

Профиль олимпиады: «Математика»

Класс участия: 8

Вариант задания: 1

№1. (15 баллов) При каких значениях параметра a у уравнения $x^2 - x - a(a-1) = 0$ существуют два корня, причём меньший корень уравнения больше числа $\frac{1}{3}$?

№2. (15 баллов) Найдите все пары $(x; y)$, которые удовлетворяют одновременно двум условиям $\sqrt{-|y-x|} + 1 > 0$ и $(-6 + \sqrt{37} + (\sqrt{3} + 2) \cdot \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}) \cdot |x| + 5 - \sqrt{37} = 0$.

№3. (15 баллов) В квадрате $ABCD$ точка K делит сторону AB в отношении $3:2$, считая от точки A . Точка M лежит на диагонали AC так, что $MC:AC = 1:5$. Найти $\angle KMD$.

№4. (15 баллов) При каких значениях параметра a уравнение $2|x-2| - a - x = 2$ имеет не менее одного решения, причём все решения неотрицательны и меньше 5?

№5. (20 баллов) В равностороннем треугольнике ABC точка M делит сторону AC в отношении $1:4$, считая от точки A . К отрезку BM провели серединный перпендикуляр, который пересек сторону AB в точке E , а сторону BC в точке K . Найти отношение площади треугольника EBC к площади треугольника ABC .

Продолжение билета на обороте



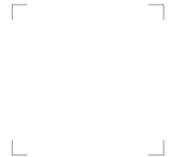
№6. (20 баллов) Садовому товариществу было предписано очистить пруд, поскольку процент примесей в воде оказался равным 56, а санитарный надзор требует не более 5. Объем пруда 5000 куб. м.

Можно арендовать на весь период работы очистное сооружение за 2800 тыс. руб, производительность которого 200 куб м в сутки. Придется нанять механика за 1 тыс. руб в сутки и машину для вывоза отходов за 2 тыс. руб в сутки. Один цикл очистки состоит из четырех неразрывных этапов, каждый из которых требует прогонки всего объема воды пруда через определенные фильтры. При этом содержание тяжелых металлов, ила и других примесей на первом этапе уменьшается на 40%, на втором на 30%, на третьем на 25%, на четвертом на 20%. Каждый раз процент считается по отношению к предыдущему этапу. По окончании цикла механик берет пробу воды. По договору с владельцем очистного сооружения, если итоговый процент примесей больше 5, то фильтры для следующего такого же цикла очистки предоставляются бесплатно.

Можно арендовать более производительное очистное сооружение, очищающее 500 куб. м воды в сутки, стоимость аренды на весь период работы составит 6000 тыс. руб. Цикл очистки такой же, как и в первом случае, условия те же, по тем же условиям необходимо нанять механика и машину.

Использовать арендованные очистные сооружения разрешено только в период с 15 мая по 15 сентября.

Какое очистное сооружение выгоднее арендовать садовому товариществу? Сколько при этом будет потрачено денег?



РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

Профиль: Математика

Предмет: Математика

Класс: 8

Вариант: 1

№1.

При каких значениях параметра a у уравнения $x^2 - x - a(a-1) = 0$ существуют два корня, причём меньший корень уравнения больше числа $\frac{1}{3}$?

Решение:

Найдем корни уравнения $x^2 - x - a(a-1) = (x-a)(x+a-1) = 0$,
 $x_1 = a$, $x_2 = 1 - a$.

1) $x_1 = x_2$ при $a = 1 - a$, $a = 0,5$.

2) $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_2 > \frac{1}{3} \end{cases}$, получим $\begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ 1 - a > \frac{1}{3} \end{cases} \quad a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$

3) $\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 > \frac{1}{3} \end{cases}$ при $a \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$



№2.

Найдите все пары $(x; y)$, которые удовлетворяют
одновременно двум условиям $\sqrt{-|y-x|+1} > 0$ и
 $(-6 + \sqrt{37} + (\sqrt{3} + 2) \cdot \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}) \cdot |x| + 5 - \sqrt{37} = 0$.

Решение:

1 условие: $|y - x| \leq 0 \Leftrightarrow y = x$.

2 условие: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$; $(-6 + \sqrt{37} + 4 - 3) \cdot |x| + 5 - \sqrt{37} = 0$; $|x| = 1$.

Решения $(1; 1)$; $(-1; -1)$.

Ответ: $(1; 1)$; $(-1; -1)$.



