Решение варианта №1 (Инженерное дело 10 класс)

1. Сколькими нулями оканчивается запись числа 1000! в 25200-чной системе счисления? (5 баллов)

Решение:

Поскольку $25200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, нужно выяснить, сколько раз встретятся 2, 3, 5 и 7 в разложении 1000! на простые множители. Будем обозначать $[x]$ целую часть числа x. Число $n!$ делится на простое число p в степени

$$m_p = [n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots,$$

но не делится на p в степени $m_p + 1$. При $n = 1000$ получаем $m_2 = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994$, $m_3 = 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 = 498$, $m_5 = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$, $m_7 = 142 + 20 + 2 = 164$. Следовательно, 1000! делится на $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ в степени

$$\min\{[m_2/4], [m_3/2], [m_5/2], m_7\} = \min\{248, 249, 124, 164\} = 124.$$

Ответ: 124.

2. В ящике лежат белые, черные и красные шары. Если брать три шара по одному, каждый раз возвращая шар и перемешивая, то вероятность достать шары всех цветов $p = \frac{5}{24}$. Если же взять сразу три шара, то вероятность достать шары всех цветов $q = \frac{3}{11}$. Сколько всех шаров в ящике? (10 баллов)

Решение.

Пусть шаров n, из них b белых, c черных и k красных. Если брать по одному шару с возвращением, то вероятность достать шары всех цветов

$$p = 3! \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{k}{n} = \frac{6bck}{n^3};$$

если же взять три шара одновременно, то получим вероятность

$$q = \frac{b \cdot c \cdot k}{C_n^3} = \frac{6bck}{n(n-1)(n-2)}.$$

Отношение этих вероятностей

$$\frac{p}{q} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} = \frac{5}{24} : \frac{3}{11} = \frac{55}{72}$$

$$72(n^2 - 3n + 2) = 55n^2$$

$$17n^2 - 216n + 144 = 0.$$

Корни: целый 12 и не целый 12/17. (Искать b, c, k не требуется).

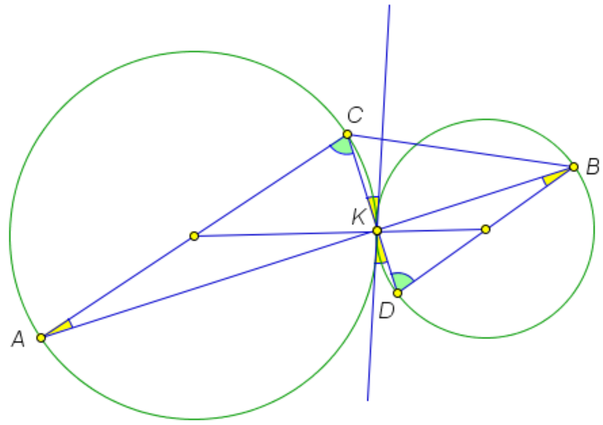
Ответ: 12.

3. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K. Через точку K проведена прямая, дополнительно пересекающая первую окружность в точке A, а вторую в точке B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AB = 15$, диаметр первой окружности равен 20, диаметр второй окружности равен 5, и отрезок AC является диаметром первой окружности ($K \neq C$). (10 баллов)

Решение. Пусть точка D – точка пересечения прямой CK со второй окружностью.
Поскольку $\angle KAC = \angle BKD = \angle CKD = \angle KBD,$
то прямоугольные треугольники AKC и BKD подобны, и $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AK}{KB}$, $AK = x \Rightarrow \dfrac{x}{15-x} = 4,$

$x = 12,\ AK = 4,\ CK = 16,\ KB = 3,\ BC = \sqrt{265},$

$\alpha = ABC,\ \angle \sin\alpha = \dfrac{16}{\sqrt{265}}.$



По теореме синусов радиус R окружности, описанной около треугольника ABC, вычисляется по формуле

$R = \dfrac{AC}{2\sin\alpha} = \dfrac{20\sqrt{265}}{32} = \dfrac{5\sqrt{265}}{8}.$ **Ответ:** $\dfrac{5\sqrt{265}}{8}$

4. Найдите все значения a, при которых существует только две различные пары (x, y), удовлетворяющие неравенству

$a - a^2 - 3 - 2x^2 - 4ax \geq 4\sqrt[4]{3-2y^2} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{3-2y^2}} - 1.$ Укажите эти пары при каждом из найденных a. (10 баллов)

Решение:

Рассмотрим функцию
$f(x) = a - a^2 - 3 - 2x^2 - 4ax = a + a^2 - 3 - 2(x+a)^2 \leq a + a^2 - 3.$ Функция $f(x)$ принимает все значения из промежутка $(-\infty;\ a + a^2 - 3]$.

