

Решение варианта №1 (Инженерное дело 11 классы)

1. Сколькими нулями оканчивается запись числа $1000!$ в 25200-чной системе счисления? (5 баллов)

Решение:

Поскольку $25200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, нужно выяснить, сколько раз встретятся 2, 3, 5 и 7 в разложении $1000!$ на простые множители. Будем обозначать $[x]$ целую часть числа x . Число $n!$ делится на простое число p в степени

$$m_p = [n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \dots,$$

но не делится на p в степени $m_p + 1$. При $n = 1000$ получаем $m_2 = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994$, $m_3 = 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 = 498$, $m_5 = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$, $m_7 = 142 + 20 + 2 = 164$. Следовательно, $1000!$ делится на $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ в степени

$$\min \{[m_2/4], [m_3/2], [m_5/2], m_7\} = \min \{248, 249, 124, 164\} = 124.$$

Ответ: 124.

2. В ящике лежат белые, черные и красные шары. Если брать три шара по одному, каждый раз возвращая шар и перемешивая, то вероятность достать шары всех цветов $p = \frac{5}{24}$. Если же

взять сразу три шара, то вероятность достать шары всех цветов $q = \frac{3}{11}$. Сколько всех шаров в ящике? (10 баллов)

Решение.

Пусть шаров n , из них b белых, c черных и k красных. Если брать по одному шару с возвращением, то вероятность достать шары всех цветов

$$p = 3! \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{k}{n} = \frac{6bck}{n^3};$$

если же взять три шара одновременно, то получим вероятность

$$q = \frac{b \cdot c \cdot k}{C_n^3} = \frac{6bck}{n(n-1)(n-2)}.$$

Отношение этих вероятностей

$$\frac{p}{q} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} = \frac{5}{24} : \frac{3}{11} = \frac{55}{72}$$

$$72(n^2 - 3n + 2) = 55n^2$$

$$17n^2 - 216n + 144 = 0.$$

Корни: целый 12 и не целый $12/17$. (Искать b, c, k не требуется).

Ответ: 12.

3. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K . Через точку K проведена прямая, дополнительно пересекающая первую окружность в точке A , а вторую в точке B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $AB=15$, диаметр первой окружности равен 20, диаметр второй окружности равен 5, и отрезок AC является диаметром первой окружности ($K \neq C$). (10 баллов)

Решение. Пусть точка D – точка пересечения прямой CK со второй окружностью.

Поскольку $\angle KAC = \angle BKD = \angle CKD = \angle KBD$,

то прямоугольные треугольники AKC и BKD

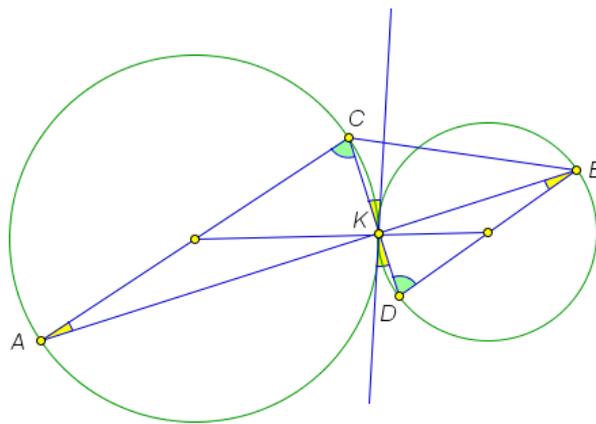
подобны, и $\frac{AC}{BD} = \frac{AK}{KB}$, $AK = x \Rightarrow \frac{x}{15-x} = 4$,

$x = 12$, $AK = 4$, $CK = 16$, $KB = 3$, $BC = \sqrt{265}$,

$\alpha = \angle ABC$, $\sin \alpha = \frac{16}{\sqrt{265}}$.

По теореме синусов радиус R окружности, описанной около треугольника ABC , вычисляется по формуле

$$R = \frac{AC}{2 \sin \alpha} = \frac{20\sqrt{265}}{32} = \frac{5\sqrt{265}}{8}. \quad \text{Ответ: } \frac{5\sqrt{265}}{8}$$



4. Найдите все значения a , при которых существует единственная пара (x, y) , удовлетворяющая неравенству

$$a - a^2 - 5 - 2x^2 - 4ax \geq 2 \sin \left(\frac{\pi}{54} (30 + 14 \cos y - 7 \cos 2y) \right) \text{ при } y \in [0; 2\pi]. \text{ Укажите эту}$$

пару при каждом из найденных a . (10 баллов)

Решение:

Рассмотрим функцию

$$f(x) = a - a^2 - 5 - 2x^2 - 4ax = a + a^2 - 5 - 2(x + a)^2 \leq a + a^2 - 5. \quad \text{Функция } f(x)$$

принимает все значения из промежутка $(-\infty; a + a^2 - 5]$.

