



## Профиль олимпиады: «Математика»

Класс участия: II

Вариант задания: I

**Задача 1** (12 баллов). Пусть  $x = \log_3 5$ ,  $y = \lg 12$ . Представьте  $\log_2 5$  в виде рационального выражения, составленного из натуральных чисел,  $x$  и  $y$  (с использованием скобок и знаков арифметических действий  $+$ ,  $-$ ,  $:$ ,  $:$ ).

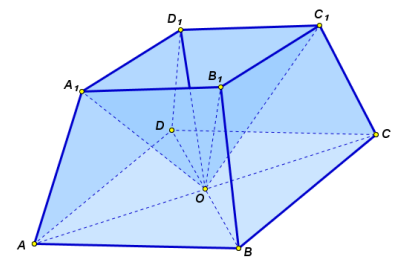
**Задача 2** (16 баллов). Карточки с буквами П, О, Т, О, М, С, Т, В, О сложили в строку в случайном порядке. С какой вероятностью найдутся три карточки подряд, образующие слово ТОМ или ПОТ? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

**Задача 3** (16 баллов). Высота  $BH$  треугольника  $ABC$  является диаметром окружности, которая пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Прямые, касающиеся этой окружности в точках  $D$  и  $E$ , пересекаются в точке  $F$ . Прямая  $BF$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ . Найдите отношение  $AK : KC$  и длины отрезков  $DF$  и  $BK$ , если  $BH = 12$ ,  $AD = 25/13$ ,  $CE = 27/5$ .

**Задача 4** (16 баллов). Для каждого значения параметра  $a$  решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 4x + 5 - a)(x - a + 1)}{\sqrt{9 - x}} > 0, \\ \log_{(x^2 - 4x)/5} a \leq 1. \end{cases}$$

**Задача 5** (20 баллов). В правильной усеченной четырехугольной пирамиде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона нижнего основания  $ABCD$  равна 24, верхнего основания  $A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 12, высота пирамиды  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна  $24\sqrt{2/5}$ , точка  $O$  – центр основания  $ABCD$ . Поверхность многогранника  $\Phi$  состоит из квадрата  $ABCD$ , боковых граней пирамиды  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и боковых граней пирамиды  $OA_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите площадь сечения многогранника  $\Phi$  плоскостью, проходящей через точки  $D$ ,  $C_1$  и середину ребра  $A_1 B_1$ .



**Задача 6** (20 баллов). См. на обороте листа.

**Задача 6** (20 баллов). Сотовая связь – это целый мир возможностей. Но чтобы пользоваться ими, нужно быть в зоне действия базовой станции. Сети GSM (2G) имеют мощность, которая позволяет покрывать территорию радиусом до 35 километров на открытой местности. В городских условиях, где много зданий, зона приема сигнала значительно уменьшается. Сети 3G и 4G (LTE) работают на более высоких частотах, чем сети 2G, и их сигнал хуже проникает сквозь препятствия и больше подвержен помехам. В сетях GSM было достаточно нескольких вышек, чтобы покрывать большие территории, а для 3G и 4G сетей для обеспечения надежной связи требуется больше вышек.

В городе установлен ретранслятор GSM сети, который обеспечивает покрытие в пределах окружности радиусом  $R = 24$  км. Центр окружности – основание вышки. Однако из-за особенностей рельефа зона покрытия этого ретранслятора ограничена хордой, проведенной внутри этой окружности. Хорда находится на расстоянии  $d = 3$  км от центра окружности.

В меньшем сегменте, образованном хордой, необходимо установить два дополнительных ретранслятора (3G вышки) так, чтобы их зоны покрытия касались друг друга, хорды и основной окружности. Каждый из этих ретрансляторов имеет круговую зону покрытия одинакового радиуса  $r$ .

Найдите радиусы зон покрытия двух дополнительных ретрансляторов, которые нужно установить в меньшем сегменте. Определите площадь части меньшего сегмента, которая не попадает в зону действия дополнительных ретрансляторов.



## Решение заданий

Профиль: Математика

Класс: 11

Вариант: 1

1. Пусть  $x = \log_3 5$ ,  $y = \lg 12$ . Представьте  $\log_2 5$  в виде рационального выражения, составленного из натуральных чисел,  $x$  и  $y$  (с использованием скобок и знаков арифметических действий  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$ ). (12 баллов)

*Решение.* Сведём все логарифмы к двоичным. Пусть  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 5 = b$ . Тогда

$$x = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{b}{a}, \quad y = \frac{\log_2 12}{\log_2 10} = \frac{2 + a}{1 + b}$$

Получаем

$$\begin{cases} ax = b \\ (1 + b)y = 2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ax \\ y + axy = 2 + a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2 - y}{xy - 1} \Rightarrow b = \frac{x(2 - y)}{xy - 1}$$

Ответ:  $x(2 - y)/(xy - 1)$ .

