Заключительный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль «Инженерное дело»

Специализация «Математика»

Класс участия: 9

Задача 1 (8 баллов). Решите неравенство: $x^2+4x\sqrt{x-1}\le 12(x-1)$.

Решение:

ОДЗ: $x-1\ge 0 \quad => x\in[1;+\infty)$.

Добавим к обеим частям неравенства $4(\sqrt{x-1})^2$, получим разность квадратов:

$$x^2+2\cdot x\cdot 2\sqrt{x-1}+4\left(\sqrt{x-1}\right)^2\le 12(x-1)+4\left(\sqrt{x-1}\right)^2,$$

$$(x+2\sqrt{x-1})^2-4\left(\sqrt{x-1}\right)^2\le 0 \ <=> (x+6\sqrt{x-1})(x-2\sqrt{x-1})\le 0.$$

С учетом ОДЗ $x+6\sqrt{x-1}>0$, тогда $x\le 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0, \\ 4(x-1)\ge x^2, \end{cases} <=> \begin{cases} x\ge 1, \\ x=2. \end{cases}$

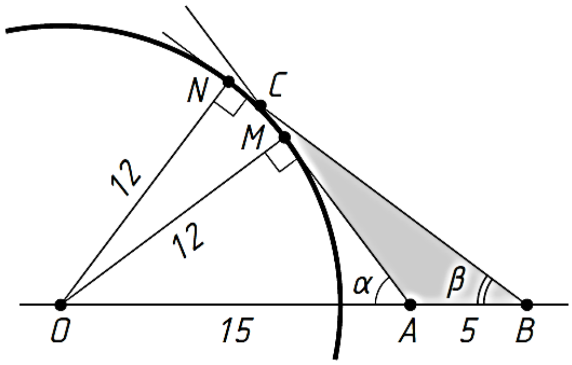
Ответ: 2.

Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Обоснованно получен ответ, но решение недостаточно обоснованно
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (верно найдено ОДЗ неравенства, решение сведено к рассмотрению неравенства $(x+6\sqrt{x-1})(x-2\sqrt{x-1})\le 0$), дальнейшее решение неверно или отсутствует
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 2 (10 баллов). На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B, причём $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB. Найдите площадь треугольника ABC, где C —точка пересечения этих касательных.

Решение:



Обозначим через M и N точки касания окружности с прямыми, проходящими через точки A и B соответственно, $\angle OAM = \alpha$, $\angle OBN = \beta$. Тогда $\angle ACB = \alpha - \beta$, $\frac{OM}{OA} = sin\alpha$, $\frac{ON}{OB} = sin\beta$.

Поэтому

$sin\alpha = \frac{4}{5}$, $cos\alpha = \frac{3}{5}$, $sin\beta = \frac{3}{5}$, $cos\beta = \frac{4}{5}$.

По теореме синусов $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)}$, поэтому

$$BC = \frac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{AB\sin\alpha}{sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta} = \frac{5\cdot\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{100}{7}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta CEK} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot sin\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{100}{7}\cdot\frac{3}{5} = \frac{150}{7}.$$

Ответ: $\frac{150}{7}$.

Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ
10	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (решение сведено к отношению $\frac{BC}{AB}=\frac{\sin(180°-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)}$), дальнейшее решение неверно или отсутствует
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 3 (10 баллов). Имеется три сплава, в состав которых входят металлы A, B и C. Первый сплав содержит 20% металла A, 30% металла B, 50% металла C. Второй сплав содержит 50% металла A, 20 % металла B, 30% металла C. Третий сплав содержит 30% металла A, 40 % металла B, 30% металла C. Сколько кг каждого сплава нужно взять, чтобы получить 10 кг нового сплава, который содержал бы 25% металла A, а процентное содержание металла B было бы минимально возможным?