Найдем множество значений функции $z = g(y) = 30 + 14 \cos y - 7 \cos 2y$. Функция $g(y)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t = \cos y$. Тогда $z = 30 + 14t - 7(2t^2 - 1) = 37 - 14(t^2 - t) = 40,5 - 14(t - 0,5)^2$ при $t \in [-1; 1]$, и $E_g = [9; 40,5]$.

Функция $u = \frac{\pi}{54} z$ принимает все значения из промежутка $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4} \right]$. Множество значений

функции $h(y) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{54} g(y) \right)$ совпадает с множеством значений функции $2 \sin u$, где

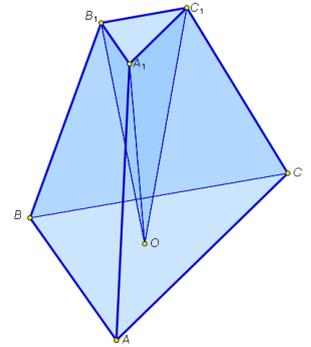
$$u \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4} \right]. \text{ Следовательно, } E_h = [1; 2].$$

Единственная пара (x, y) , удовлетворяющая неравенству, заданному в условии, при $y \in [0; 2\pi]$ будет в том случае, если $a + a^2 - 5 = 1$, т.е. при $a = 2$ и $a = -3$.

При $a = 2$ имеем $x = -2$, $y = \pi$, при $a = -3$ имеем $x = 3$, $y = \pi$.

Ответ: при $a = 2$ имеем $(-2; \pi)$, при $a = -3$ имеем $(3; \pi)$.

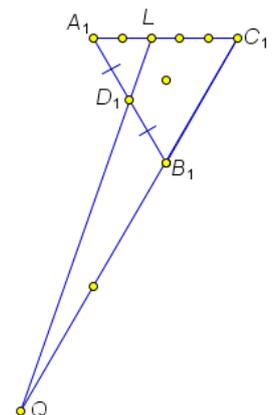
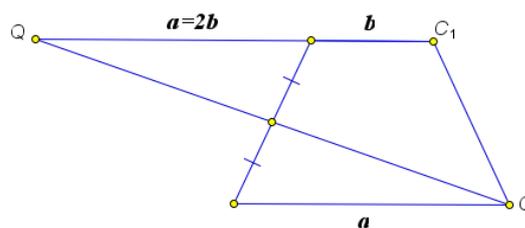
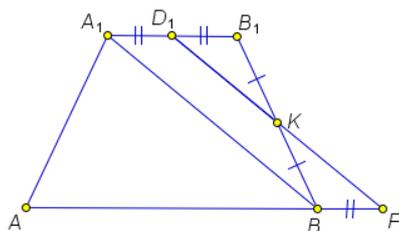
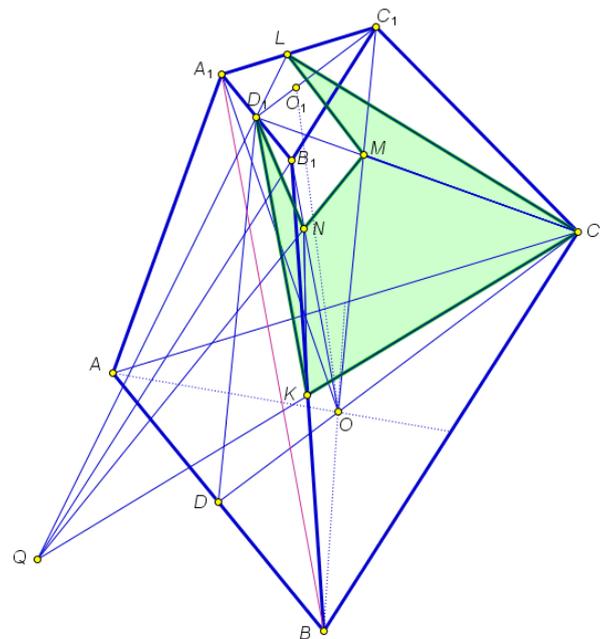
5. В правильной усеченной треугольной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ сторона нижнего основания ABC равна 4, верхнего основания $A_1B_1C_1$ равна 2, точка O – центр основания ABC . Поверхность многогранника Φ состоит из треугольника ABC , боковых граней пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ и боковых граней пирамиды $OA_1B_1C_1$. Постройте сечение многогранника Φ плоскостью, параллельной прямой A_1B и проходящей через точку C и середину ребра A_1B_1 . Найдите площадь построенного сечения, если высота пирамиды равна $5/\sqrt{21}$. (15 баллов)