2. Карточки с буквами П, О, Т, О, М, С, Т, В, О сложили в строку в случайном порядке. С какой вероятностью найдутся три карточки подряд, образующие слово ТОМ или ПОТ? Ответ запишите в виде несократимой дроби. (16 баллов)

*Решение.* Число перестановок 9 карточек, среди которых 3 О, 2 Т и 4 разных:  $9!/3!2! = 30240$ .

Чтобы составить строку, содержащую слово ТОМ, нужно произвольно расставить 7 блоков: ТОМ, О, О, П, С, Т, В. Это можно сделать  $7!/2!$  способами.

Чтобы составить строку, содержащую слово ПОТ, нужно произвольно расставить 7 блоков: ПОТ, О, О, М, С, Т, В. Это можно сделать  $7!/2!$  способами.

Но мы дважды посчитали строки, содержащие одновременно слова ТОМ и ПОТ, причем содержать могут по-разному:

Чтобы составить строку, содержащую отдельные слова ТОМ и ПОТ, нужно произвольно расставить 5 блоков: ПОТ, ТОМ, О, С, В. Это можно сделать  $5!$  способами.

Чтобы составить строку, содержащую слово ПОТОМ, нужно произвольно расставить 5 блоков: ПОТОМ, О, С, В, Т. Это можно сделать  $5!$  способами.

В итоге мы имеем  $7! - 2 \cdot 5! = 4800$  благоприятных перестановок. Вероятность  $= 4800/30240 =$

Ответ:  $10/63$

3. Высота  $BH$  треугольника  $ABC$  является диаметром окружности, которая пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Прямые, касающиеся этой окружности в точках  $D$  и  $E$ , пересекаются в точке  $F$ . Прямая  $BF$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ . Найдите отношение  $AK:KC$  и длины отрезков  $DF$  и  $BK$ , если  $BH=12$ ,  $AD=25/13$ ,  $CE=27/5$ . (16 баллов)

**Решение.**

Найдем стороны треугольника  $ABC$ .

Треугольники  $BDH$  и  $BHA$  подобные, и

$$\frac{BH}{AB} = \frac{BD}{BH} \Rightarrow BH^2 = AB \cdot BD \Rightarrow$$

$$BH^2 = AB \cdot (AB - AD) \Rightarrow$$

$$AB^2 - AD \cdot AB - BH^2 = 0 \Rightarrow$$

$$13AB^2 - 25AB - 144 \cdot 13 = 0, \sqrt{D} = 313,$$

$$AB = 13.$$

Треугольники  $BEH$  и  $BHC$  подобные, и

$$\frac{BH}{BC} = \frac{BE}{BH} \Rightarrow BH^2 = BC \cdot BE \Rightarrow$$

$$BH^2 = BC \cdot (BC - CE) \Rightarrow BC^2 - CE \cdot BC - BH^2 = 0 \Rightarrow$$

$$5BC^2 - 27BC - 144 \cdot 5 = 0, \sqrt{D} = 123, BC = 15.$$

Тогда  $AH=5$ ,  $HC=9$ ,  $AC=14$ .

Пусть  $O$  - центр окружности. Тогда  $\angle ODF = \angle BDH = 90^\circ \Rightarrow$

$\angle BDO = \angle FDH$ ,  $\angle GDF = \angle FGD$ . Треугольник  $DFG$  равнобедренный,  $DF = FG$ .

Аналогично, треугольник  $EFL$  равнобедренный,  $EF = FL$ .

Поскольку по свойству касательных  $EF = DF$ , то  $GF = LF$ . Следовательно,  $BF$  - медиана треугольника  $GBL$ . Треугольники  $GBL$  и  $ABC$  подобны,  $BK$  - медиана треугольника  $ABC$ . Таким образом,  $AK:KC=1:1$ .

