

9 класс. 2 вариант.**Задача 1 (10 баллов).**

На мотошоу зрителям показали необычное средство передвижения - моноцикл, одноколесный мотоцикл. В процессе представления водитель моноцикла заехал в специальную яму, представляющий собой вогнутую часть полусферы с радиусом 15,5 м. Масса водителя в экипировке равняется 80 кг. Максимальная масса седока, которую выдерживает моноцикл, равна 200 кг. Определите, с какой максимальной скоростью может двигаться центр масс водителя, если известно, что расстояние от поверхности сферы до центра масс седока составляет 50 см. Ускорение свободного падения принять за $g = 10 \text{ м/с}^2$. При решении задачи принять водителя за материальную точку.

Решение:

Определим радиус движения центра масс водителя:

$R = r - l$, где r - радиус сферы, а l - высота от поверхности сферы до центра масс водителя.

Запишем второй закон Ньютона при условии, что на водителя действует сила реакции опоры, равная максимально возможному весу ($N = P$):

$$\begin{aligned} ma_{ц} &= N - mg \\ ma_{ц} &= P - mg \\ a_{ц} &= \frac{Mg - mg}{m} \\ \frac{v^2}{R} &= \frac{Mg - mg}{m} \\ \frac{v^2}{r - l} &= \frac{(M - m)g}{m} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{(M - m)g}{m}(r - l)} = 15 \text{ м/с}$$

Ответ: 15 м/с.

Критерии:

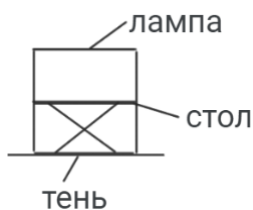
Верно записана формула второго закона Ньютона	3 балла
Верно записана формула центростремительного ускорения	2 балла
Верно найден радиус движения	2 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	3 балла
ИТОГО	10 баллов

Задача 2 (15 баллов).

На потолок высотой 3 метра висит люминесцентная лампа длиной 1 метр. Толщиной лампы пренебречь. Определите максимальный и минимальный линейные размеры тени на полу, если под лампой стоит круглый стол высотой 1 метр, диаметр которого равен длине лампы. Лампа и круг параллельны полу, а их центры расположены на одном перпендикуляре к плоскости пола.

Решение:

Для определения минимальной длины тени сделаем рисунок вида спереди:



Для определения максимальной длины тени сделаем рисунок вида сбоку:

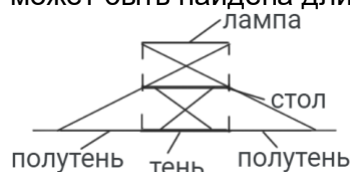


В первом случае минимальная длина тени будет равна диаметру стола, то есть длине лампы $l_1 = 1$ м.

Во втором случае максимальная длина тени может быть получена из подобия равнобедренных треугольников с основаниями стол и тень. В таком случае отношение длины тени к диаметру стола будет равняться отношению высоты от пола до лампы к высоте от стола до лампы $\frac{l_2}{D} = \frac{H}{H-h}$, где H - высота от пола до потолка, h - высота стола.

Тогда $l_2 = \frac{HD}{H-h} = 1,5$ м.

Добавим, что вариант на рисунке ниже не подходит по условию, так как таким образом может быть найдена длина ПОЛУтени.



Ответ: 1 метр и 1,5 метра.

Критерии:

Верно определен минимальный размер тени	5 баллов
Верно определен максимальный размер тени	10 баллов
ИТОГО	15 баллов
Примечание для экспертов: Если ученик верно определил максимальный размер полутени вместо тени, то ему выставляется 2 балла	

Задача 3 (15 баллов)

Фирма по производству машинного масла разработала систему срочного реагирования на перегрев производимого продукта. Система включает в себя огромный прямоугольный контейнер, разделенный тонким теплоизолирующим шлюзом на две секции. В одной секции нагревается масло при помощи десяти мощных нагревательных модулей, соединенных параллельно, причем сопротивление каждого модуля составляет 5 Ом. В другой части контейнера расположено две тонны порошкового холодильного агента, который используется для экстренного понижения температуры в системе. Когда температурный перепад между жидкостью и агентом достигает двадцати градусов, шлюз автоматически открывается, сбрасывая агент в масло для выравнивания температуры. Если после достижения теплового равновесия включить нагревательные модули, то температура смеси будет повышаться на $0,5^\circ\text{C}$ за минуту. КПД нагревательных модулей составляет 60%, а источник питания обеспечивает

постоянное напряжение 220 В. Определите теплоемкость масла, если ее начальная температура такая же, как у агента и равна 10°C. Удельная теплоемкость порошка холодильного агента равна 1500 Дж/кг·К.

