



## Профиль олимпиады: «Математика»

**Класс участия: 8**

**Вариант задания: 2**

**№1.** (15 баллов) При каких значениях параметра  $a$  у уравнения  $x^2 - 2x - a(a+2) = 0$  существуют два корня, причём меньший корень уравнения больше числа  $1/2$ ?

**№2.** (15 баллов) Найдите все пары  $(x; y)$ , которые удовлетворяют одновременно двум условиям  $\sqrt{-|x+y|} + 1 > 0$  и  $\left(\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{|12\sqrt{5} + 29|}\right) \cdot |y| + 6 = 0$ .

**№3.** (15 баллов) В квадрате  $ABCD$  точка  $K$  делит сторону  $AB$  в отношении  $1:2$ , считая от точки  $A$ . Точка  $M$  лежит на диагонали  $AC$  так, что  $MC : AC = 1:3$ . Найти  $\angle KMD$ .

**№4.** (15 баллов) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $2|x+1| = a - x - 3$  имеет не менее одного решения, причём все решения неположительные и больше, чем  $(-3)$ ?

**№5.** (20 баллов) В равностороннем треугольнике  $ABC$  точка  $M$  делит сторону  $AC$  в отношении  $1:4$ , считая от точки  $A$ . К отрезку  $BM$  провели серединный перпендикуляр, который пересек сторону  $AB$  в точке  $E$ , а сторону  $BC$  в точке  $K$ . Найти отношение площади треугольника  $EMK$  к площади треугольника  $ABC$ .

**Продолжение билета на обороте**



**№6.** (20 баллов) Садовому товариществу было предписано очистить пруд, поскольку процент примесей в воде оказался равным 50, а санитарный надзор требует не более 5. Объем пруда 6000 куб. м.

Можно арендовать на весь период работы очистное сооружение за 3000 тыс. руб, производительность которого 200 куб м в сутки. Придется нанять механика за 1 тыс. руб в сутки и машину для вывоза отходов за 2 тыс. руб в сутки. Один цикл очистки состоит из четырех неразрывных этапов, каждый из которых требует прогонки всего объема воды пруда через определенные фильтры. При этом содержание тяжелых металлов, ила и других примесей на первом этапе уменьшается на 45%, на втором на 35%, на третьем на 25%, на четвертом на 20%. Каждый раз процент считается по отношению к предыдущему этапу. По окончании цикла механик берет пробу воды. По договору с владельцем очистного сооружения, если итоговый процент примесей больше 5, то фильтры для следующего такого же цикла очистки предоставляются бесплатно.

Можно арендовать более производительное очистное сооружение, очищающее 400 куб. м воды в сутки, стоимость аренды на весь период работы составит 6000 тыс. руб. Цикл очистки такой же, как и в первом случае, условия те же, по тем же условиям необходимо нанять механика и машину.

Использовать арендованные очистные сооружения разрешено только в период с 15 мая по 15 сентября.

Какое очистное сооружение выгоднее арендовать садовому товариществу? Сколько при этом будет потрачено денег?



## РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

Профиль: Математика

Предмет: Математика

Класс: 8

Вариант: 2

### №1.

При каких значениях параметра  $a$  у уравнения  $x^2 - 2x - a(a + 2) = 0$  существуют два корня, причём меньший корень уравнения больше числа  $1/2$ ?

Решение:

Найдем корни  $x^2 - 2x - a(a + 2) = (x + a)(x - a - 2) = 0$ ,

$$x_1 = -a, \quad x_2 = a + 2.$$

1)  $x_1 = x_2$  при  $-a = a + 2, \quad a = -1.$

2)  $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_2 > 0,5 \end{cases}$ , получим  $\begin{cases} a < -1 \\ a > -\frac{3}{2} \end{cases}$

3)  $\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 > 0,5 \end{cases}$  при  $a \in (-1; -\frac{1}{2})$

Ответ:  $a \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right).$



**№2.**

Найдите все пары  $(x; y)$ , которые удовлетворяют  
одновременно двум условиям  $\sqrt{-|x+y|}+1 > 0$  и  
 $\left(\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{|12\sqrt{5}+29|}\right) \cdot |y|+6=0$ .