Зная стороны треугольника  $ABC$ , найдем медиану

$$BK = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 15^2 - 14^2} = 2\sqrt{37}.$$

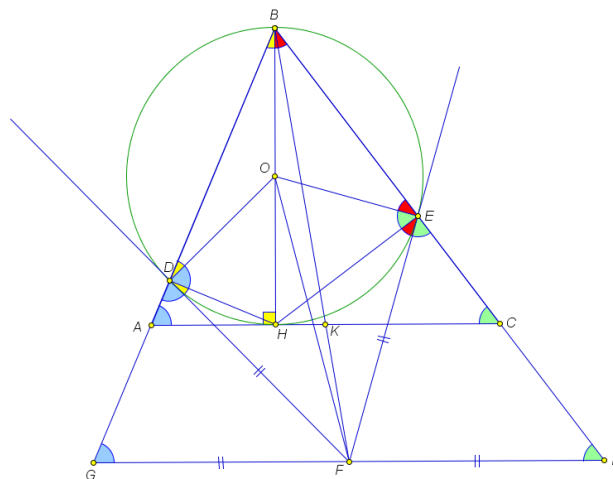
Найдем  $DF$ .  $\angle DOE = 2\angle ABC \Rightarrow \angle OFD = 90^\circ - \angle ABC \Rightarrow$

$$DF = OD \operatorname{ctg}(\angle OFD) = OD \operatorname{tg}(\angle ABC) = 6 \operatorname{tg}(\angle ABC).$$

По теореме косинусов найдем  $\cos(\angle ABC) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{169 + 225 - 196}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65}$ . Тогда

$$\sin(\angle ABC) = \sqrt{1 - \left(\frac{33}{65}\right)^2} = \frac{56}{65}, \text{ и } \operatorname{tg}(\angle ABC) = \frac{56}{33}, DF = \frac{6 \cdot 56}{33} = \frac{112}{11}.$$

**Ответ:**  $AK:KC=1:1$ ,  $BK=2\sqrt{37}$ ,  $DF=\frac{112}{11}$ .



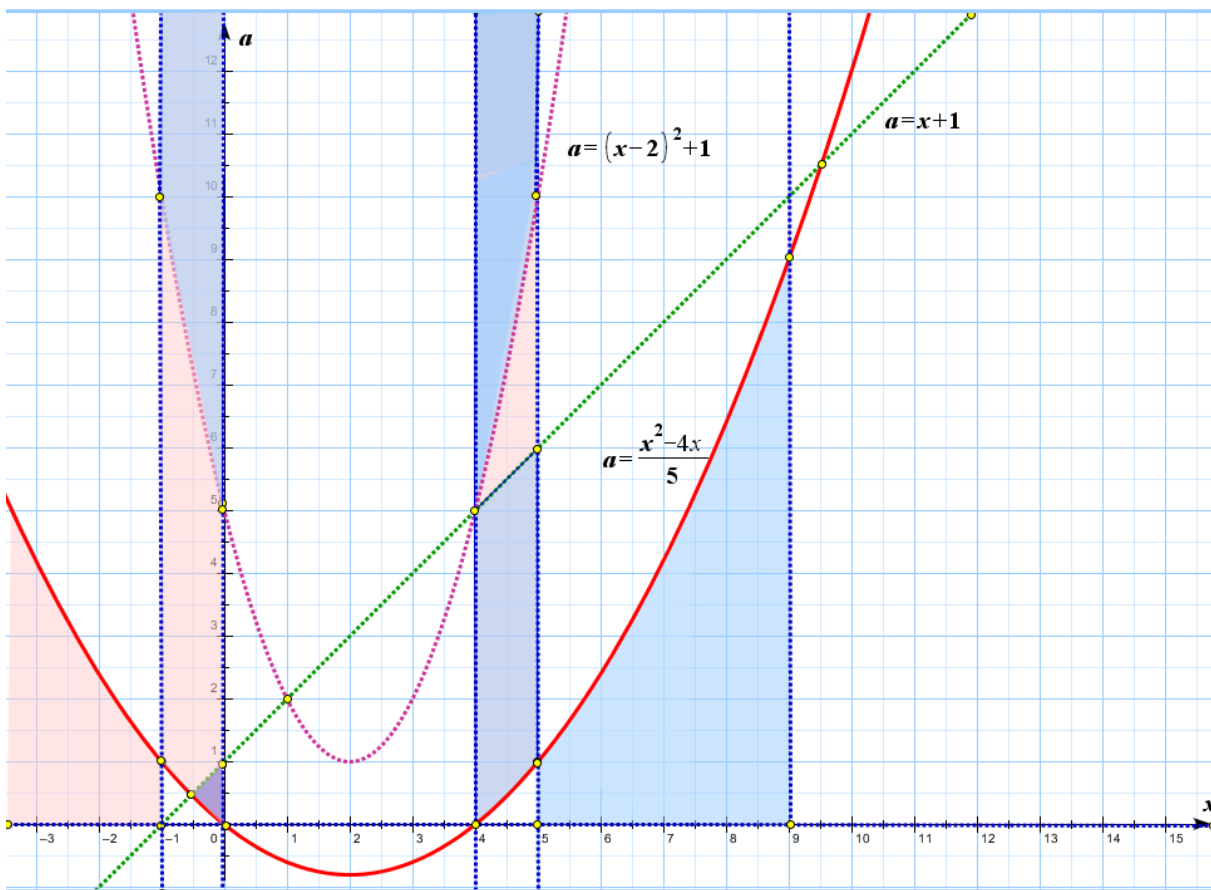
4. Для каждого значения параметра  $a$  решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 4x + 5 - a)(x - a + 1)}{\sqrt{9 - x}} > 0, \\ \log_{(x^2 - 4x)/5} a \leq 1. \end{cases} \quad (16 \text{ баллов})$$