Решение:

Запишем КПД нагревателя после установления теплового баланса:

$\eta = \frac{Q}{P\tau}$, где τ - время нагрева, Q - количество теплоты, P - мощность нагревателя.

Запишем формулу мощности нагревателя:

$P = \frac{U^2}{R_0}$, где U - питающее напряжение, а R_0 - общее сопротивление нагревателя.

Найдем общее сопротивление, зная, что резисторы подключены параллельно:

$R_0 = \frac{R}{n}$, где n - количество резисторов.

Тогда мощность будет равна:

$$P = \frac{nU^2}{R}$$

Запишем количество теплоты, идущее на нагрев всей смеси:

$$Q = C\Delta t + cm\Delta t$$

Соберем все в первой формуле:

$$\eta = \frac{(C\Delta t + cm\Delta t)R}{nU^2\tau}$$

Выразим теплоемкость агента:

$$\frac{\eta n U^2 \tau}{R} = C\Delta t + cm\Delta t$$

$$(C + cm)\Delta t = \frac{\eta n U^2 \tau}{R}$$

$$C = \frac{\eta n U^2 \tau}{R\Delta t} - cm$$

Подставим численные значения, учитывая, что $\frac{\tau}{\Delta t} = 120$:

$$C = \frac{0,6 \cdot 10 \cdot 220^2 \cdot 120}{5} - 1500 \cdot 2000 = 3969600 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: 4 МДж/К.

Критерии:

Верно записана формула КПД	2 балла
Верно записано формула мощности через напряжение и сопротивление	2 балла
Верно записано количество теплоты, полученное маслом	4 балла
Верно записано количество теплоты, полученное агентом	1 балл
Верно записан закон сохранения энергии	4 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	2 балла
ИТОГО	15 баллов

Задача 4 (20 баллов).

В астрономии всегда все рассчитывается с большой точностью. Например, известно, что у спутника Юпитера Каллисто диаметр в 2,6 раз меньше, чем у Земли. На Каллисто отправили межпланетный исследовательский зонд массой 121,68 кг. Задача зонда - определить, есть ли органические молекулы в недрах планеты. Для этого ему необходимо пробить некоторый поверхностный слой. В процессе снижения зонд отключает свои тормозящие двигатели в тот момент, когда его скорость относительно поверхности спутника направлена горизонтально и равна 3 м/с. Через 2 секунды после отключения двигателей зонд врезается в поверхность спутника, имея при этом кинетическую энергию в 947,56 Дж. Определите, во сколько раз плотность Каллисто отличается от земной. Изменением силы гравитационного взаимодействия с высотой пренебречь. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10 \text{ м/с}^2$. Объем шара определяется по формуле: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Атмосфера спутника разрежена настолько, что не оказывает сопротивления на движение зонда.

Решение:

Определим взаимосвязь ускорения свободного падения на поверхности Земли и ее плотности. Для этого воспользуемся законом всемирного тяготения:

$$F = G \frac{mM}{R^2}.$$

На поверхности Земли:

$$mg = G \frac{mM}{R^2}.$$

Тогда:

$$g = G \frac{M}{R^2}. \text{ Подставим массу Земли:}$$

$$g = G \frac{\rho V}{R^2} = G \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = G \frac{4}{3}\rho\pi R$$

Выразим радиус Земли:

$$R = \frac{3g}{4G\rho\pi}$$

Определим ускорение свободного падения на поверхности Каллисто:

$$a = G \frac{4}{3}\rho_k\pi \frac{R}{2,6} = \frac{1}{2,6} G \frac{4}{3}\rho_k\pi R$$

Подставим в это уравнение радиус Земли:

$$a = \frac{1}{2,6} G \frac{4}{3}\rho_k\pi R = \frac{1}{2,6}\rho_k \frac{g}{\rho}$$

