



**Профиль олимпиады:
«Компьютерное моделирование и графика»,
тур по математике и инженерной графике**

Класс участия: 10

Вариант задания: 2

Задача 1 (10 баллов). У двух одинаковых кубиков случайно и независимо покрасили одну грань красным цветом, две грани желтым цветом и три грани зеленым цветом. С какой вероятностью расцветка кубиков окажется такой, что кубики можно будет расположить в пространстве так, что они будут являться параллельными переносами или зеркальными отражениями друг друга?

Задача 2 (10 баллов). Найти сумму всех натуральных чисел, меньших числа 5000 и взаимно простых с ним.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметр a , при которых система
$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + (y-a-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-a-2)^2} \leq 3, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2a^2 + 4a + 2, \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Укажите это решение при каждом из найденных a .

Задача 4 (10 баллов). См. лист 2.

Задача 5 (8 баллов). Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 4) является круг с центром в точке O и диаметром 90 мм. Пирамида $SABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$ со стороной 50 мм, и конус имеют общую вершину S . Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм, высота конуса равна 80 мм. Точки A', B', C', D', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса ($O' = O$). Точка S' лежит на окружности, ограничивающей основание конуса. Углы между прямой $O'X$ пересечения горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций и прямыми $A'B'$ и $O'S'$ равны 60° и 40° соответственно. Точка A' расположена ниже прямой $O'X$ на расстоянии 10 мм от этой прямой и левее прямой $O'Y$ ($O'Y \perp O'X$) на расстоянии 20 мм (см. чертеж к условию задачи 4). Найдите расстояния от центра сечения конуса плоскостью основания пирамиды $SABCD$ до сторон ее основания $ABCD$, а также длину ребра SA . (Указание: при расчетах считать $\cos 40^\circ = 0,8$.)

Задача 6 (20 баллов). См. лист 3.

Решение варианта №2 (Математика - 10 класс)

Задача 1 (10 баллов). У двух одинаковых кубиков случайно и независимо покрасили одну грань красным цветом, две грани желтым цветом и три грани зеленым цветом. С какой вероятностью расцветка кубиков окажется такой, что кубики можно будет расположить в пространстве так, что они будут являться параллельными переносами или зеркальными отражениями друг друга?

Решение:

Если положить куб на красную грань, то возможны три геометрически различные раскраски:

- 1) желтые грани — верхняя и одна из боковых (вероятность $4/C_5^2 = 2/5$);
- 2) желтые грани — две соседние боковые (вероятность $4/C_5^2 = 2/5$);
- 3) желтые грани — две противоположные боковые (вероятность $2/C_5^2 = 1/5$).

В итоге вероятность = $(2/5)(2/5) + (2/5)(2/5) + (1/5)(1/5) = 4/25 + 4/25 + 1/25$.

Ответ: $9/25 = 0,36$.

Задача 2 (10 баллов). Найти сумму всех натуральных чисел, меньших числа 5000 и взаимно простых с ним.

Решение:

$5000 = 2^3 \cdot 5^4$. Взаимно простые с ним числа делятся на 10 с остатками 1, 3, 7, 9.

$$S = \sum_{k=0}^{499} ((10k + 1) + (10k + 3) + (10k + 7) + (10k + 9)) = 20 \sum_{k=0}^{499} (2k + 1) = 20 \cdot 500^2.$$

Ответ: 5000000.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметр a , при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + (y-a-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-a-2)^2} \leq 3, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2a^2 + 4a + 2, \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

Укажите это решение при каждом из найденных a .

Решение:

Пусть $M(x; y)$, $A(-2; a+2)$, $B(1; a+2)$.

Тогда $MA = \sqrt{(x+2)^2 + (y-a-2)^2}$, $MB = \sqrt{(x-1)^2 + (y-a-2)^2}$, $AB = 3$.

Первое неравенство системы означает, что $MA + MB \leq AB$. Это возможно лишь в том случае, если $MA + MB = AB$, и точка M лежит на отрезке AB , т.е.