**Решение:**

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 4x + 5 - a)(x - a + 1)}{\sqrt{9 - x}} > 0, \\ \log_{(x^2 - 4x)/5} a \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((x - 2)^2 + 1 - a)(x - a + 1) > 0, \\ x < 9, \\ x(x - 4) > 0, \quad x \neq -1, \quad x \neq 5, \quad a > 0, \\ (x^2 - 4x - 5) \left( a - \frac{x^2 - 4x}{5} \right) \leq 0. \end{cases}$$

Изобразим решение данной системы на плоскости  $Oxa$ :



Найдем точку  $x < 9$  пересечения прямой  $a = x + 1$  и параболы  $a = \frac{x^2 - 4x}{5}$ . Имеем

$$\frac{x^2 - 4x}{5} = x + 1, \quad x^2 - 9x - 5 = 0, \quad x < 9, \quad x = \frac{9 - \sqrt{101}}{2}, \quad a = \frac{11 - \sqrt{101}}{2}.$$

Найдем корни уравнения  $x^2 - 4x - 5a = 0$ ,  $(x - 2)^2 = 5a + 4$ ,  $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5a + 4}$ .

Найдем корни уравнения

$$(x - 2)^2 + 1 - a = 0, \quad (x - 2)^2 = a - 1, \quad x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{a - 1}, \quad a \geq 1.$$

- 1) При  $a \in \left(0; \frac{11 - \sqrt{101}}{2}\right)$  имеем  $x \in \left[2 - \sqrt{5a + 4}; 0\right) \cup \left(4; 2 + \sqrt{5a + 4}\right] \cup (5; 9)$ .
- 2) При  $a \in \left[\frac{11 - \sqrt{101}}{2}; 1\right)$  имеем  $x \in (a - 1; 0) \cup \left(4; 2 + \sqrt{5a + 4}\right] \cup (5; 9)$ .
- 3) При  $a = 1$  имеем  $x \in (4; 5) \cup (5; 9)$ .
- 4) При  $a \in (1; 5]$  имеем  $x \in (4; 5) \cup \left[2 + \sqrt{5a + 4}; 9\right)$ .
- 5) При  $a \in (5; 6)$  имеем  

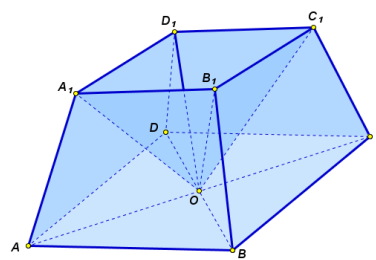
$$x \in \left(2 - \sqrt{a - 1}; 0\right) \cup \left(4; 2 + \sqrt{a - 1}\right) \cup (a - 1; 5) \cup \left[2 + \sqrt{5a + 4}; 9\right)$$
- 6) При  $a \in [6; 9)$  имеем  $x \in \left(2 - \sqrt{a - 1}; 0\right) \cup \left(4; 2 + \sqrt{a - 1}\right) \cup \left[2 + \sqrt{5a + 4}; 9\right)$ .
- 7) При  $a \in [9; 10)$  имеем  $x \in \left(2 - \sqrt{a - 1}; 0\right) \cup \left(4; 2 + \sqrt{a - 1}\right)$ .
- 8) При  $a \in [10; +\infty)$  имеем  $x \in (-1; 0) \cup (4; 5)$ .
- 9) При  $a \leq 0$  решений нет.