Выразим отношение плотности Каллисто к плотности Земли:

$$\frac{\rho_k}{\rho} = \frac{2,6a}{g}$$

Теперь найдем ускорение свободного падения на поверхности Каллисто. Для этого решим задачу на свободное падение. Так как известно, что начальная скорость горизонтальна, двигатели модуля были отключены, то вертикальная составляющая скорости в момент падения находится по формуле:

$$|v_y| = |at| \Rightarrow |a| = \frac{|v_y|}{t}$$

Горизонтальная составляющая скорости не изменялась. Тогда полная скорость в момент падения находится по теореме Пифагора:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

Также полную скорость можно выразить из закона сохранения энергии:

$$E = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{2E}{m}$$

Приравняем эти уравнения:

$$v_x^2 + v_y^2 = \frac{2E}{m}$$

Выразим вертикальную составляющую:

$$v_y = \sqrt{\frac{2E}{m} - v_x^2}$$

Подставим в значение ускорения:

$$a = \frac{\sqrt{\frac{2E}{m} - v_x^2}}{t}$$

Подставим ускорение в отношение плотностей и выразим итоговую формулу:

$$\frac{\rho}{\rho_k} = \frac{g}{2,6} \frac{t}{\sqrt{\frac{2E}{m} - v_x^2}} = \frac{1}{2,6} \sqrt{\frac{mg^2 t^2}{2E - mv_x^2}}$$

Подставим численные значения:

$$\frac{\rho}{\rho_k} = \frac{1}{2,6} \sqrt{\frac{121,68 \cdot 10^2 \cdot 2^2}{2 \cdot 947,56 - 121,68 \cdot 3^2}} = 3$$

Ответ: Плотность Каллисто в 3 раза меньше плотности Земли.

Критерии:

Верно записан закон всемирного тяготения	1 балла
Верно записана формула ускорения свободного падения	1 балла
Верно выражена плотность через ускорение свободного падения и радиус	3 балла
Верно записаны формулы кинематических взаимосвязей	2 балла
Верно выражена вертикальная составляющая скорости	3 балла
Верно записана формула кинетической энергии	1 балл
Верно записана теорема Пифагора для определения конечной скорости или правильно записан закон сохранения энергии	4 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	5 баллов
ИТОГО	20 баллов

Задача 5 (20 баллов)

Компания по производству развивающих настольных игр заказала партию из 240 пластиковых игральные кубиков. Кубики приехали плотно упакованными в тонкую коробку, вдоль самого короткого ребра которой укладывается ровно 4 кубика. Если же измерить самую длинную сторону упаковки, то ее длина составит 150 мм. На коробке

указано, что масса нетто составляет 680 грамм. Определите плотность материала кубиков, если известно, что они не тонут в воде. Плотность воды 1000 кг/м³.

Решение:

Так как в коробке находится 240 штук игральных костей, а вдоль ее короткого ребра укладывается 4 кубика, то в одном слое находится ровно 60 кубиков.

Если разложить 60 на множители, то получим $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Следовательно, в одном слое может находиться $2 \cdot 30$, $4 \cdot 15$, $5 \cdot 12$ и $6 \cdot 10$ кубиков.

Первый вариант противоречит условию, так как будет сторона, в которой меньше 4 кубиков. Второй вариант отпадает, так как тогда у коробки будет грань в форме квадрата. Значит, вдоль длинного ребра можно уложить 10 или 12 кубиков.

Проверим оставшиеся варианты на соответствие условию задачи:

В случае, если вдоль самого длинного ребра располагается 12 кубиков, одна сторона кубика будет равняться 12,5 мм.

Тогда их плотность:

$$\rho_2 = \frac{m}{240 \cdot a^3} = \frac{680}{240 \cdot 1,953125} \approx 1,45 \text{ г/см}^3.$$

Данный вариант не подходит, поскольку есть условие, что кубики не тонут в воде.

Если в коробке вдоль самого длинного ребра располагается 10 кубиков, то одна сторона кубика равняется 15 мм.

Тогда плотность материала кубиков будет равна:

$$\rho_1 = \frac{m}{240 \cdot a^3} = \frac{680}{240 \cdot 3,375} \approx 0,85 \text{ г/см}^3.$$

Данный вариант подходит по всем критериям.