$y = a + 2$, $x \in [-2; 1]$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} y = a + 2, x \in [-2; 1], \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2a^2 + 4a + 2. \end{cases} \text{ Следовательно, требуется определить все значения}$$

параметра a , при которых уравнение $(x+1)^2 + (a+1)^2 = 2a^2 + 4a + 2$ имеет единственное решение на отрезке $[-2; 1]$. Тогда имеем $(x+1)^2 = (a+1)^2$, $x = -1 \pm (a+1)$, $x \in [-2; 1]$.

- 1) $x_1 = a$, $x_1 \in [-2; 1]$, $a \in [-2; 1]$;
- 2) $x_2 = -2 - a$, $x_1 \in [-2; 1]$, $a \in [-3; 0]$;
- 3) $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a = -1$.

Система имеет единственное решение при $a \in [-3; -2) \cup \{-1\} \cup (0; 1]$.

$$a \in [-3; -2) \cup \{-1\} \cup (0; 1],$$

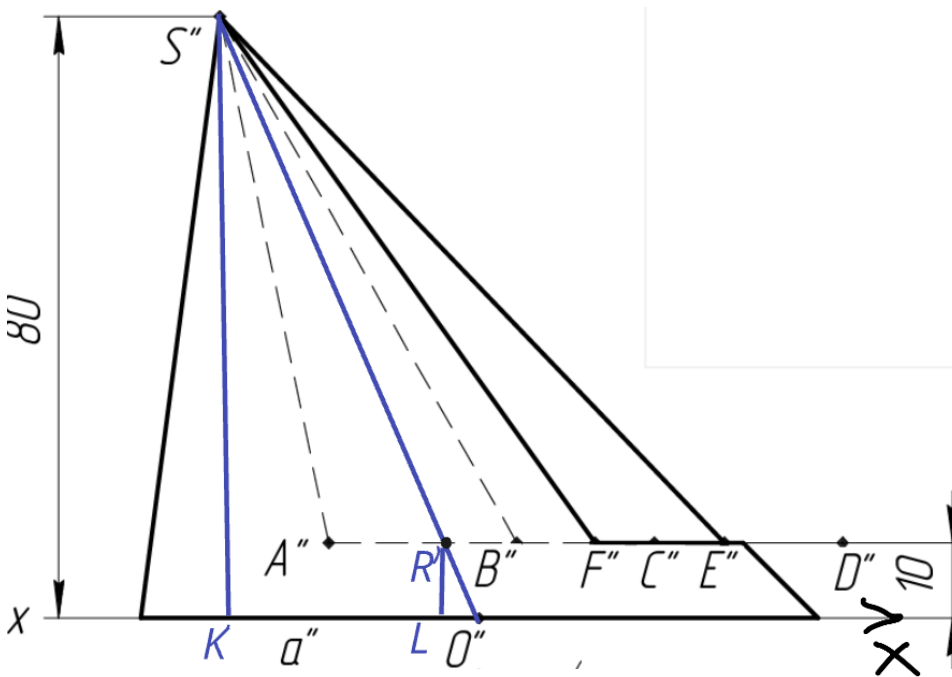
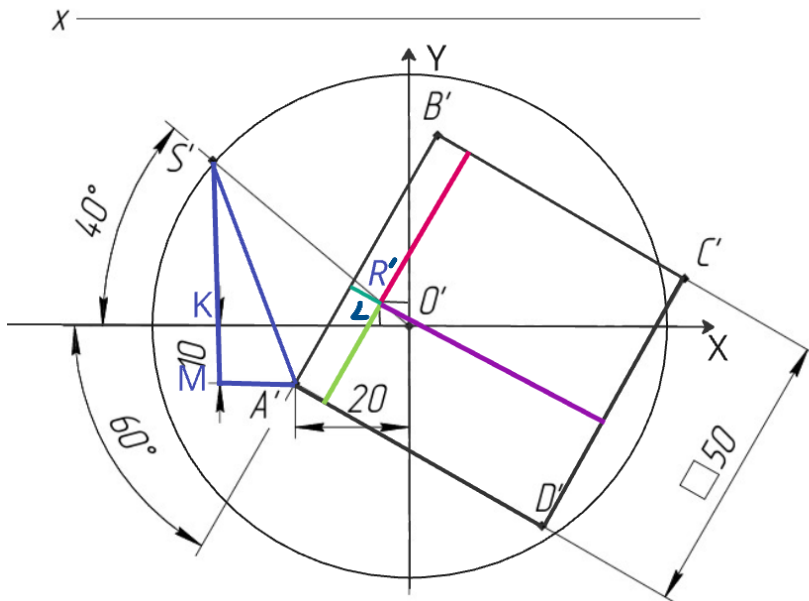
Ответ: $a \in [-3; -2)$, $x = -2 - a$, $y = a + 2$;