Решение:

1 условие:  $|x+y| \leq 0 \Leftrightarrow x = -y$ .

2 условие: Обозначим  $A = \sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{|12\sqrt{5}+29|}$ ;

$$A^2 = |12\sqrt{5}-29| + |12\sqrt{5}+29| - 2\sqrt{|12\sqrt{5}-29| \cdot |12\sqrt{5}+29|};$$

$$A^2 = 29 - 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 29 - 2\sqrt{29^2 - (12\sqrt{5})^2};$$

$$A^2 = 58 - 22 = 36; A < 0; A = -6$$

$$-6|y| + 6 = 0; |y| = 1$$

Решения  $(1; -1)$ ;  $(-1; 1)$ .

Ответ:  $(1; -1)$ ;  $(-1; 1)$ .



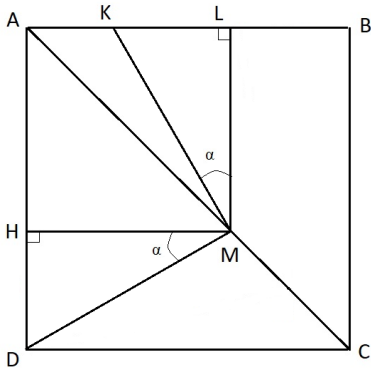
**№3.**

В квадрате  $ABCD$  точка  $K$  делит сторону  $AB$  в отношении 1:2, считая от точки  $A$ . Точка  $M$  лежит на диагонали  $AC$  так, что  $MC:AC=1:3$ . Найти  $\angle KMD$ .

Решение:

Проведем  $ML \perp AB$ ;  $MH \perp AD$   $\triangle MLK = \triangle MHD$  по двум катетам.

Следовательно, соответствующие углы равны:  
 $\angle DMK = \angle HML = 90^\circ$ .



Ответ:  $90^\circ$ .



**№4.**

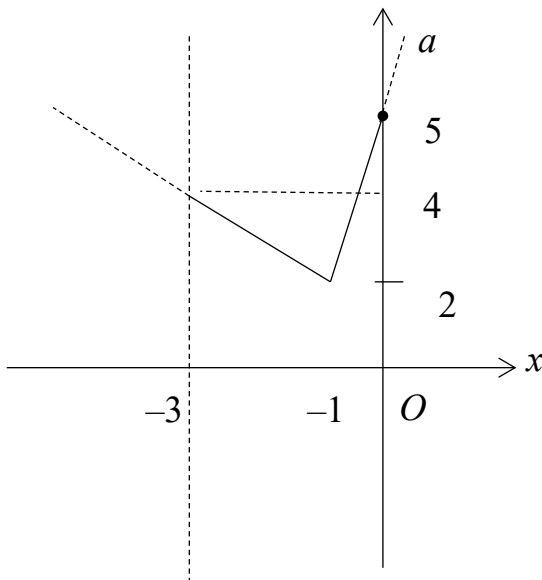
При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $2|x+1|=a-x-3$  имеет не менее одного решения, причем все решения неположительные и больше, чем  $(-3)$ ?

Решение:

построим график  $a(x) = 2|x+1| + x + 3$ .

При  $x \geq -1$   $a(x) = 3x + 5$ ,

при  $x < -1$   $a(x) = -x + 1$ , поэтому получаем



При  $a < 2$  нет решений, при значениях параметра  $a \geq 2$  решений два или одно. При  $2 \leq a < 4$  все решения удовлетворяют условиям.

Ответ:  $2 \leq a < 4$ .