**Ответ:**

- 1) При  $a \in \left(0; \frac{11 - \sqrt{101}}{2}\right)$  имеем  $x \in \left[2 - \sqrt{5a + 4}; 0\right) \cup \left(4; 2 + \sqrt{5a + 4}\right] \cup (5; 9)$ .
- 2) При  $a \in \left[\frac{11 - \sqrt{101}}{2}; 1\right)$  имеем  $x \in (a - 1; 0) \cup \left(4; 2 + \sqrt{5a + 4}\right] \cup (5; 9)$ .
- 3) При  $a = 1$  имеем  $x \in (4; 5) \cup (5; 9)$ .
- 4) При  $a \in (1; 5]$  имеем  $x \in (4; 5) \cup \left[2 + \sqrt{5a + 4}; 9\right)$ .
- 5) При  $a \in (5; 6)$  имеем  

$$x \in \left(2 - \sqrt{a - 1}; 0\right) \cup \left(4; 2 + \sqrt{a - 1}\right) \cup (a - 1; 5) \cup \left[2 + \sqrt{5a + 4}; 9\right)$$
- 6) При  $a \in [6; 9)$  имеем  $x \in \left(2 - \sqrt{a - 1}; 0\right) \cup \left(4; 2 + \sqrt{a - 1}\right) \cup \left[2 + \sqrt{5a + 4}; 9\right)$ .
- 7) При  $a \in [9; 10)$  имеем  $x \in \left(2 - \sqrt{a - 1}; 0\right) \cup \left(4; 2 + \sqrt{a - 1}\right)$ .
- 8) При  $a \in [10; +\infty)$  имеем  $x \in (-1; 0) \cup (4; 5)$ .
- 9) При  $a \leq 0$  решений нет.

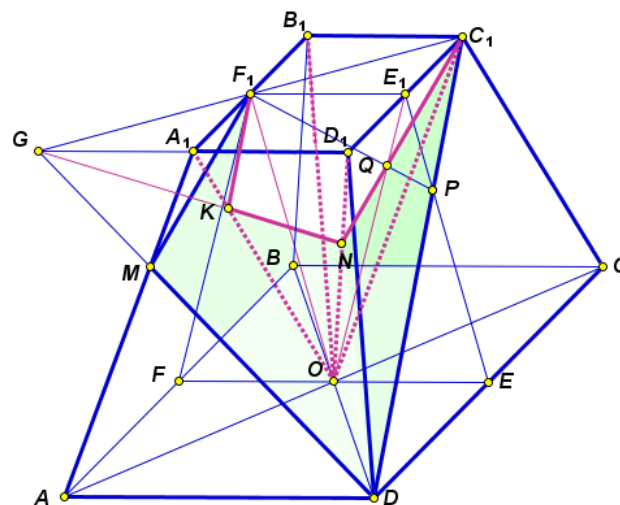
5. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона нижнего основания  $ABCD$  равна 24, верхнего основания  $A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 12, высота пирамиды  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна  $24\sqrt{2/5}$ , точка  $O$  – центр основания  $ABCD$ . Поверхность многогранника  $\Phi$  состоит из квадрата  $ABCD$ , боковых граней пирамиды  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и боковых граней пирамиды  $OA_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите площадь сечения многогранника  $\Phi$  плоскостью, проходящей через точки  $D$ ,  $C_1$  и середину ребра  $A_1 B_1$ . (20 баллов)



**Решение.**

Пусть  $a = AB = 24$ ,  $b = A_1 B_1 = 12$ , высоту пирамиды  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  обозначим  $h$ ,  $h = 24\sqrt{2/5}$ .

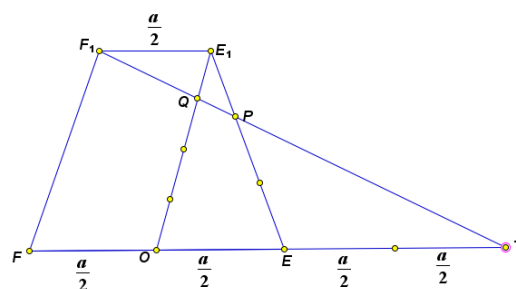
Построим сечение многогранника  $\Phi$ . Пусть точки  $F$  и  $F_1$  – середины  $AB$  и  $A_1 B_1$  соответственно,  $E$  и  $E_1$  – середины  $CD$  и  $C_1 D_1$  соответственно. Прямая  $F_1 C_1$  принадлежит плоскости сечения. Найдем точку  $G$  пересечения этой прямой с прямой  $A_1 D_1$ . Точки  $G$  и  $D$  лежат в плоскости грани  $ADD_1 A_1$ . Прямая  $GD$  принадлежит плоскости сечения. Найдем точку  $M$  пересечения этой прямой с ребром  $AA_1$ . Треугольники  $B_1 C_1 F_1$  и  $A_1 G F$  равны, и  $A_1 G = b = \frac{a}{2} = 12$ .



