Заключительный этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Профиль «Инженерное дело»

Специализация «Математика»

Класс участия: 8

Задача 1 (*8 баллов*). Что больше: $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$ или 0?

Решение:

Используем утверждение: для любых a, b$\in\mathbb{R}$ справедливо равенство:

$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ при $a\geq b; b>0.$

Получаем: $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right)-\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right)-\sqrt{2}=$

$\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}=0$ то есть заданные числа равны друг другу.

2 способ решения:

Сравним выражения $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$ или 0; $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$ или $\sqrt{2}$

Обе части сравнения больше 0, возведём в квадрат:

$4+\sqrt{7}-2\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}+4-\sqrt{7}$ или 2; $8-2\sqrt{16-7}$ или 2; 8-6 или 2; 2=2

Баллы	**Критерии оценивания**
8 баллов	Полное обоснованное решение
4 балла	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.
0 баллов	Неверные рассуждения

Задача 2 (*10 баллов*). Всадник Геральт и его лошадь Плотва в силу обстоятельств оказались на противоположных берегах реки. Они находились на разных расстояниях от берегов и не на одном перпендикуляре к берегам. Как определить место постройки моста через реку, чтобы путь Геральта из точки его старта до Плотвы был кратчайшим?

Решение:

Нужно перенести точку А перпендикулярно берегам реки на расстояние, равное ширине реки, в направлении от А к реке.

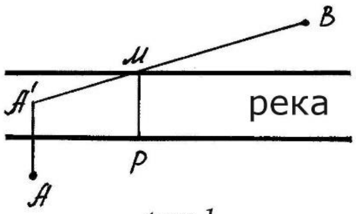

рис.1

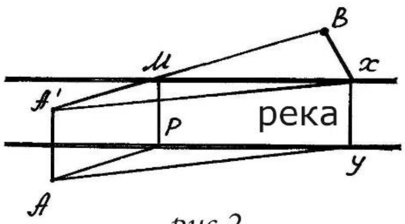

рис.2

Полученный отрезок A’B пересечёт в точке M тот берег, на котором расположена точка B. Через эту точку и должен проходить мост MP.

Для доказательства того, что путь APMB – кратчайший, «построим» ещё один мост – XY.

Путь AYXB длиннее пути APMB, так к A’XB>A’B (неравенство треугольника), A’A=XY=MP (свойство параллелограмма), а значит, AYXB=AA’XB>AA’MB, что и требовалось доказать (рис. 2).

Баллы	Критерии оценивания
10 баллов	Решение верно.
8 баллов	Решение верно, но недостаточно обоснованно.
5 баллов	Нарисован правильный маршрут без обоснования
0 баллов	Решение неверно или отсутствует

Задача 3 (*10 баллов*). На рисунке изображён прямоугольник. Он состоит из трёх квадратов: *KLMN, NMPO, OPRS*. Чему равна сумма углов *MKS, PKS* и *RKS*?

Решение:

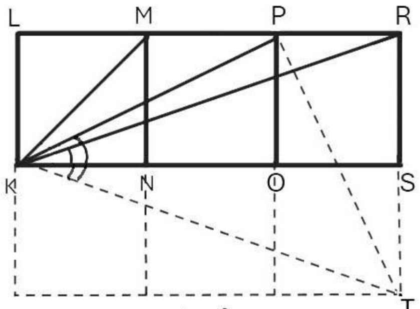

рис.3

Очевидно, угол MKS=45^0. Чтобы найти сумму углов PKS и RKS, приложим к одному из них угол, равный другому. Например, построим точку T (рис. 3). Угол TKS симметричен углу RKS, а значит, равен ему и составляет с углом PKS угол в 45^0, так как треугольник KPT – равнобедренный прямоугольный.

Ответ: 90^0

Баллы	Критерии оценивания
10 баллов	Решение верно.
8 баллов	Решение верно, но недостаточно обоснованно.
5 баллов	Дан правильный ответ без обоснования
0 баллов	Решение неверно или отсутствует

Задача 4 (*10 баллов*). Геральту для укрепления сил нужно выпить Воды из волшебного источника леса Брокилон – ровно 43 литра. У дриад из леса есть два ведра в 24 и 11 литров и достаточно большая бочка. Смогут ли дриады помочь Геральту?

Решение:

Смогут. Они могут сделать это так:

1) Набрать из источника большое ведро (24 л.);
2) Дважды вылить из большого ведра полное малое ведро (22 л.);
3) Оставшиеся в большом ведре 2 л. перелить в бочку;
4) Проделать указанное ещё три раза, после чего в бочке окажется 8 л.
5) Добавить в бочку полные большое и малое вёдра, после чего в ней окажется 8+24+11=43 л.

Баллы	**Критерии оценивания**
10 баллов	Решение верно.
8 баллов	Решение верно, но не доведено до конца.
5 баллов	Начато решение, получен результат 2 литра
0 баллов	Решение неверно или отсутствует

Задача 5(*12 баллов*). Решите систему:

$$\begin{cases} a + ab + b = 2 + 3\sqrt{2} & (1) \\ a^2 + b^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Решение:

Умножив уравнение (1) на 2 и сложим с уравнением (2) $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) = (a + b)^2 + 2(a + b) = 10 + 6\sqrt{2}$ (3); $10 + 6\sqrt{2} = (9 + 6\sqrt{2} + 2) - 1 = \left(3 + \sqrt{2}\right)^2 - 1$

Перенесём «-1» в равенстве (3) в левую часть $(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 = \left(3 + \sqrt{2}\right)^2$

$$(a + b + 1)^2 = \left(3 + \sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a + b + 1 = 3 + \sqrt{2} & (4) \\ a + b + 1 = -3 - \sqrt{2} & (5) \end{array}\right.$$

Рассмотрим (5): $a + b = -4 - \sqrt{2}$ подставив в (1) получим: $a \cdot b = 6 + 4\sqrt{2}$

Докажем, что эта система не имеет решения: $\begin{cases} a + b = -4 - \sqrt{2} \\ a \cdot b = 6 + 4\sqrt{2} \end{cases}$

Итак, рассмотрим $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = \left(4 + \sqrt{2}\right)^2 - 4\left(6 + 4\sqrt{2}\right) = -6 - 8\sqrt{2} < 0$, что невозможно. Рассмотрим (4): $\begin{cases} a + b = 2 + \sqrt{2} \\ a \cdot b = 2\sqrt{2} \end{cases}$

$$(a - b)^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 2\sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{2} + 2 - 8\sqrt{2} = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a + b = 2 + \sqrt{2} \\ a - b = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a + b = 2 + \sqrt{2} \\ a - b = \sqrt{2} - 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a_2 = \sqrt{2} \\ b_2 = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2, \sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2}, 2\right)$

Баллы	**Критерии оценивания**
12 баллов	Решение верно.
8 баллов	Получен ответ, но не доказано отсутствия решения для второго случая
5 баллов	Выделен полный квадрат после сложения уравнений
0 баллов	Решение неверно или отсутствует