Отборочный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль: «Математика»

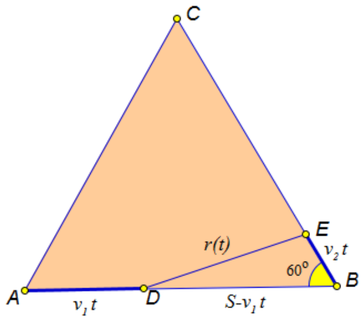
Класс участия: 11

Вариант задания: 1

Задача 1.

Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 80 $км/ч$, а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 50 $км/ч$. Через 7 часов после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами.

Решение.



Пусть $AB = BC = AC = S$. Обозначим расстояние между автомобилем и поездом через $r = r(t)$, где t — время от начала движения. Тогда по теореме косинусов имеем: $r^2 = (S-80t)^2 + (50t)^2 - 50t(S-80t)$. Для нахождения времени, при котором расстояние между автомобилем и поездом было наименьшим, вычислим производную функции $r^2 = r^2(t)$:

$(r^2)' = -2\cdot 80(S-80t) + 2\cdot 2500t - 50(S-80t) + 80\cdot 50t = -210S + 2(6400+2500+4000)t = 0$.

Так как наименьшее значение в процессе движения функция $r^2 = r^2(t)$ принимает при $t = 7$, то $-105S + (6400+2500+4000)\cdot 7 = 0$, и $S = 860$.

Ответ: 860 *км*.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	5

Задача 2.

Решите уравнение $2\log_2[x/3] = 2 + \log_2(x-8)$.

Здесь $[x]$ – целая часть числа x, т.е. $[x] \in Z,\ [x] \le x < [x]+1$. В ответ запишите сумму всех полученных значений x.

Решение:

$n \le x/3 < n+1, \quad n \in \mathbb{Z}, \left[x/3\right] = n \Rightarrow 2\log_2 n = 2 + \log_2(x-8), \quad 3n \le x < 3n+3,$

$\log_2(3n-8) \le \log_2(x-8) < \log_2(3n-5) \Rightarrow 2 + \log_2(3n-8) \le 2 + \log_2(x-8) < 2 + \log_2(3n-5) \Rightarrow$

$\log_2(12n-32) \le 2\log_2 n < \log_2(12n-20) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 12n - 32 \le n^2, \\ n^2 < 12n - 20, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \in (-\infty; 4] \cup [8; +\infty), \\ n \in (2; 10), \end{cases} \Rightarrow n \in \{3; 4; 8; 9\}.$$

$$2\log_2 n = 2 + \log_2(x-8) \Rightarrow x = \frac{n^2 + 32}{4}$$

$$n = 3 \Rightarrow x = \frac{41}{4}; \quad n = 4 \Rightarrow x = 12; \quad n = 8 \Rightarrow x = 24; \quad n = 9 \Rightarrow x = \frac{113}{4}.$$

$$\frac{41}{4} + 12 + 24 + \frac{113}{4} = 74{,}5.$$

Ответ: 74,5

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	5

Задача 3.

Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x)=\log_2(15\cos 2x+17)$ при $x\in\left[(5/3)\left(\operatorname{arctg}(1/7)\right)\cos(\pi+\arcsin(-0,8));\operatorname{arctg}2\right]$.

Решение: Так как $\cos(\pi+\arcsin(-0,8))=\cos(\pi-\arcsin 0,8)=-\cos(\arcsin 0,8)=-0,6$, то $x\in\left[(5/3)\left(\operatorname{arctg}(1/7)\right)\cos(\pi+\arcsin(-0,8));\operatorname{arctg}2\right]=\left[-\operatorname{arctg}(1/7);\operatorname{arctg}2\right]$.

Следовательно, $2x\in\left[-2\operatorname{arctg}(1/7);2\operatorname{arctg}2\right]$. Поскольку $0<\operatorname{arctg}(1/7)<\operatorname{arctg}1=\pi/4$, $0<2\operatorname{arctg}(1/7)<\pi/2$, $-\pi/2<-2\operatorname{arctg}(1/7)<0$, а также $\pi/4<\operatorname{arctg}2<\pi/2$, $\pi/2<2\operatorname{arctg}2<\pi$, то $\cos 2x\in[\cos(2\operatorname{arctg}2);1]$. Используя формулу $\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, получаем $\cos(2\operatorname{arctg}2)=-0,6$, и $\cos 2x\in[-0,6;1]$. Отсюда имеем $15\cos 2x+17\in[8;32]$, и $f(x)=\log_2(15\cos 2x+17)\in[\log_2 8;\log_2 32]=[3;5]$.