Треугольники  $A_1 G M$  и  $ADM$  подобны, и  $\frac{A_1 G}{AD} = \frac{A_1 M}{AM} = \frac{1}{2}$ .

Пусть  $P$  – точка пересечения прямых  $DC_1$  и  $EE_1$ . Эта точка принадлежит плоскости искомого сечения многогранника  $\Phi$ , и  $\frac{E_1 P}{PE} = \frac{E_1 C_1}{DE} = \frac{1}{2}$ . В плоскости трапеции  $FEE_1 F_1$  проведем прямую  $F_1 P$ . Поскольку  $O \in FE$ , найдем точку пересечения прямой  $F_1 P$  с отрезком  $OE_1$ .

Обозначим эту точку  $Q$ . Найдем  $\frac{E_1 Q}{QO}$ . Пусть  $T$  – точка пересечения прямых  $F_1 P$  и  $FE$ . Из подобия треугольников  $F_1 E_1 P$  и  $TEP$  следует, что  $ET = 2F_1 E_1$ .



А из подобия треугольников  $F_1E_1Q$  и  $TOQ$  следует, что  $OQ = 3QE_1$ .

Прямая  $C_1Q$  принадлежит плоскости сечения. Найдем точку  $N$  пересечения этой прямой с ребром  $OD_1$ . По теореме Менелая имеем

$$\frac{D_1N}{NO} \cdot \frac{OQ}{QE_1} \cdot \frac{E_1C_1}{D_1C_1} = 1. \text{ Следовательно, } \frac{D_1N}{NO} = \frac{2}{3}.$$

Прямая  $GN$  принадлежит плоскости сечения. Найдем точку  $K$  пересечения этой прямой с ребром  $OA_1$ . По теореме Менелая имеем

$$\frac{A_1K}{KO} \cdot \frac{ON}{ND_1} \cdot \frac{D_1G}{GA_1} = 1. \text{ Следовательно, } \frac{A_1K}{KO} = \frac{1}{3}.$$

Сечением многогранника  $\Phi$  будет многоугольник  $DC_1NKF_1M$ .

Площадь сечения  $DC_1NKF_1M$  будем вычислять по формуле

$$S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi}, \text{ где } S_{np} - \text{ площадь проекции сечения на плоскость}$$

основания,  $\varphi$  - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.

$$S_{np} = \frac{5a^2}{8} - \frac{a^2}{12} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{a^2}{16} - \left( \frac{a^2}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{8} \right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2}{32} - \frac{3}{5} \cdot \frac{a^2}{16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} =$$

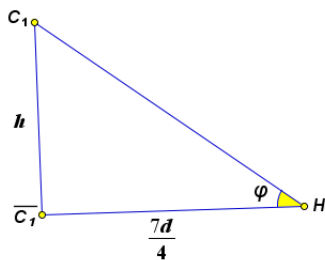
$$= \frac{469a^2}{3 \cdot 640} = 140,7$$

Плоскость сечения и плоскость  $ABC$  нижнего основания пересекаются по прямой  $l$ , проходящей через точку  $D$  и параллельной прямой  $F_1C_1$ . Если  $\bar{C}_1$  - проекция точки  $C_1$  на плоскость нижнего основания,