$$a = -1, x = -1, y = 1;$$

$$a \in (0; 1], x = a, y = a + 2.$$

Задача 4 (8 баллов). Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 5) является круг с центром в точке O и диаметром 90 мм. Пирамида $SABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$ со стороной 50 мм, и конус имеют общую вершину S . Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм, высота конуса равна 80 мм. Точки A', B', C', D', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса ($O' = O$). Точка S' лежит на окружности, ограничивающей основание конуса. Углы между прямой $O'X$ пересечения горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций и прямыми $A'B'$ и $O'S'$ равны 60° и 40° соответственно. Точка A' расположена ниже прямой $O'X$ на расстоянии 10 мм от этой прямой и левее прямой $O'Y$ ($O'Y \perp O'X$) на расстоянии 20 мм (см. чертеж к условию задачи 5). Найдите расстояния от центра сечения конуса плоскостью основания пирамиды $SABCD$ до сторон ее основания $ABCD$, а также длину ребра SA . (Указание: при расчетах считать $\cos 40^\circ = 0,8$.)

Решение:



Пусть R - центр сечения конуса плоскостью основания пирамиды $SABCD$. В фронтальной плоскости проекций точка K - проекция на ось $O''X = O'X$ точки S'' (фронтальной проекции вершины S), точка L - проекция на ось $O''X = O'X$ точки R'' (фронтальной проекции R), $O'' = O'$. Треугольники $S''KO''$ и $R''LO''$ подобны, и $LO'' = KO''/8$. Следовательно, в горизонтальной плоскости проекций $LO' = KO'/8$.

В горизонтальной плоскости проекций рассмотрим прямоугольный треугольник $S'KO'$, $S'O' = 45$, $\cos \angle S'O'K = 0,8$, $\sin \angle S'O'K = 0,6$, $KO' = 36$, $S'K = 27$.

Тогда $LO' = 9/2$, $R'L = 27/8$.

Нужно найти расстояние от R' до сторон квадрата $A'B'C'D'$ в горизонтальной плоскости проекций. В системе координат $O'XY$ координаты точки $A'(-20; -10)$,

прямая $A'B'$ составляет с положительным направлением оси $O'X$ угол 60° , и уравнение прямой $A'B'$ имеет вид $y = \sqrt{3}(x + 20) - 10$. Вычислим расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $A'B'$:

$$d_{AB} = \frac{|\sqrt{3}(20 - 9/2) - 27/8 - 10|}{2} = \frac{124\sqrt{3} - 107}{16} \approx 6,7.$$

Тогда расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $C'D'$:

$$d_{CD} = 50 - \frac{124\sqrt{3} - 107}{16} = \frac{907 - 124\sqrt{3}}{16} \approx 43,3.$$

Прямая $A'D'$ перпендикулярна прямой $A'B'$, ее уравнение $\sqrt{3}y + (x + 20) + 10\sqrt{3} = 0$. Вычислим расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $A'D'$:

$$d_{AD} = \frac{|27\sqrt{3}/8 + 20 - 9/2 + 10\sqrt{3}|}{2} = \frac{107\sqrt{3} + 124}{16} \approx 19,3.$$