Отрезок $\left[3;5\right]$ является множеством значений функции $f(x)=\log_2(15\cos 2x+17)$ при $x\in\left[(5/3)\left(\operatorname{arctg}(1/7)\right)\cos(\pi+\arcsin(-0,8));\operatorname{arctg}2\right]$. Сумма целых чисел из отрезка $\left[3;5\right]$ равна 12.

Ответ: $E_f=\left[3;5\right]$**, сумма целых чисел равна 12.**

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	6

Задача 4.

Сколькими способами Аня, Боря, Вова, Гена и Даша могут занять места в ряде из 10 сидений, чтобы Аня и Боря не оказались соседями?

Решение.

Если Аня выберет одно из 2 крайних мест, то Боря выбирает из 8; если Аня выберет одно из 8 не крайних, то $(2 \cdot 8 + 8 \cdot 7) \cdot A_8^3 = 72 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ Боря выбирает из 7. После этого остальные трое выбирают места произвольно.

В итоге число способов рассадки

Ответ: 24192

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12

Задача 5.

Найти вторую цифру после запятой в десятичной записи числа $(1+\sqrt{3})^{24}$.

Решение:

$$(1+\sqrt{3})^{24} = \sum_{k=0}^{24} C_{24}^k (\sqrt{3})^k = \sum_{k=0}^{12} C_{24}^{2k} 3^k + \sqrt{3} \sum_{k=0}^{11} C_{24}^{2k+1} 3^k$$

$$(1-\sqrt{3})^{24} = \sum_{k=0}^{24} C_{24}^k (-\sqrt{3})^k = \sum_{k=0}^{12} C_{24}^{2k} 3^k - \sqrt{3} \sum_{k=0}^{11} C_{24}^{2k+1} 3^k$$

$$(1+\sqrt{3})^{24} + (1-\sqrt{3})^{24} = 2\sum_{k=0}^{12} C_{24}^{2k} 3^k = M \in \mathbb{N}.$$

$$r = \left|(1-\sqrt{3})^{24}\right| < \left(\frac{3}{4}\right)^{24} = \left(\frac{81}{256}\right)^{6} < \left(\frac{1}{3}\right)^{6} = \frac{1}{729} < \frac{1}{100}$$

Поскольку 24 четно, то $(1+\sqrt{3})^{24} = M - r$.

Ответ: 9

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12

Задача 6.

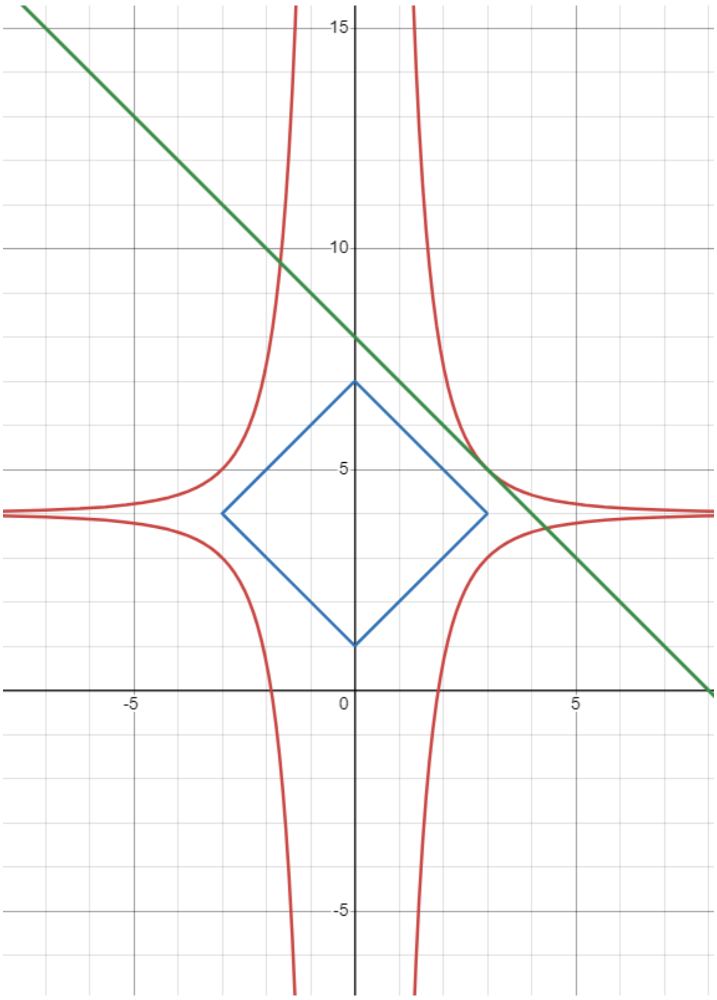
Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если точка A принадлежит кривой $y^2x^6 - 729 = 8yx^6 - 16x^6$, а точка B – множеству решений уравнения $|x| + |y-4| = 3$? В ответ запишите квадрат найденной наименьшей длины.