Решение. Пусть $a = AB = 4$, $b = A_1B_1 = 2$, $a = 2b$, высоту пирамиды обозначим h , $h = 5/\sqrt{21}$.

Построим сечение многогранника Φ . Пусть точки D и D_1 – середины AB и A_1B_1 соответственно. Через точку D_1 проведем прямую параллельную A_1B . Пусть K – точка пересечения этой прямой с ребром BB_1 , $BK = KB_1$. Прямая CK принадлежит плоскости сечения. В плоскости CBB_1 найдем точку пересечения прямых CK и C_1B_1 . Обозначим эту точку через Q , $BC = B_1Q$. Прямая QD_1 принадлежит плоскости сечения. Найдем точку L пересечения этой прямой с ребром A_1C_1 . По теореме Менелая для треугольника $A_1B_1C_1$ имеем

$$\frac{A_1L}{LC_1} \cdot \frac{C_1Q}{QB_1} \cdot \frac{B_1D_1}{D_1A_1} = 1, \quad \frac{A_1L}{LC_1} \cdot \frac{3b}{2b} \cdot \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{A_1L}{LC_1} = \frac{2}{3}$$

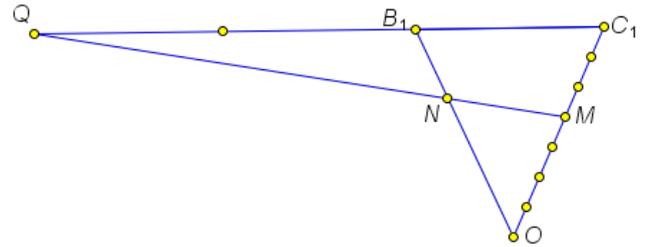
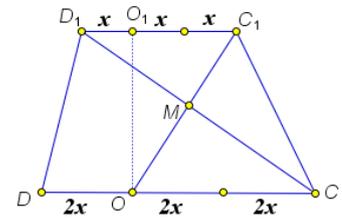


Прямая CD_1 принадлежит плоскости сечения. Найдем точку M пересечения этой прямой с ребром OC_1 . Треугольники C_1MD_1 и OMC подобны, и $\frac{MD_1}{CM} = \frac{MC_1}{OM} = \frac{C_1D_1}{CO}$, $\frac{MC_1}{OM} = \frac{3}{4}$.

В плоскости OC_1B_1 найдем точку пересечения прямых MQ и OB_1 . Обозначим эту точку через N . По теореме Менелая для треугольника OB_1C_1 имеем $\frac{ON}{NB_1} \cdot \frac{B_1Q}{QC_1} \cdot \frac{C_1M}{MO} = 1$, $\frac{ON}{NB_1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$,

$$\frac{ON}{NB_1} = 2.$$

Сечением многогранника Φ является многоугольник D_1KCLMN .



Площадь сечения D_1KCLMN будем вычислять

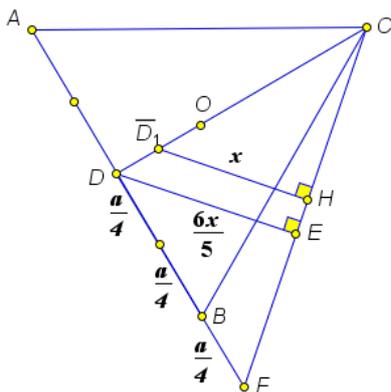
по формуле $S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi}$, где S_{np} - площадь

проекции сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания. Пусть

$$S = S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{np} = \frac{S}{6} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{S}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \right) + \frac{S}{12} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{S}{12} \cdot \frac{3}{5} = \frac{S}{12} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{7} \right) =$$