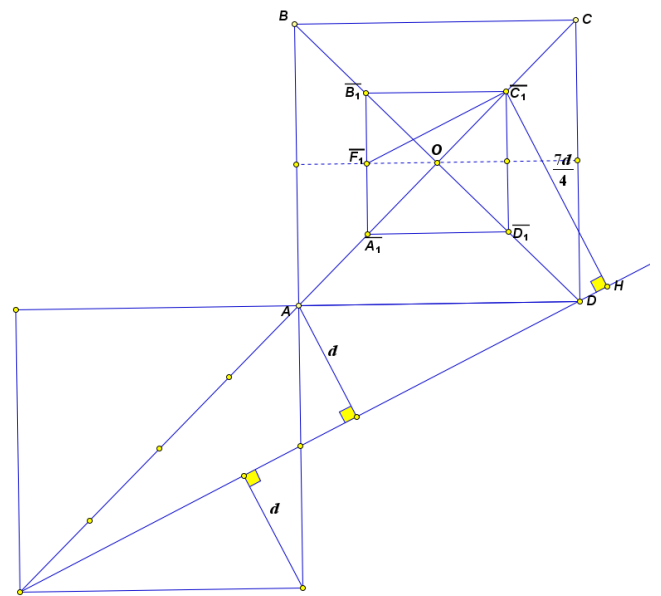
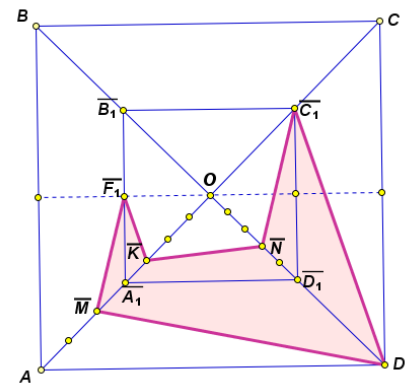
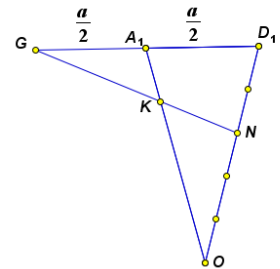
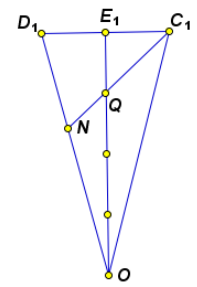
то  $\bar{C}_1C_1 = h = 24\sqrt{2/5}$ . Из точки  $\bar{C}_1$  опустим перпендикуляр  $\bar{C}_1H$  на прямую  $l$ . Если  $d$  - высота треугольника  $AED$ ,

$$\bar{C}_1H = \frac{7d}{4} = \frac{7a^2}{8\sqrt{a^2 + a^2/4}} = \frac{7a}{4\sqrt{5}} = \frac{42}{\sqrt{5}}.$$

Угол  $\bar{C}_1HC_1$  равен  $\varphi$  - углу между плоскостью сечения и плоскостью основания.



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{\bar{C}_1H} = \frac{24\sqrt{2/5} \cdot \sqrt{5}}{42} = \frac{4\sqrt{2}}{7}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{7}{9}.$$





$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \varphi} = \frac{140,7 \cdot 9}{7} = 180,9.$$

**Ответ:** 180,9.

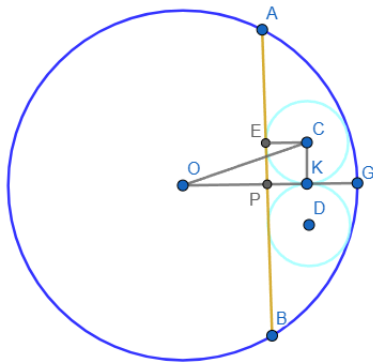
**6.** Сотовая связь – это целый мир возможностей. Но чтобы пользоваться ими, нужно быть в зоне действия базовой станции. Сети GSM (2G) имеют мощность, которая позволяет покрывать территорию радиусом до 35 километров на открытой местности. В городских условиях, где много зданий, зона приема сигнала значительно уменьшается. Сети 3G и 4G (LTE) работают на более высоких частотах, чем сети 2G, и их сигнал хуже проникает сквозь препятствия и больше подвержен помехам. В сетях GSM было достаточно нескольких вышек, чтобы покрывать большие территории, а для 3G и 4G сетей для обеспечения надежной связи требуется больше вышек.

В городе установлен ретранслятор GSM сети, который обеспечивает покрытие в пределах окружности радиусом  $R = 24$  км. Центр окружности – основание вышки. Однако из-за особенностей рельефа зона покрытия этого ретранслятора ограничена хордой, проведенной внутри этой окружности. Хорда находится на расстоянии  $d = 3$  км от центра окружности.

В меньшем сегменте, образованном хордой, необходимо установить два дополнительных ретранслятора (3G вышки) так, чтобы их зоны покрытия касались друг друга, хорды и основной окружности. Каждый из этих ретрансляторов имеет круговую зону покрытия одинакового радиуса  $r$ .