Решение.

Преобразуем первое уравнение

$$x^6(y-4)^2 - 729 = 0 \Leftrightarrow (x^3(y-4)-27)(x^3(y-4)+27) = 0 \Leftrightarrow y = 4 \pm \frac{27}{x^3}.$$

Множество точек координатной плоскости, задающееся уравнениями $y = 4 \pm \frac{27}{x^3}$, симметрично относительно точки $(0;4)$ и относительно прямых, проходящих через эту точку параллельно осям координат. Множество решений уравнения $|x| + |y-4| = 3$ образует на координатной плоскости квадрат с центром в точке $(0;4)$ сторонами, параллельными биссектрисам координатных углов. Наименьшая длина может отрезка AB будет совпадать с расстоянием между



прямой $x + y - 7 = 0$, содержащей сторону квадрата, и касательной к кривой $y = 4 + \frac{27}{x^3}$, параллельной этой прямой. Найдем уравнение касательной:

$y' = -\dfrac{81}{x^4}$, $y' = -1$, $x^4 = 81$, $x = 3$, $y = 4 + \dfrac{27}{3^3} = 5$, $y = -x + 8$. Расстояние от точки $(3;5)$ до прямой $x + y - 7 = 0$ равно $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: 0,5

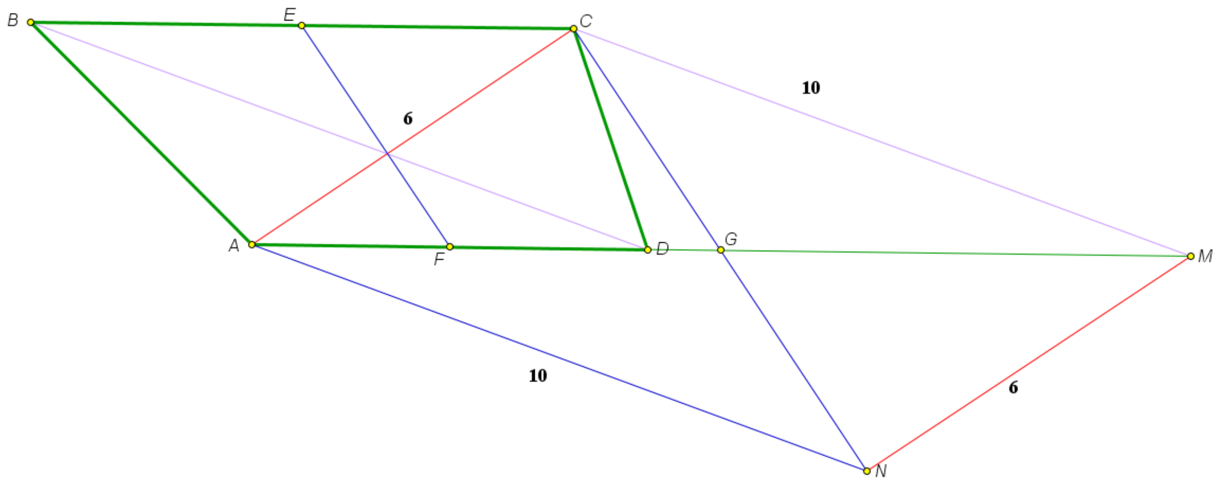
Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	12

Задача 7.

Площадь трапеции равна 24. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, если диагонали трапеции равны 6 и 10.