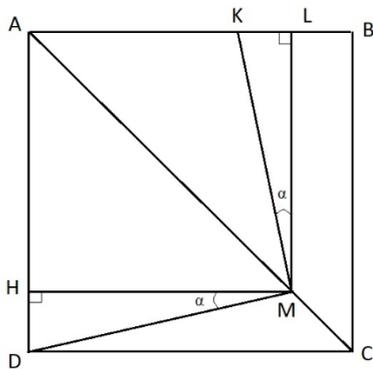
№3.

В квадрате $ABCD$ точка K делит сторону AB в отношении 3:2, считая от точки A . Точка M лежит на диагонали AC так, что $MC:AC=1:5$. Найти $\angle KMD$.

Решение:

Проведем $ML \perp AB$; $MH \perp AD$ $\triangle MLK = \triangle MHD$ по двум катетам.

Следовательно, соответствующие углы равны:
 $\angle DMK = \angle HML = 90^\circ$.



Ответ: 90° .



№4.

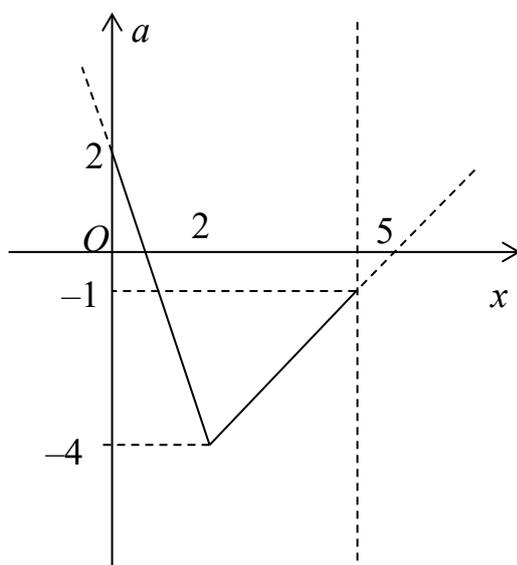
При каких значениях параметра a уравнение $2|x-2| - a - x = 2$ имеет не менее одного решения, причем все решения неотрицательны и меньше 5?

Решение:

построим график $a(x) = 2|x-2| - x - 2$.

При $x \geq 2$ $a(x) = x - 6$,

при $x < 2$ $a(x) = -3x + 2$, поэтому получаем



При $a < -4$ нет решений, при значениях параметра $a \geq -4$ решений два или одно. При $-4 \leq a < -1$ все решения удовлетворяют условиям.

Ответ: $-4 \leq a < -1$



№5.

В равностороннем треугольнике ABC точка M делит сторону AC в отношении 1:4, считая от точки A . К отрезку BM провели серединный перпендикуляр, который пересек сторону AB в точке E , а сторону BC в точке K . Найти отношение площади треугольника EBC к площади треугольника ABC .

Решение:

1. $ME = EB; MK = KB$

(E и K принадлежат серединному перпендикуляру к отрезку MB).

EK – общая сторона.

Следовательно,

$$\triangle EMK = \triangle EBK \Rightarrow \angle EMK = \angle EBK = 60^\circ$$

2. $\triangle EMB$ равнобедренный $\Rightarrow \angle EMB = \angle EBM = \beta$.

3. $\angle AEM = 2\beta$ (внешний для $\triangle EBM$)

4. $\angle EMC = 60 + 2\beta$ (внешний для $\triangle AEM$).

$$\Rightarrow \angle KMC = \angle EMC - \angle EMK = 2\beta \Rightarrow \triangle AEM \sim \triangle MKC \text{ (по двум углам).}$$

5. Введем обозначение:

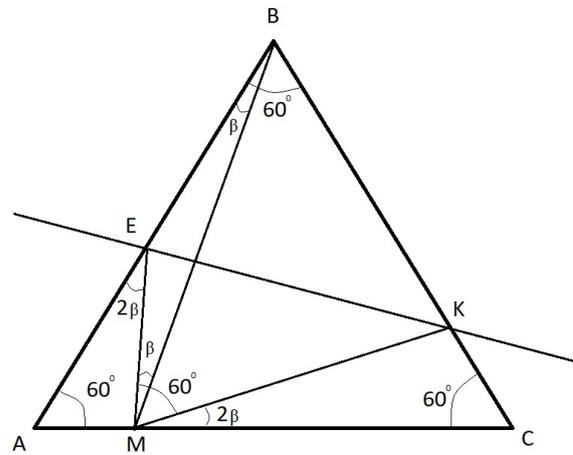
$AM = x, MC = 4x, BE = EM = y, BK = KM = z, EA = 5x - y, KC = 5x - z$, тогда

из подобия треугольников следует

$$\frac{AM}{KC} = \frac{EM}{MK} = \frac{AE}{MC} \Rightarrow \frac{x}{5x-z} = \frac{y}{z} = \frac{5x-y}{4x} \Rightarrow 3y = 7x; 2z = 7x.$$

$$6. \frac{S_{\triangle EBK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{y}{5x} \cdot \frac{z}{5x} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{150}.$$

Ответ: $\frac{49}{150}$.