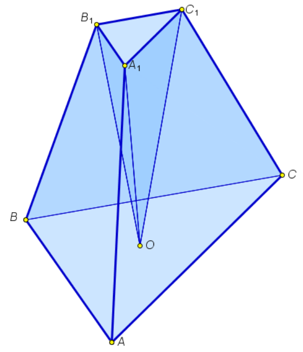
Функция $t = \sqrt[4]{3-2y^2}$ принимает значения $t \in [0;\ \sqrt[4]{3}]$. Рассмотрим функцию $u = 4t + \dfrac{1}{t} - 1,$ определенную на полуинтервале $(0;\ \sqrt[4]{3}]$. Имеем $u = 4t + \dfrac{1}{t} - 4 + 3 = \dfrac{4t^2 - 4t + 1}{t} + 3 = \dfrac{(2t-1)^2}{t} + 3 \geq 3$. Функция принимает все значения из промежутка $[3;\ \infty)$. Значение $u = 3$ принимает в одной точке $t = 0{,}5$, при этом $\sqrt[4]{3-2y^2} = \dfrac{1}{2}$, $3 - 2y^2 = \dfrac{1}{16}$, $y^2 = \dfrac{47}{32}$, $y = \pm\dfrac{\sqrt{47}}{4\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{94}}{8}$.

Только две различные пары (x, y) будут удовлетворять неравенству, заданному в условии, если $a + a^2 - 3 = 3,$ т.е. при $a = 2$ и $a = -3$.

При $a=2$ имеем $x=-2,\ y=\pm\frac{\sqrt{94}}{8}$, при $a=-3$ имеем $x=3,\ y=\pm\frac{\sqrt{94}}{8}$.

Ответ: При $a=2$ имеем $\left(-2;\pm\frac{\sqrt{94}}{8}\right)$, при $a=-3$ имеем $\left(3;\pm\frac{\sqrt{94}}{8}\right)$.

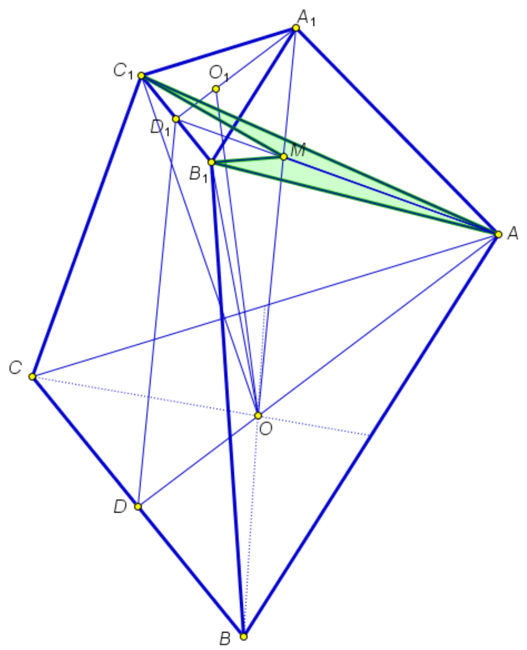
5. В правильной усеченной треугольной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ сторона нижнего основания ABC равна 9, верхнего основания $A_1B_1C_1$ равна 3, точка O – центр основания ABC. Поверхность многогранника Φ состоит из треугольника ABC, боковых граней пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ и боковых граней пирамиды $OA_1B_1C_1$. Постройте сечение многогранника Φ плоскостью AB_1C_1 и найдите его площадь, если расстояние от точки A_1 до плоскости сечения равно $\sqrt{11}/2$. (15 баллов)



Решение. Пусть $a=AB=9,\ b=A_1B_1=3,$ расстояние от точки A_1 до плоскости сечения обозначим d, $d=\sqrt{11}/2$.