Решение:



AC, BD диагонали трапеции

$CM \parallel BD, CM = BD; CM \parallel AN, CM = AN.$

$ACMN$ параллелограмм

E - середина BC, F - середина AD.

$EF \parallel CG, AG = GM$; CN - диагональ параллелограмма $ACMN$.

Площадь $ABCD$ равна площади ACM и площади CMN.

$$S_{CMN} = \frac{1}{2} CM \cdot MN \sin\angle CMN \Rightarrow \sin\angle CMN = \frac{48}{60} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\angle CMN = \frac{3}{5}$$

$$2EF = \sqrt{CM^2 + MN^2 - 2CM \cdot MN \cos\angle CMN} = \sqrt{100 + 36 - 72} = 8, EF = 4.$$

Ответ: 4.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16

Задача 8.

Решите уравнение с параметром. В ответе укажите наибольшее значение параметра, при котором существует решение уравнения:

$$6-\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arcctg} x)}+2\cos(\arcsin x)+p=0.$$

Решение.

Преобразуем выражения

$$\operatorname{tg}^2(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)}=\frac{1}{x^2},$$

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=\sqrt{1-x^2}.$$

Тогда уравнение перепишется в виде:

$$6-x^2+2\sqrt{1-x^2}+p=0,\ x\neq 0.$$

Сделаем замену $\sqrt{1-x^2}=y\geq 0$.Уравнение примет вид:

$$y^2+2y+p+5=0,\ y\neq 1\ \Rightarrow\ y=-1\pm\sqrt{-p-4},\ 0\leq y<1..$$

Один корень всегда отрицательный, проверим второй:

$$-1+\sqrt{-p-4}\geq 0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{-p-4}\geq 1\ \Leftrightarrow\ -p-4\geq 1\ \Leftrightarrow\ p\leq -5$$

$$-1+\sqrt{-p-4}<1\ \Leftrightarrow\ \sqrt{-p-4}<2\ \Leftrightarrow\ -p-4<4\ \Leftrightarrow\ p>-8$$

Ответ: -5

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16

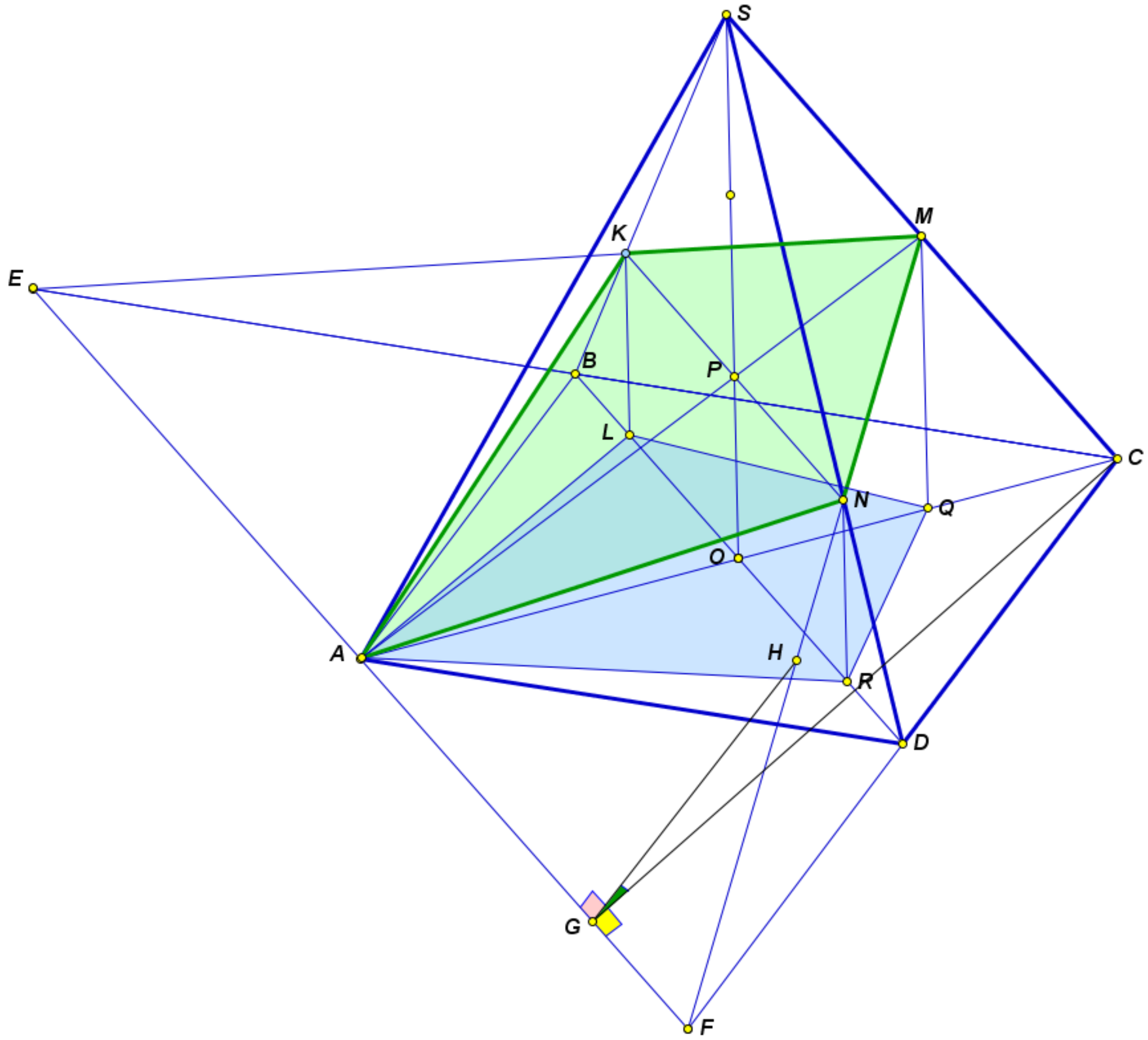
Задача 9.

Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна $52\sqrt{3}$, а диагональ $BD = 13\sqrt{2}$. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через середину ребра SC и точку N, лежащую на боковом ребре пирамиды SD, причем $SN = 2DN$, если расстояние от точки B до плоскости сечения равно $\sqrt{6}$.

Решение.

Построим сечение пирамиды. Через точку N в плоскости BSD проведем прямую KN, параллельную BD. Пусть $P = SO \cap KN$, $SP = 2SO$, а M – середина SC. Отрезки AM и SO являются медианами треугольника ASC, они пересекаются в точке P. Следовательно, сечение проходит через точку A. Искомое сечение – четырехугольник $AKMN$.

Площадь сечения $AKMN$ будем вычислять по формуле $S_{сеч} = \dfrac{S_{пр}}{\cos\varphi}$, где $S_{пр}$ - площадь проекции сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания. Проекцией является четырехугольник $ALQR$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = 52\sqrt{3}$.



Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

$$S_{np} = 2(S_{AOR} + S_{ROQ}) = \frac{S}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{S}{2} = 26\sqrt{3}.$$

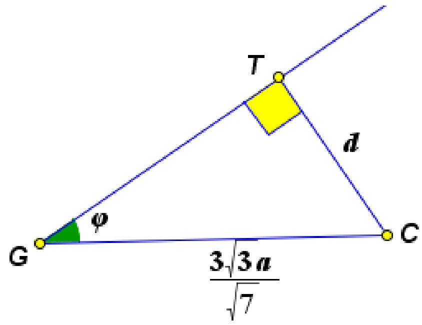
Плоскость сечения и плоскость основания пересекаются по прямой EF, параллельной BD и проходящей через точку A. Пусть CG – перпендикуляр к прямой EF, $H \in MF$, $HG \perp EF$. Угол CGH – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, он равен φ.

Расстояние от точки C до плоскости сечения равно удвоенному расстоянию от точки B до плоскости сечения и равно $d = 2\sqrt{6}$.

Отрезок CG – высота треугольника ECF, $EF \cdot CG = 4S_{ABCD}$, $EF = 2BD$,

$$CG = \frac{4S_{ABCD}}{2BD} = \frac{2\cdot 52\sqrt{3}}{13\sqrt{2}} = 4\sqrt{6}.$$

Проведем перпендикуляр CT к прямой GH, длина этого перпендикуляра равна d. Тогда



$$\sin\varphi = \frac{CT}{CG} = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 30°, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi} = 52.$$

Ответ: 52.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Дан неверный ответ/ответ отсутствует	0
Дан верный ответ	16