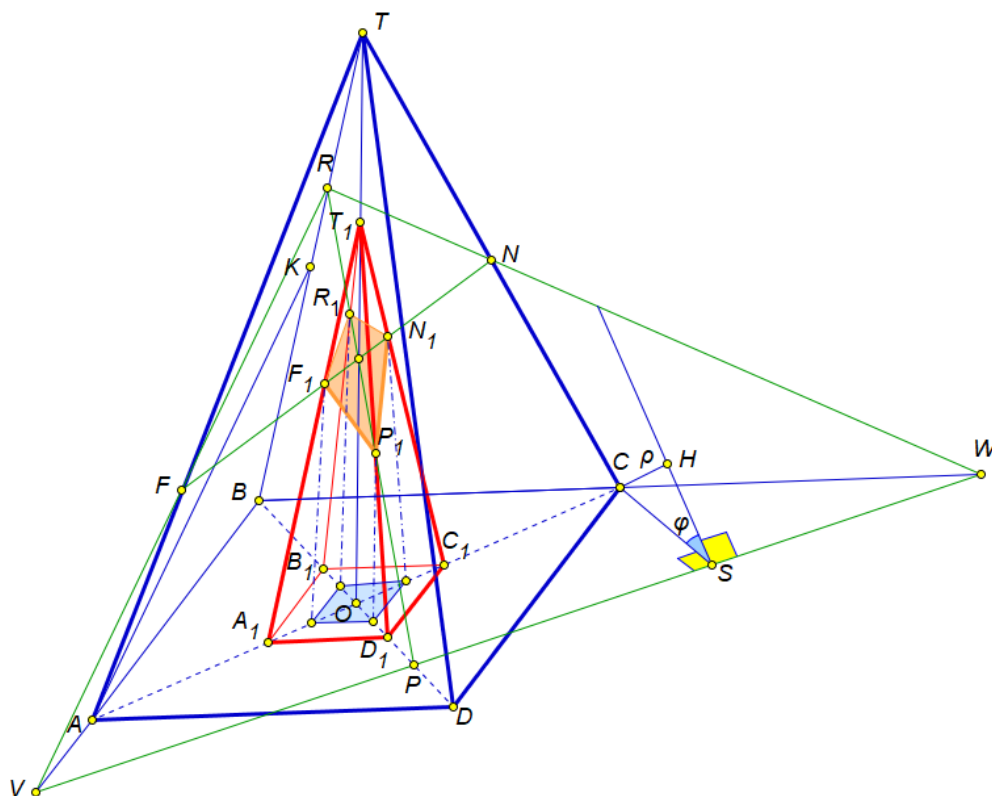
$$VA = a/3$$

2) W – точка пересечения

плоскости сечения α с BC

$$TN = b/2, \quad BC : CW = 1 : 1, \quad CW = a.$$



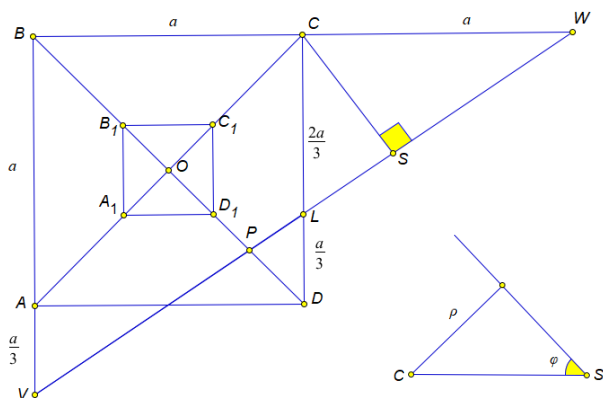


3) P – точка пересечения BD с VW (прямая пересечения плоскости сечения

с плоскостью основания) $BP : PD = 4 : 1$, $PD = \frac{1}{5}BD = \frac{a\sqrt{2}}{5}$,

$$D_1P = \frac{2}{15}BD = \frac{2\sqrt{2}}{15}a.$$

$$4) \sin \varphi = \frac{\rho}{CS}, \quad CS = \frac{2a}{\sqrt{13}}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{4a^2 - 13\rho^2}}{2a}.$$