Ответ: 0,85 г/см³.

Критерии:

Верно найдено количество кубиков в одном слое	2 балла
Верно определены возможные варианты укладки кубиков	8 баллов
Верно определено, какой вариант не подходит по условию самой короткой стороны	2 балла
Верно определено, какой вариант не подходит по условию отсутствия квадратных граней	2 балла
Верно записана формула плотности	2 балла
Приведены необходимые математические преобразования и получен верный численный ответ	4 балла
ИТОГО:	20 баллов

Ситуационная задача

Вариант 2

Для исследования атмосферы запустили мобильный метеозонд, представляющий собой блок измерительной аппаратуры, прикрепленный к воздушному шару диаметром 3 м, заполненному водородом под небольшим избыточным давлением. Общая масса шара и аппаратуры равна 5 кг. Шар привязан к якорю, установленному на поверхности земли условно невесомым тросом. В начальный момент времени зонд на высоте 98,5 м находится в восходящем потоке воздуха, направленным под углом 45° к вертикали.

Найдите скорость восходящего потока, если при этом трос находился под углом 10° к вертикали. Плотность воздуха равна $1,15 \text{ кг/м}^3$.

Куда будет направлена скорость шара в первый момент после внезапного стихания ветра и на какой высоте окажется шар в безветренную погоду? Ответ обосновать.

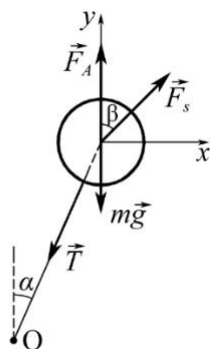
Дополнительная информация:

Сила аэродинамического сопротивления шара определяется по формуле

$$F_s = S \cdot C_x \frac{\rho \cdot v^2}{2},$$

где C_x – коэффициент аэродинамического сопротивления, для сферы $C_x = 0,5$; S – площадь поперечного сечения шара, v – скорость набегающего потока воздуха (ветра).

Решение:



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$$X: F_s \sin \beta = T \sin \alpha;$$

$$Y: F_A + F_s \cos \beta - mg - T \cos \alpha = 0.$$

Решим систему уравнений

$$T = \frac{F_s \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Подставим силу натяжения троса во второе уравнение

$$\rho g \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8} + F_s \cos \beta - mg - \frac{F_s \sin \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha = 0,$$

$$F_s = \frac{mg - \rho g \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8}}{\cos \beta - \frac{\sin \beta}{\tan \alpha}} = \frac{\pi D^2}{4} C_x \frac{\rho \cdot v^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{g(24m - 4\rho D^3\pi)}{3\left(\cos \beta - \frac{\sin \beta}{\tan \alpha}\right)\pi D^2 C_x \rho}}.$$

$$v = \sqrt{\frac{10(24 \cdot 5 - 4 \cdot 1,15 \cdot 3^3 \cdot 3,14)}{3 \left(0,7 - \frac{0,7}{0,176}\right) \cdot 3^2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot 1,15}} = 17,7 \text{ м/с.}$$

Если ветер внезапно стихнет, то скорость шара сразу после этого будет направлена под углом 45° противоположно направлению ветра. Из рисунка видно, что если ветер утихнет, то равнодействующая сил будет направлена под углом 45° к вертикали противоположно силе F_s . Следовательно, ускорение шара будет направлено также. Так как начальная скорость зонда равна нулю, то в первый момент после стихания ветра скорость будет направлена туда же.

В безветренную погоду трос будет располагаться вертикально. Значит, высота зонда будет равна длине троса

$$H = L = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{98,5}{0,985} = 100 \text{ м.}$$

Ответ: $v = 17,7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, скорость шара будет направлена под углом 45° противоположно направлению ветра, $L = 100 \text{ м}$.

Критерии
Ситуационная задача

	Верные элементы решения	Количество баллов
1	Сформулирована расчётная схема (в том числе, графически), выделены и правильно формализованы все необходимые физические законы	0-5
2	Составлена система уравнений и математическая модель	0-5
3	Верно учтены технические параметры, характеристики и ограничения	0-5
4	Проведены расчеты, получен верный ответ, разумный с точки зрения физического смысла	0-5
	Итого	max 20