Решение:

Пусть взяли x, y и z кг металла A, B и C соответственно, то

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 0,2x+0,5y+0,3z=2,5 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+2y\geq 0 \\ z=5-3y\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Поэтому количество металла B в сплаве равно

$$0,3x+0,2y+0,4z=0,3(5+2y)+0,2y+0,4(5-3y)=3,5-0,4y$$

где $0\leq y\leq\frac{5}{3}$, и оно минимально при

$$y=\frac{5}{3}, x=5+2\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{3}, z=5-3\cdot\frac{5}{3}=0.$$

Ответ: 25/3, 5/3 и 0 кг

Баллы	**Критерии выставления**
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

Задача 4 (10 баллов). При каких значениях параметра a все решения системы уравнений $\begin{cases} ax-4y=a+1 \\ -2x+2ay=-1 \end{cases}$ удовлетворяют неравенствам $x>0 \quad y>0$?

Ответ: $a \in (2;+\infty)$

Решение:

$$\begin{cases} ax-4y=a+1 \\ -2x+2ay=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x-4ay=a^2+a \\ -4x+4ay=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(a^2-4\right)=a^2+a-2 \\ y=\dfrac{ax-a-1}{4} \end{cases}$$

При $a=2 \Rightarrow \begin{cases} 0x=4 \Rightarrow \varnothing \\ y=\dfrac{2x-3}{4} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

При $a=-2 \Rightarrow \begin{cases} 0x=0 \Rightarrow \forall x \\ y=\dfrac{-2x+1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y=\dfrac{-2x+1}{4} \end{cases}$

При $a \neq \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a-1}{a-2}>0 \\ y=\dfrac{1}{2(a-2)}>0 \end{cases} \Rightarrow a \in (2;+\infty)$

Баллы	**Критерии выставления**
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

Задача 5 (12 баллов). В остроугольном треугольнике ABC с вершиной в точке B проведена биссектриса BM. Две окружности, вписанные в треугольники ABM и MBC, касаются биссектрисы в точках K и N соответственно. Найдите модуль разности длин проекций сторон AB и BC на основание AC треугольника $ABC,$ если длина отрезка $NK = 0{,}75$ см, а периметр треугольника ABC в 5 раз больше его основания.

Ответ: 8 см.

Решение. По свойству касательных к окружности,

$BK = p_{ABM} - AM$ и $BN = p_{CBM} - CM$, где p_{ABM} и p_{CBM} – полупериметры соответствующих треугольников.

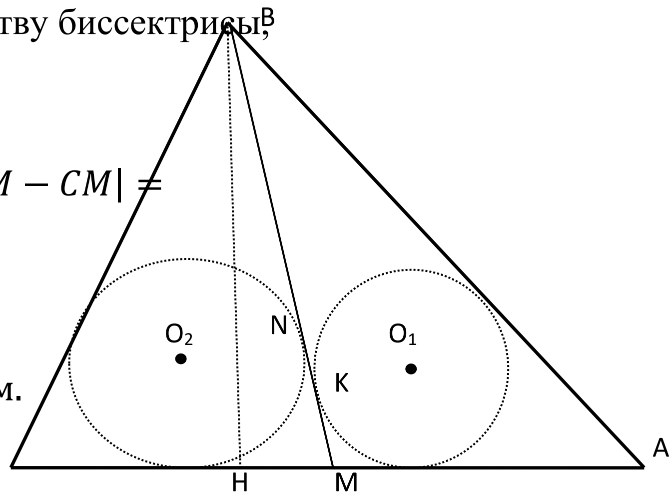
По условию $BA + BC = 4AC$. По свойству биссектрисы,

$AM = \frac{BA \cdot AC}{(BA+BC)}$ и $CM = \frac{BC \cdot AC}{(BA+BC)}$. Тогда

$$NK = |BN - BK| = |p_{CBM} - p_{ABM} + AM - CM| =$$

$$= \left|\frac{BC - BA}{2} - \frac{(BC - BA)AC}{2(BA + BC)}\right| =$$

$$= \frac{3|BA - BC|}{8} = \frac{3}{4} \text{ см} \Rightarrow |BA - BC| = 2 \text{ см}.$$



Пусть $BH -$ высота треугольника ABC,

Тогда $|AH^2 - CH^2| = |BA^2 - BC^2| = 8AC.$

С другой стороны: $|AH^2 - CH^2| = |AH - CH|AC \Rightarrow |AH - CH| = 8$ см.

Ответ: 8 см.

Критерии.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения (доказано, что $\lvert BA - BC \rvert = 2$см) получен неверный ответ, или решение недостаточно обосновано.
4	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.