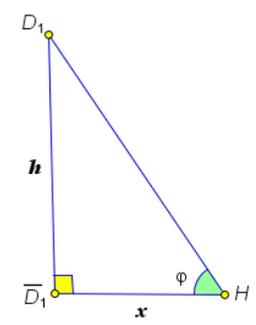
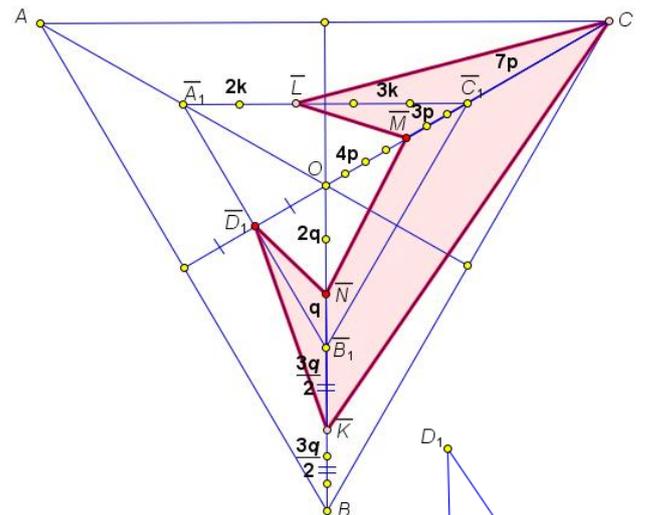
$$= \frac{S}{12} \left(\frac{5}{12} + 3 - \frac{8}{21} + \frac{6}{7} \right) = \frac{S}{12} \cdot \frac{109}{28} = \frac{109a^2 \sqrt{3}}{48 \cdot 28} = \frac{109\sqrt{3}}{84}$$



$$\frac{6}{5}x \cdot CF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{4}, \quad \frac{6}{5}x \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8},$$

$$x = \frac{5a}{4\sqrt{7}} = \frac{5}{\sqrt{7}}.$$

Тогда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{h\sqrt{7}}{5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi} = \frac{109}{42}$. **Ответ:** $\frac{109}{42}$.



Правила выставления баллов за выполнение заданий

Инженерное дело. Математика 11 класс

№	Критерии оценивания задания	Баллы
1.	Теория чисел	0, 2, 3, 4, 5
	Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	5
	Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Установлена связь между количеством нулей и максимальным показателем степени числа 25200 в разложении $1000!$ на множители. Допущена одна арифметическая ошибка.	4
	Все показатели степеней чисел 2, 3, 5, 7, которые входят в разложение числа $1000!$ на простые множители, найдены верно. Верно указан путь поиска максимального показателя степени числа 25200, при котором степень числа 25200 является делителем $1000!$	3
	Верно разложено на простые множители число 25200. Найдены степени простых чисел 2, 3, 5, 7, которые входят в разложение числа $1000!$ на простые множители. Хотя бы для двух чисел из четырех показатели степеней найдены верно.	2
	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
2.	Теория вероятностей	0, 3, 5, 8, 10
	Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	10
	Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.	8
	Задача сведена к решению верного квадратного уравнения относительно количества шаров в ящике.	5
	Верно записаны формулы для вычисления вероятностей событий в первом и во втором случаях.	3
	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

3.	Планиметрия	0, 3, 5, 8, 10
	Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы.	10
	Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.	8
	Найдены верно AK, BK, CK , указан путь для нахождения радиуса описанной окружности, проведены соответствующие вычисления.	5
	Рассмотрены подобные треугольники, найдены верно AK, BK, CK .	3
	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
4.	Неравенство с параметром	0, 3, 5, 8, 10
	Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	10
	При верно найденных значениях параметра есть одна ошибка в решениях неравенства.	8
	Задача сведена к решению верного квадратного уравнения. Найдены верные значения параметра.	5
	Получены верные оценки значений функций, стоящих в левой и правой частях неравенства.	3
	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
5.	Стереометрия	0, 4, 8, 12, 15
	Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.	15
	Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены. Допущена одна арифметическая ошибка.	12
	При условии, что найдены все отношения, в которых плоскость сечения делит соответствующие ребра многогранника, верно найдена площадь проекции сечения на плоскость основания, или найден косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.	8
	Полностью описано построение сечения многогранника. Найдены отношения, в которых	4

плоскость сечения делит соответствующие ребра многогранника.	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0