№6.

Садовому товариществу было предписано очистить пруд, поскольку процент примесей в воде оказался равным 56, а санитарный надзор требует не более 5. Объём пруда 5000 куб. м.

Можно арендовать на весь период работы очистное сооружение за 2800 тыс. руб, производительность которого 200 куб м в сутки. Придется нанять механика за 1 тыс. руб в сутки и машину для вывоза отходов за 2 тыс. руб в сутки. Один цикл очистки состоит из четырех неразрывных этапов, каждый из которых требует прогонки всего объёма воды пруда через определенные фильтры. При этом содержание тяжелых металлов, ила и других примесей на первом этапе уменьшается на 40%, на втором на 30%, на третьем на 25%, на четвертом на 20%. Каждый раз процент считается по отношению к предыдущему этапу. По окончании цикла механик берет пробу воды. По договору с владельцем очистного сооружения, если итоговый процент примесей больше 5, то фильтры для следующего такого же цикла очистки предоставляются бесплатно.

Можно арендовать более производительное очистное сооружение, очищающее 500 куб. м воды в сутки, стоимость аренды на весь период работы составит 6000 тыс. руб. Цикл очистки такой же, как и в первом случае, условия те же, по тем же условиям необходимо нанять механика и машину.

Использовать арендованные очистные сооружения разрешено только в период с 15 мая по 15 сентября.

Какое очистное сооружение выгоднее арендовать садовому товариществу? Сколько при этом будет потрачено денег?

Решение.

Первый случай. $5000:200=25$ дней потребуется на один этап цикла. На весь цикл 100 дней. С 15 мая по 15 сентября дней $17+30+31+31+15=124$.

Процент примесей по окончании одного цикла $56 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,75 \cdot 0,8 = 14,112$, что больше 5. Значит, необходим еще один цикл очистки, но на него уже не хватит времени.



Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Второй случай. $5000:500=10$ дней потребуется на один этап цикла, на весь цикл 40 дней. Посчитаем процент примесей после второго цикла: $14,112 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,75 \cdot 0,8 = 3,56$, что меньше 5. Цель достигнута. Считаем деньги: $6000+80 \cdot 3 = 6240$ тыс. руб.

Ответ: необходимо арендовать более производительное (второе) очистное сооружение. Будет потрачено 6 240 тыс.руб.



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика

Предмет: Математика

Класс: 8, Вариант 1

Задание 1

максимальная оценка: **15 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Полное обоснованное решение	15
Верный ход решения, ответ отличается граничной точкой.	12
Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.	10
Рассмотрен только один случай.	5
Неверные рассуждения или записан только ответ.	0

Задание 2

максимальная оценка: **15 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Полное обоснованное решение	15
При верном ходе решения и рассмотрении всех случаев, избавлении от модулей и корней допущена вычислительная ошибка.	10
Рассмотрено только одно условие. Или неверно раскрыт модуль. Или не избавились от корней.	5
Неверные рассуждения или записан только ответ.	0

Задание 3

максимальная оценка: **15 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение верно.	15
Решение верно, но недостаточно обоснованно.	10
Доказано равенство треугольников: $\triangle MLK = \triangle MHD$	5
Решение неверно или отсутствует	0

Задание 4

максимальная оценка: **15 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Полное, обоснованное решение	15
Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка на последнем этапе или ответ отличается граничной точкой.	12
При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи.	10
Частично верно «раскрыт» модуль или другое верное начало решения, нет продолжения.	5
Решение не соответствует перечисленным выше критериям	0



Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Задание 5

максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение верно.	20
Верно, но недостаточно обоснованно	18
Решение верно, но недостаточно обоснованно и допущена одна ошибка.	15
Доказано подобие: $\triangle AEM = \triangle MKC$	12
Доказано три из верных утверждений	10
Доказано два из верных утверждений	8
Доказано одно из верных утверждений	5
Решение неверно или отсутствует	0

Задание 6

максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Полное обоснованное решение	20
Верные рассуждения, рассмотрены оба случая. Допущена вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения и ответ.	15
Верно просчитан только один из случаев.	10
Есть рассуждения и вычисления, но задача неверно понята. Или неверно считается процент.	5
Решение неверно или отсутствует	0