### №5.

В равностороннем треугольнике  $ABC$  точка  $M$  делит сторону  $AC$  в отношении 1:4, считая от точки  $A$ . К отрезку  $BM$  провели серединный перпендикуляр, который пересек сторону  $AB$  в точке  $E$ , а сторону  $BC$  в точке  $K$ . Найти отношение площади треугольника  $EMK$  к площади треугольника  $ABC$ .

Решение:

1.  $ME = EB; MK = KB$

( $E$  и  $K$  принадлежат серединному перпендикуляру к отрезку  $MB$ ).

$EK$  – общая сторона.

Следовательно,

$$\triangle EMK = \triangle EBK \Rightarrow \angle EMK = \angle EBK = 60^\circ$$

2.  $\triangle EMB$  равнобедренный  $\Rightarrow \angle EMB = \angle EBM = \beta$ .

3.  $\angle AEM = 2\beta$  (внешний для  $\triangle EBM$ )

4.  $\angle EMC = 60 + 2\beta$  (внешний для  $\triangle AEM$ ).

$$\Rightarrow \angle KMC = \angle EMC - \angle EMK = 2\beta \Rightarrow \triangle AEM \sim \triangle MKC \text{ (по двум углам).}$$

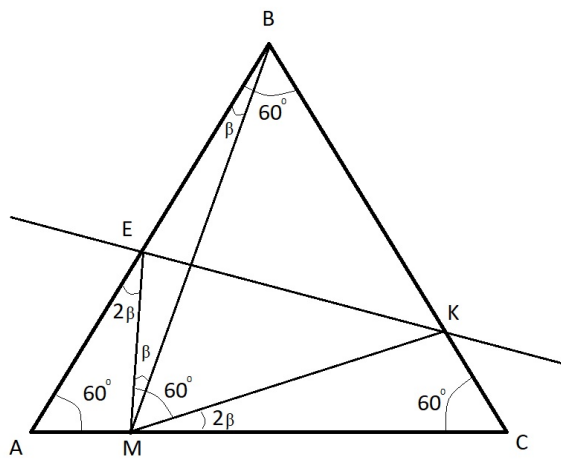
5. Введем обозначение:  $AM = x, MC = 4x, BE = EM = y, BK = KM = z, EA = 5x - y, KC = 5x - z$ , тогда

из подобия треугольников следует

$$\frac{AM}{KC} = \frac{EM}{MK} = \frac{AE}{MC} \Rightarrow \frac{x}{5x-z} = \frac{y}{z} = \frac{5x-y}{4x} \Rightarrow 3y = 7x; 2z = 7x.$$

$$6. \frac{S_{\triangle EBK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle EMK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{y}{5x} \cdot \frac{z}{5x} = \frac{\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{2}}{5 \cdot 5} = \frac{49}{150}.$$

Ответ:  $\frac{49}{150}$ .





## №6.

Садовому товариществу было предписано очистить пруд, поскольку процент примесей в воде оказался равным 50, а санитарный надзор требует не более 5. Объём пруда 6000 куб. м.

Можно арендовать на весь период работы очистное сооружение за 3000 тыс. руб, производительность которого 200 куб м в сутки. Придется нанять механика за 1 тыс. руб в сутки и машину для вывоза отходов за 2 тыс. руб в сутки. Один цикл очистки состоит из четырех неразрывных этапов, каждый из которых требует прогонки всего объёма воды пруда через определенные фильтры. При этом содержание тяжелых металлов, ила и других примесей на первом этапе уменьшается на 45%, на втором на 35%, на третьем на 25%, на четвертом на 20%. Каждый раз процент считается по отношению к предыдущему этапу. По окончании цикла механик берет пробу воды. По договору с владельцем очистного сооружения, если итоговый процент примесей больше 5, то фильтры для следующего такого же цикла очистки предоставляются бесплатно.

Можно арендовать более производительное очистное сооружение, очищающее 400 куб. м воды в сутки, стоимость аренды на весь период работы составит 6000 тыс. руб. Цикл очистки такой же, как и в первом случае, условия те же, по тем же условиям необходимо нанять механика и машину.