Построим сечение многогранника Φ. Пусть точки D и D_1 - середины BC и B_1C_1 соответственно. Прямая AD_1 принадлежит плоскости сечения. Найдем точку M пересечения этой прямой с ребром OA_1. Сечением многогранника Φ является многоугольник AB_1MC_1. Его площадь S можно найти по формуле

$$S=S_{AB_1C_1}-S_{MB_1C_1}=\frac{B_1C_1\cdot AD_1}{2}-\frac{B_1C_1\cdot MD_1}{2}=\frac{b(AD_1-MD_1)}{2}.$$

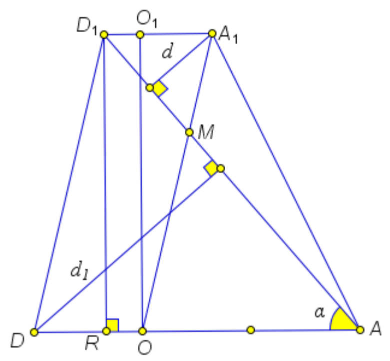


Треугольники A_1MD_1 и OMA подобны, и $\frac{MD_1}{AM}=\frac{A_1D_1}{AO}$, а поскольку $A_1D_1=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, $AO=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $\frac{MD_1}{AM}=\frac{3b}{2a}=\frac{1}{2}$.

Тогда $\frac{MD_1}{AD_1}=\frac{3b}{2a+3b}=\frac{1}{3}$, $S=\frac{AD_1\left(1-\frac{3b}{2a+3b}\right)b}{2}=AD_1$.

Найдем AD_1. Расстояние от точки A_1 до плоскости сечения равно расстоянию от точки A_1 до прямой AD_1. Пусть расстояние от точки D до прямой AD_1 равно d_1. Тогда $\frac{d}{d_1}=\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$, и $d_1=3d=\frac{3\sqrt{11}}{2}$. Пусть $\alpha=\angle DAD_1$. Тогда

$$\sin\alpha=\frac{d_1}{AD}=\frac{2d_1}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}},\ \cos\alpha=\sqrt{1-\frac{11}{27}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$



Пусть D_1R - высота треугольника AD_1D. Имеем $AR = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{b\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$, $AD_1 = \frac{AR}{\cos\alpha} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{63}{8}$. **Ответ:** $\frac{63}{8}$**.**

Правила выставления баллов за выполнение заданий

Инженерное дело. Математика 10 класс

<table>
<tr><th>№</th><th>Критерии оценивания задания</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Теория чисел</td><td>0, 2, 3, 4, 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Все рассуждения верные, сформулированные утверждения строго обоснованы. Установлена связь между количеством нулей и максимальным показателем степени числа 25200 в разложении 1000! на множители. Допущена одна арифметическая ошибка.</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Все показатели степеней чисел 2, 3, 5, 7, которые входят в разложение числа 1000! на простые множители, найдены верно. Верно указан путь поиска максимального показателя степени числа 25200, при котором степень числа 25200 является делителем 1000!</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Верно разложено на простые множители число 25200. Найдены степени простых чисел 2, 3, 5, 7, которые входят в разложение числа 1000! на простые множители. Хотя бы для двух чисел из четырех показатели степеней найдены верно.</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Теория вероятностей</td><td>0, 3, 5, 8, 10</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="2">Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы. Допущена одна арифметическая ошибка.</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задача сведена к решению верного квадратного уравнения относительно количества шаров в ящике.</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Верно записаны формулы для вычисления вероятностей событий в первом и во втором случаях.</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.</td><td>0</td></tr>
</table>

3.	Планиметрия	**0, 3, 5, 8, 10**
Задача решена полностью, получены все верные обоснованные ответы.		**10**
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены точно. Допущена одна арифметическая ошибка.		**8**
Найдены верно AK, BK, CK, указан путь для нахождения радиуса описанной окружности, проведены соответствующие вычисления.		**5**
Рассмотрены подобные треугольники, найдены верно AK, BK, CK.		**3**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.		**0**
4.	Неравенство с параметром	**0, 3, 5, 8, 10**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.		**10**
При верно найденных значениях параметра есть одна ошибка в решениях неравенства.		**8**
Задача сведена к решению верного квадратного уравнения. Найдены верные значения параметра.		**5**
Получены верные оценки значений функций, стоящих в левой и правой частях неравенства.		**3**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.		**0**
5.	Стереометрия	**0, 4, 8, 12, 15**
Задача решена полностью, получен верный обоснованный ответ.		**15**
Все рассуждения верные, представленные формулы строго обоснованы, все нужные ответы получены. Допущена одна арифметическая ошибка.		**12**
При условии, что найдены все отношения, в которых плоскость сечения делит соответствующие ребра многогранника, выписана формула для нахождения площади сечения многогранника и вычислено отношение высот соответствующих треугольников. Вычисление площади сведено к поиску AD_1.		**8**

Полностью описано построение сечения многогранника. Найдены отношения, в которых плоскость сечения делит соответствующие ребра многогранника.	**4**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	**0**