Тогда расстояние от точки $R'(-9/2; 27/8)$ до прямой $B'C'$:

$$d_{BC} = 50 - \frac{107\sqrt{3} + 124}{16} = \frac{676 - 107\sqrt{3}}{16} \approx 30,7.$$

Вычислим длину ребра SA . Высота H пирамиды $SABCD$ равна 70. Тогда $SA^2 = S'A'^2 + H^2$. В прямоугольном треугольнике $S'MA'$ вычислим гипотенузу $S'A'$: $S'M = S'K + KM = 27 + 10 = 37$, $MA' = KO' - 20 = 36 - 20 = 16$,

$$SA^2 = S'M^2 + MA'^2 + H^2 = 37^2 + 16^2 + 70^2 = 6525 = 225 \cdot 29.$$

$$SA = 15\sqrt{29} \approx 80,8.$$

Ответ: $d_{AB} = \frac{124\sqrt{3} - 107}{16} \approx 6,7 \text{ мм}$, $d_{CD} = \frac{907 - 124\sqrt{3}}{16} \approx 43,3 \text{ мм}$,

$$d_{AD} = \frac{107\sqrt{3} + 124}{16} \approx 19,3 \text{ мм}, d_{BC} = \frac{676 - 107\sqrt{3}}{16} \approx 30,7 \text{ мм}, SA = 15\sqrt{29} \approx 80,8 \text{ мм}.$$



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Компьютерное моделирование и графика

Предмет: Математика и инженерная графика (задания по математике)

Класс: 10

Задание 1

максимальная оценка: **10 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Верно и обоснованно рассмотрен один из частных случаев. Итоговый ответ неверный, или итоговый ответ верный, но доказательство его истинности представлено частично.	3
Рассуждения верные, но не все утверждения строго обоснованы, представлены верные формулы без необходимых объяснений.	5
Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	8
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	10

Задание 2

максимальная оценка: **10 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Правильно указаны критерии, по которым определяются взаимно простые числа с данным числом.	3
Верно выписана формула для вычисления искомой суммы.	5
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	8
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	10

Задание 3

максимальная оценка: **12 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Задача сведена к исследованию взаимного расположения отрезка и окружности.	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток (промежутки), содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке (промежутках). При этом концы промежутка (промежутков) частично совпадают с концами верных промежутков.	6
Верно найдены нужные значения параметра. Допущены ошибки при выписывании решений системы или решения системы отсутствуют. Или потеряно одно из значений параметра, при этом верно выписаны решения для остальных значений параметра.	9
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	12



Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Задание 5

максимальная оценка: **8 баллов**

Критерий (учитывается балл, полученный за выполненный критерий)	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Обоснованно получен верный ответ при вычислении длины ребра SA или одного из расстояний от центра сечения конуса плоскостью ABC до сторон квадрата.	2
Обоснованно получен верный ответ при вычислении длины ребра SA и одного из расстояний от центра сечения конуса плоскостью ABC до сторон квадрата. Или верно и точно вычислены все расстояния от центра сечения конуса плоскостью ABC до сторон квадрата.	4
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	6
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы. Все ответы даны точно, а не приближенно.	8



Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

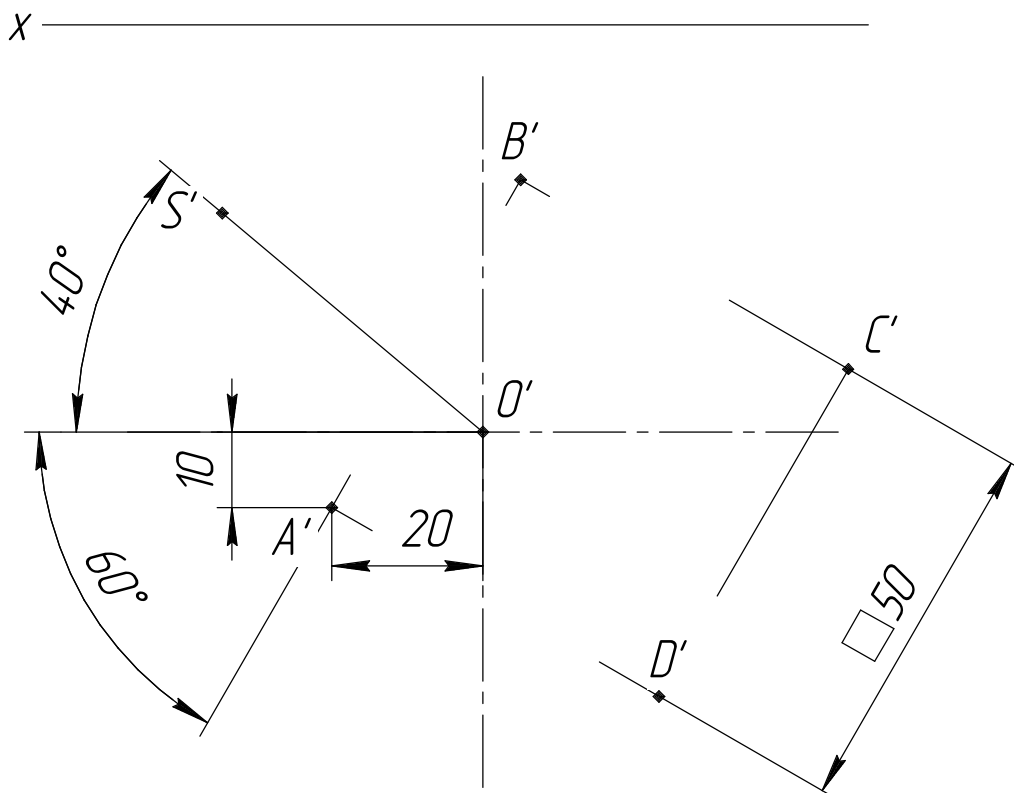
Вариант: 2

класс: 10–11

Задача 4 (10 баллов). Даны горизонтальные проекции центра окружности основания наклонного конуса O' и вершин пирамиды $A'B'C'D'S'$. Вершины S' фигур совпадают и расположены выше оснований. Основание конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекции его диаметр 90 мм. Высота конуса 80 мм. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции конуса с учетом выреза в форме пирамиды $ABCDS$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить и обозначить проекции вершин пирамиды и границ участков линии выреза в конусе;
- 3) обозначить видимость линий конуса с вырезом;
- 4) оформить все изображения в соответствии с требованиями ЕСКД.





Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

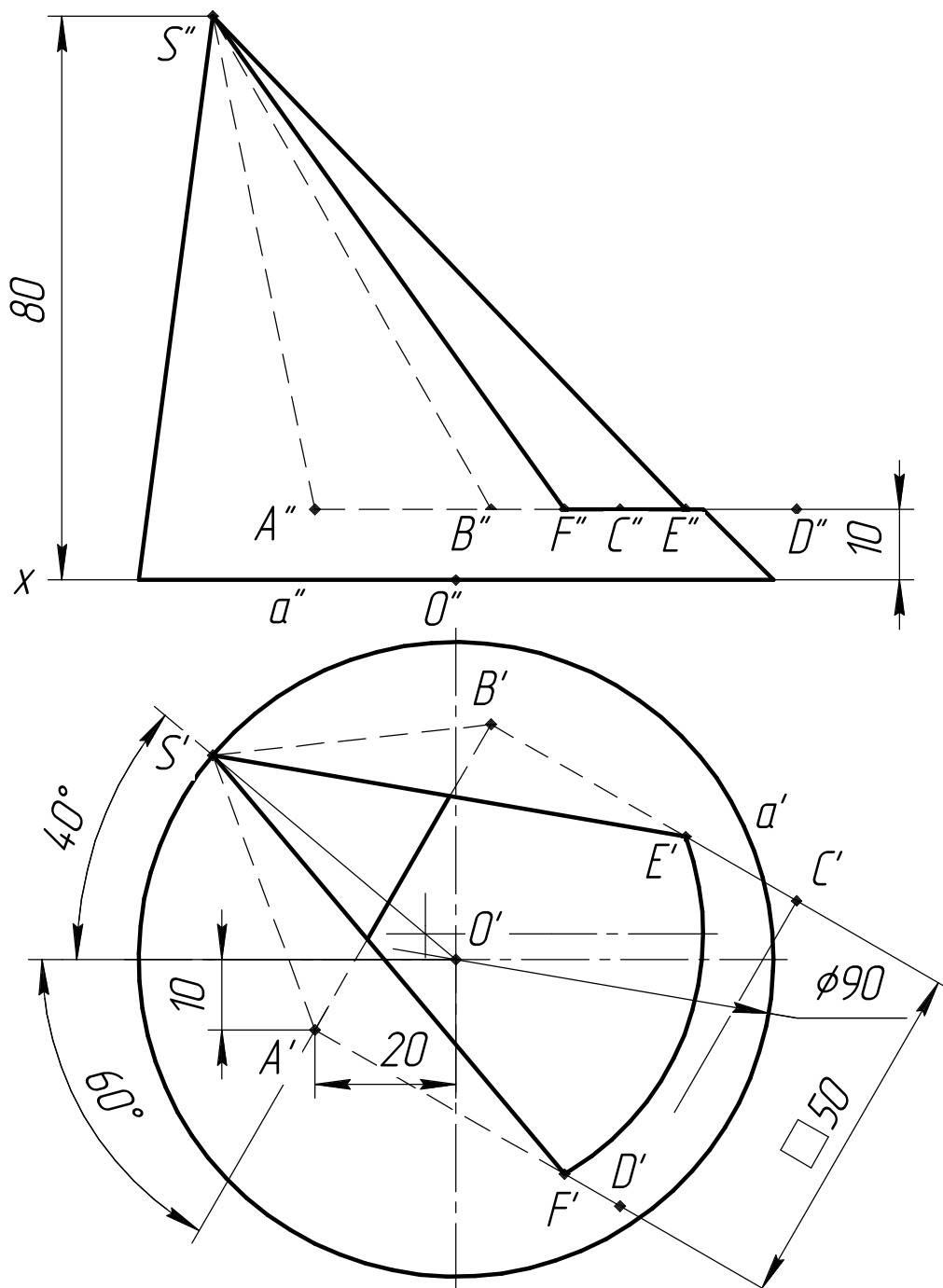
Вариант: 2

класс: 10–11

Задача 4а (10 баллов). Даны горизонтальные проекции центра окружности основания наклонного конуса O' и вершин пирамиды $A'B'C'D'S'$. Вершины S фигур совпадают и расположены выше оснований. Основание конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекции его диаметр 90 мм. Высота конуса 80 мм. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 10 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции конуса с учетом выреза в форме пирамиды $ABCD$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить и обозначить проекции вершин пирамиды и границ участков линии выреза в конусе;
- 3) обозначить видимость линий конуса с вырезом;
- 4) оформить все изображения в соответствии с требованиями ЕСКД.