Использовать арендованные очистные сооружения разрешено только в период с 15 мая по 15 сентября.

Какое очистное сооружение выгоднее арендовать садовому товариществу? Сколько при этом будет потрачено денег?

Решение.

Первый случай.  $6000:200=30$  дней потребуется на один этап цикла. На весь цикл 120 дней. С 15 мая по 15 сентября дней  $17+30+31+31+15=124$ . Процент примесей после одного цикла  $50 \cdot 0,55 \cdot 0,65 \cdot 0,75 \cdot 0,8 = 10,725 > 5$

Значит, необходим еще один цикл очистки, но на него уже не хватит времени.





Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

---

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Второй случай.  $6000:400=15$  дней потребуется на один этап цикла, на весь цикл 60 дней. Посчитаем процент примесей после второго цикла:

$$10,725 \cdot 0,55 \cdot 0,65 \cdot 0,75 \cdot 0,8 < 2,31 < 5.$$

Считаем деньги:  $6000+120+240=6360$  тыс.руб

Ответ: необходимо арендовать более производительное (второе) очистное сооружение. Будет потрачено 6 360 тыс.руб.



## Критерии оценивания олимпиадной работы

**Профиль:** Математика

**Предмет:** Математика

**Класс:** 8, Вариант 2

### Задание 1

максимальная оценка: **15 баллов**

| Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)                                   | Балл |
|---|------|
| Полное обоснованное решение   | 15   |
| Верный ход решения, ответ отличается граничной точкой.  | 12   |
| Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение. | 10   |
| Рассмотрен только один случай.  | 5    |
| Неверные рассуждения или записан только ответ.  | 0    |

### Задание 2

максимальная оценка: **15 баллов**

| Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)   | Балл |
|---|------|
| Полное обоснованное решение   | 15   |
| При верном ходе решения и рассмотрении всех случаев, избавлении от модулей и корней допущена вычислительная ошибка. | 10   |
| Рассмотрено только одно условие.<br>Или неверно раскрыт модуль.<br>Или не избавились от корней.                     | 5    |
| Неверные рассуждения или записан только ответ.  | 0    |

### Задание 3

максимальная оценка: **15 баллов**

| Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)   | Балл |
|---|------|
| Решение верно.  | 15   |
| Решение верно, но недостаточно обоснованно.                       | 10   |
| Доказано равенство треугольников: $\triangle MLK = \triangle MHD$ | 5    |
| Решение неверно или отсутствует                                   | 0    |

### Задание 4

максимальная оценка: **15 баллов**

| Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)   | Балл |
|---|------|
| Полное, обоснованное решение  | 15   |
| Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка на последнем этапе или ответ отличается граничной точкой. | 12   |
| При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи.   | 10   |
| Частично верно «раскрыт» модуль или другое верное начало решения, нет продолжения.                              | 5    |
| Решение не соответствует перечисленным выше критериям   | 0    |



Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

### Задание 5

максимальная оценка: **20 баллов**

| Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)    | Балл |
|--|------|
| Решение верно.   | 20   |
| Верно, но недостаточно обоснованно                                 | 18   |
| Решение верно, но недостаточно обоснованно и допущена одна ошибка. | 15   |
| Доказано подобие: $\triangle AEM = \triangle MKC$                  | 12   |
| Доказано три из верных утверждений                                 | 10   |
| Доказано два из верных утверждений                                 | 8    |
| Доказано одно из верных утверждений                                | 5    |
| Решение неверно или отсутствует                                    | 0    |

### Задание 6

максимальная оценка: **20 баллов**

| Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)  | Балл |
|--|------|
| Полное обоснованное решение  | 20   |
| Верные рассуждения, рассмотрены оба случая.<br>Допущена вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения и ответ. | 15   |
| Верно просчитан только один из случаев.  | 10   |
| Есть рассуждения и вычисления, но задача неверно понята.<br>Или неверно считается процент.                         | 5    |
| Решение неверно или отсутствует  | 0    |