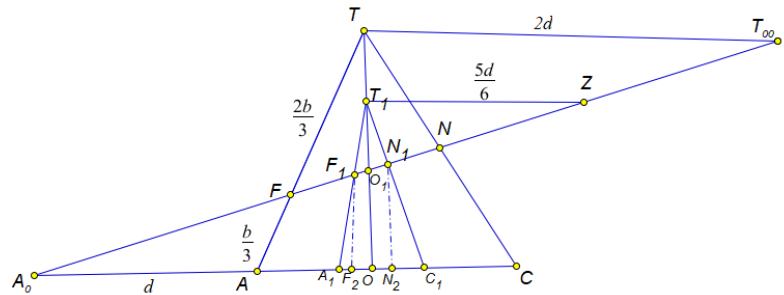
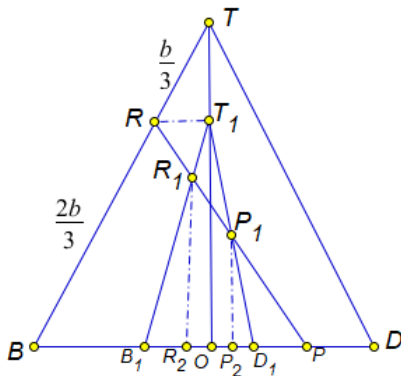
4) R_1 и P_1 – точки пересечения ребер T_1B_1 и T_1D_1 с плоскостью сечения α

$$\frac{R_1T_1}{R_1B_1} = \frac{RT_1}{B_1P}, \quad RT_1 = \frac{1}{3}BO = \frac{1}{6}BD, \quad B_1P = \frac{7}{15}BD, \quad \frac{R_1T_1}{R_1B_1} = \frac{5}{14}, \quad \frac{R_1T_1}{T_1B_1} = \frac{5}{19}.$$

$$R_2 - \text{проекция } R_1 \text{ на плоскость основания, } \frac{OR_2}{OB_1} = \frac{5}{19}, \quad OR_2 = \frac{5}{19} \cdot \frac{BD}{6} = \frac{5\sqrt{2}a}{19 \cdot 6}.$$

$$P_2 - \text{проекция } P_1 \text{ на плоскость основания, } \frac{T_1P_1}{P_1D_1} = \frac{RT_1}{D_1P}, \quad \frac{T_1P_1}{P_1D_1} = \frac{5}{4}, \quad \frac{T_1P_1}{T_1D_1} = \frac{5}{9},$$

$$\frac{OP_2}{OD_1} = \frac{5}{9}, \quad OP_2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{BD}{6} = \frac{5\sqrt{2}a}{9 \cdot 6}, \quad R_2P_2 = \frac{70\sqrt{2}a}{19 \cdot 27}.$$



$$TT_{00} \parallel A_0A, \quad A_0A = d, \quad TT_{00} = 2d, \quad A_0C = TT_{00} = 2d, \quad AC = d.$$

$$O_1 - \text{точка пересечения } A_0T_{00} \text{ и } TO, \quad \frac{OO_1}{TO_1} = \frac{3}{4}, \quad TO_1 = \frac{4}{7}TO, \quad T_1O_1 = \frac{5}{21}TO.$$

$$T_1Z \parallel A_0A, \quad \frac{A_0O}{T_1Z} = \frac{OO_1}{T_1O_1} = \frac{9}{5}, \quad T_1Z = \frac{5}{6}d. \quad \frac{T_1F_1}{A_1F_1} = \frac{T_1Z}{A_0A_1} = \frac{5}{8}, \quad \frac{T_1F_1}{T_1A_1} = \frac{5}{13}.$$

$$\frac{T_1N_1}{C_1N_1} = \frac{T_1Z}{A_0C_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{T_1N_1}{T_1C_1} = \frac{1}{3}.$$

$$F_2 - \text{проекция } F_1 \text{ на плоскость основания, } \frac{OF_2}{OA_1} = \frac{5}{13}, \quad OF_2 = \frac{5}{13} \cdot \frac{BD}{6} = \frac{5\sqrt{2}a}{13 \cdot 6}.$$



N_2 - проекция N_1 на плоскость основания, $\frac{ON_2}{OC_1} = \frac{1}{3}$, $ON_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{BD}{6} = \frac{\sqrt{2}a}{3 \cdot 6}$.

$$F_2 N_2 = \frac{14\sqrt{2}a}{9 \cdot 13}.$$

2. Площадь сечения $F_1 R_1 N_1 P_1$

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos \varphi} = \frac{S_{F_2 R_2 N_2 P_2}}{\cos \varphi} = \frac{F_2 N_2 \cdot R_2 P_2}{2 \cos \varphi} = \frac{3 \cdot 49 \cdot 5 \cdot 8a^3}{9^3 \cdot 13 \cdot 19 \sqrt{4a^2 - 13\rho^2}}.$$

$$a = 9/2, \quad \rho = 4\sqrt{\frac{2}{13}}, \quad S_{сеч} = \frac{3 \cdot 49 \cdot 5 \cdot 8a^3}{9^3 \cdot 13 \cdot 19 \sqrt{4a^2 - 13\rho^2}} = \frac{105}{247} \approx 0,43.$$

Ответ: 0,43.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16