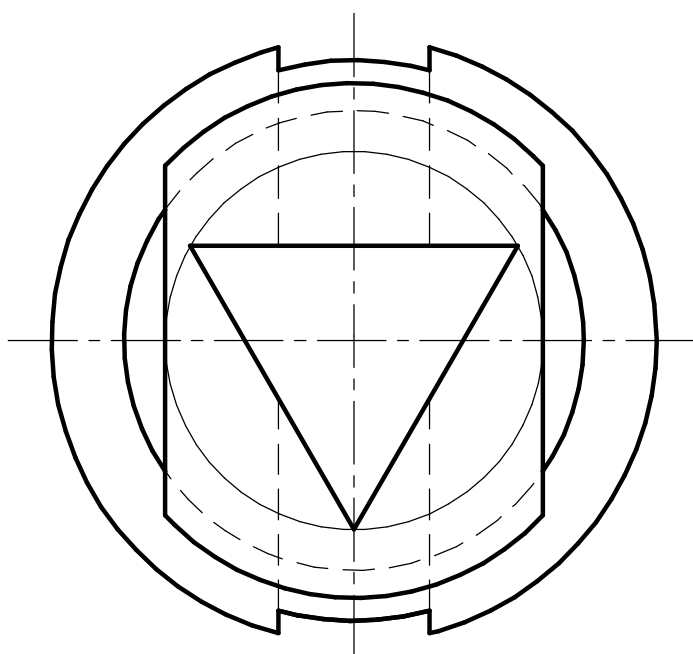
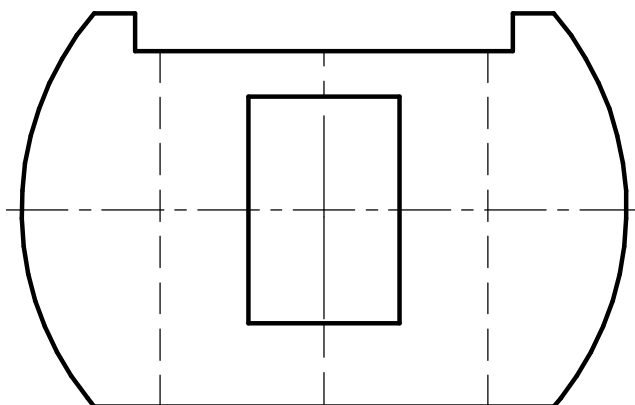


*Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 2 класс: 10–11*

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции предмета.

Требуется:

- 1) выполнить профильный разрез для случая без обозначения разреза;*
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза с плоскостью, проходящей через центр шара и обозначением разреза;*
- 3) все изображения выполнить в проекционной связи и оформить по ГОСТ 2.305–2008;*
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;*
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;*
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011;*
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.*