Найдите радиусы зон покрытия двух дополнительных ретрансляторов, которые нужно установить в меньшем сегменте. Определите площадь части меньшего сегмента, которая не попадает в зону действия дополнительных ретрансляторов. (20 баллов)

**Решение.** Пусть 3G вышки имеют одинаковый радиус действия  $r$ . Радиус основной окружности  $R$ , расстояние от центра большой окружности до хорды –  $d$ . Введем точки, как показано на чертеже:  $O$  – центр большой окружности,  $C, D$  – центры маленьких окружностей,  $K$  – точка касания маленьких окружностей,  $E$  – точка касания окружности с хордой.  $OP = d$  – заданное расстояние от центра до хорды.



$$CE \perp AB, OP \perp AB, CE \parallel OP, OP \cap \text{Окр}(O, R) = G, CD \cap OG = K,$$

$$OC = R - r, CK = r, OK = d + r \Rightarrow$$

$$(R - r)^2 = r^2 + (d + r)^2 \Rightarrow r^2 + 2r(d + R) - (R^2 - d^2) = 0$$

$$r = -(R + d) + \sqrt{2R^2 + 2Rd}.$$

Подсчитаем площадь части сегмента, которая не попадает в зону действия ретрансляторов 3G.

Пусть  $\angle AOP = \alpha$ ,  $S_c = S_{\text{сегмента}}$ .

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OA} = \frac{d}{R} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \frac{d}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2}$$

$$\Rightarrow S = S_c - 2S_k = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha) - 2\pi r^2 = \frac{1}{2} R^2 \left(2\alpha - 2 \frac{d}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2}\right) - 2\pi r^2$$

Подставим значения  $R = 24$ ,  $d = 3$ , тогда

$$r = -(24 + 3) + \sqrt{2 \cdot 24 \cdot (24 + 3)} = -27 + \sqrt{36^2} = 36 - 27 = 9,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}, \quad \sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \quad \alpha = \arccos \frac{1}{8}, \quad S = \frac{1}{2} 24^2 \left(2 \arccos \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}\right) - 2\pi \cdot 81,$$

$$S = \frac{1}{2} 24^2 \left(2 \arccos \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}\right) - 2\pi \cdot 81 = 288 \left(2 \arccos \frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{7}}{32}\right) - 162\pi$$

**Ответ:** 9 км,  $S = 576 \arccos \frac{1}{8} - 162\pi - 27\sqrt{7}$



## Критерии оценивания олимпиадной работы

**Профиль:** Математика

**Предмет:** Математика

**Класс:** 11

### Задание 1

максимальная оценка: **12 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	12
Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	9
Имеются верные шаги при решении полученной системы, из которой можно выразить нужное значение.	6
Задача сведена к системе, из которой можно выразить нужное значение.	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	3

### Задание 2

максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Правильно вычислено число перестановок, содержащих слово ТОМ и ПОТ, при этом правильно вычислено число всех перестановок.	8
Правильно вычислено число всех перестановок.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

### Задание 3

максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы.	16
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
Обоснованно получено верное отношение : АККСи вычислена длина отрезка ВК или DF.	8
Правильно вычислены все стороны треугольника ABC.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0



#### Задание 4

максимальная оценка: **16 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	16
Для одного или двух из промежутков параметра неверно выписаны решения, при этом остальные значения параметра и соответствующие решения найдены верно и все утверждения обоснованы.	12
Для не менее четырёх промежутков значений параметра правильно выписаны решения системы, все приведенные при этом утверждения обоснованы.	8
Верно выписаны все необходимые ограничения на $x$ и $a$ . Имеется существенное продвижение в решении задачи. Верно найдены один из промежутков значений параметра и соответствующие решения системы.	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

#### Задание 5

максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	20
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены. Допущена одна арифметическая ошибка.	15
При условии, что найдены все отношения, в которых плоскость сечения делит соответствующие ребра многогранника, верно найдена площадь проекции сечения на плоскость основания, или найден косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.	10
Полностью описано построение сечения многогранника. Найдены отношения, в которых плоскость сечения делит соответствующие ребра многогранника.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

#### Задание 6

максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Задача решена полностью, получен верный ответ, все утверждения обоснованы.	20
Сделаны незначительные вычислительные ошибки. Сделан верный рисунок, с указанием точек касания. Правильно указаны и найдены все расстояния. Найдены площади кругов, площадь сегмента, но в ходе вычислений допущены арифметические ошибки.	15
Полностью описана математическая модель. Сделан верный рисунок, с указанием точек касания. Описаны все расстояния, указаны треугольники, которые необходимо рассмотреть, найдены длины сторон треугольников. Найдены верно площади кругов. Указаны подходы к нахождению площади сегмента: выписана формула, и/или верно найден угол.	10
Математическая модель описана частично. Сделан верный рисунок, с указанием точек касания, обозначением данного в условии расстояния. Найдены радиусы зон покрытия.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0