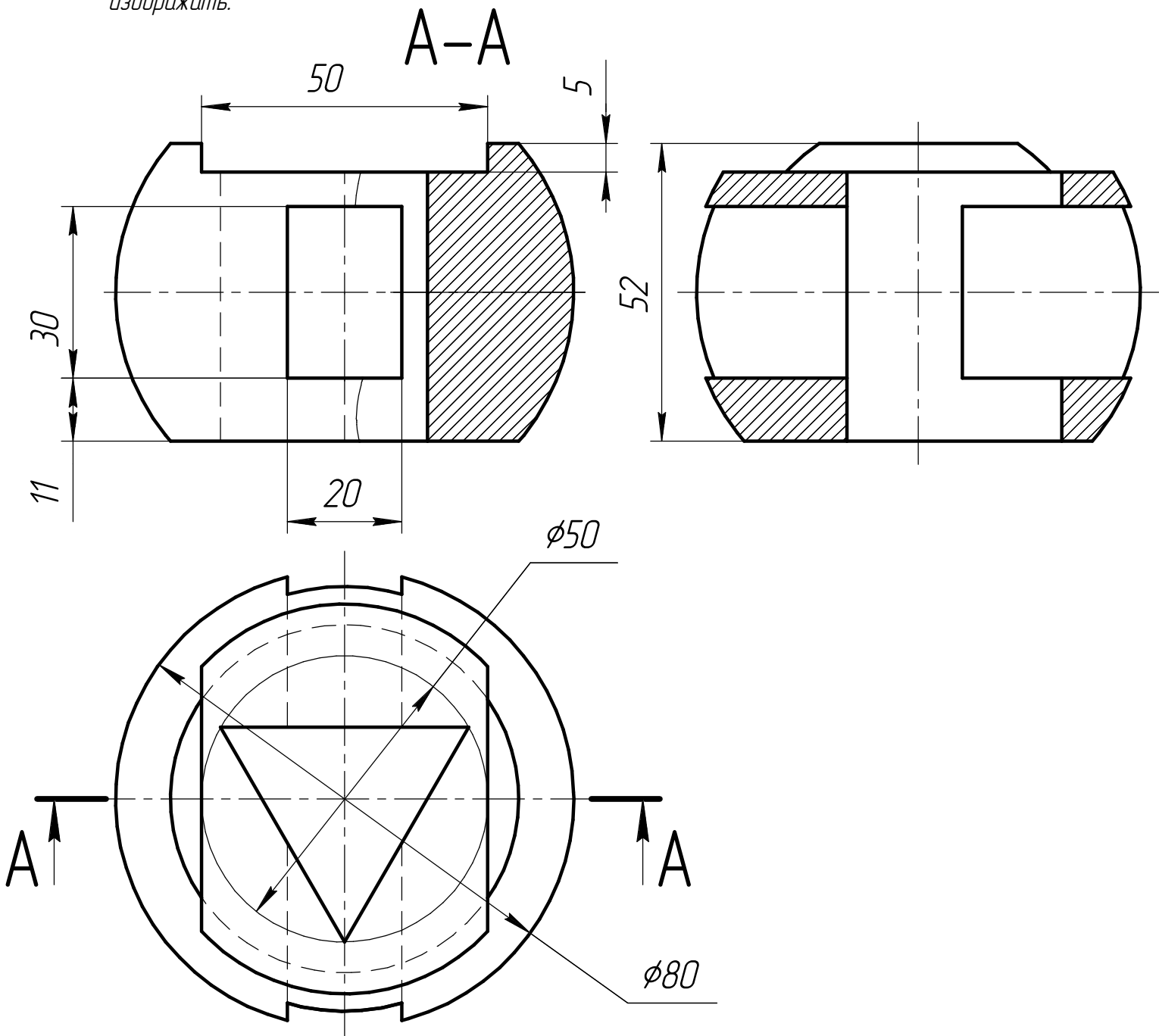


Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 2 класс: 10–11

Задача 5 (20 баллов). Даны две проекции предмета.

Требуется:

- 1) выполнить профильный разрез для случая без обозначения разреза;
- 2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза с плоскостью, проходящей через центр шара и обозначением разреза;
- 3) все изображения выполнить в проекционной связи и оформить по ГОСТ 2.305–2008;
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011;
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.





Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Компьютерное моделирование и графика

Предмет: Математика и инженерная графика (задания по инженерной графике)

Класс: 10 и 11

Задание 4

максимальная оценка: **10 баллов**

Критерий (баллы, полученные по всем выполненным критериям суммируются)	Балл
Построена фронтальная и горизонтальная проекции конуса с учетом выреза в форме пирамиды с соблюдением проекционной связи	4
Построены и обозначены фронтальная и горизонтальная проекции вершин пирамиды и границ участков линии выреза в конусе	2
Верно обозначена видимость линий конуса с вырезом	3
Изображения чертежа оформлены в соответствии с требованиями ЕСКД	1

Задание 6

максимальная оценка: **20 баллов**

Критерий (баллы, полученные по всем критериям суммируются)	Макс. балл
Выполнены общие требования: Построены три изображения в проекционной связи; на видах невидимый контур показан штриховой линией, на разрезах линии невидимого контура не обозначены. требования выполнены полностью: 2 балла требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	2
Верно выполнен главный вид: Главный вид выполнен как соединение части вида и части фронтального разреза с указанием положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза справа от линии ребра) Указанные требования выполнены полностью: 4 балла Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	4
Верно выполнен вид слева: Вид слева выполнен как полный профильный разрез без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (без указания волнистой линии разделения вида и разреза) Указанные требования выполнены полностью: 7 баллов Вид слева выполнен как соединение части вида и части профильного разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза с указанием волнистой линии разделения вида и разреза: 5 баллов Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	7
Верно выполнен вид сверху (учитывать только при выполнении пункта 1): Вид сверху выполнен верно и оставлен без разреза: 1 балл Указанные требования не выполнены или выполнены частично: 0 баллов	1
Верно обозначены размеры: Все размеры обозначены правильно: 5 баллов Не менее 5 из 6 размеров обозначены правильно: 4 балла Менее 5 из 6 размеров обозначены правильно: 0 баллов	5
Соблюдены требования ЕСКД: Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии с требованиями ЕСКД: 1 балл В изображении, толщине линии и/или штриховке есть существенные отступления от требований ЕСКД: 0 баллов	1