

Решение олимпиады по математике

9-й класс, 2024 год

Вариант №2

№1 (15 баллов). Решите неравенство: $\sqrt{18x-1} - \sqrt{4x^2+11x-3} \geq 4x^2 - 7x - 2$.

Решение:

Пусть $u = \sqrt{18x-1}$, $v = \sqrt{4x^2+11x-3}$,

тогда $u^2 = 18x-1$, $v^2 = 4x^2+11x-3$ и $v^2 - u^2 = 4x^2 - 7x - 2$.

Неравенство примет вид: $u - v \geq v^2 - u^2 \Leftrightarrow (u - v)(1 + u + v) \geq 0$.

Возвращаясь к исходной переменной, будем иметь:

$$(\sqrt{18x-1} - \sqrt{4x^2+11x-3})(1 + \sqrt{18x-1} + \sqrt{4x^2+11x-3}) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{18x-1} - \sqrt{4x^2+11x-3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{18x-1} \geq \sqrt{4x^2+11x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x-1 \geq 4x^2+11x-3, \\ 4x^2+11x-3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 7x - 2 \leq 0, \\ 4x^2 + 11x - 3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{4}; 2\right], \\ x \in (-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right), \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{4}; 2\right].$$

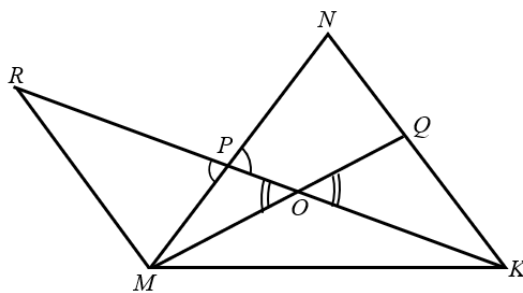
Ответ: $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$.

Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ
10	Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано, например, не описан равносильный переход в неравенствах.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, например, установлена связь между подкоренными выражениями и правой частью неравенства, но дальнейшее решение неверно или отсутствует, или содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№2 (15 баллов). В треугольнике MNK на стороне MN взята точка P так, что $MP:PN = 2:3$, а на стороне NK отмечена точка Q так, что $NQ:QK = 5:4$. Прямые KP, MQ пересекаются в точке O . Найти площадь треугольника KOQ , если известно, что площадь треугольника MOP равна 12.

Решение:



Проведем прямую $MR \parallel KN$. Точку пересечения этой прямой с прямой KP обозначим R .

Пусть $NQ = 5x$, $QK = 4x$, тогда $NK = 9x$.

$$\Delta MRP \sim \Delta NKP \Rightarrow \frac{MR}{NK} = \frac{MP}{PN} = \frac{PR}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow MR = \frac{2}{3} \cdot 9x = 6x;$$

$$\frac{PR}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow PR = \frac{2}{5} KR.$$

$$\Delta MOR \sim \Delta QOK \Rightarrow \frac{MR}{QK} = \frac{OM}{OQ} = \frac{OR}{OK} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow OK = \frac{2}{5} \cdot KR.$$

$$OP = KR - OK - PR = KR - \frac{2}{5} \cdot KR - \frac{2}{5} KR = \frac{1}{5} KR.$$

Тогда

$$\frac{S_{\Delta KOQ}}{S_{\Delta MOR}} = \frac{OK \cdot OQ}{OP \cdot OM} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{5 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{4}{3} \Rightarrow S_{\Delta KOQ} = \frac{4}{3} S_{\Delta MOR} = 16.$$

Ответ: 16 кв.ед.

Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ
10	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, например, верно найдено отношение $\frac{OM}{OQ}$ или $\frac{OK}{OP}$, но дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№3 (15 баллов). Группе путешественников, состоящей из Наташи, Юрия, Игоря Константиновича и Татьяны Олеговны, необходимо преодолеть сложный горный участок повышенной опасности. По технике безопасности на этом участке пути нужно обязательно находиться в каске. Но на всю группу имеются только две каски. Если этот участок пути переходят два человека, то они идут со скоростью того, кто идёт медленнее. Известно, что Юрий преодолевает участок за 4 минуты, Наташа – за 8 минут, Игорь Константинович – за 18 минут и Татьяна Олеговна – за 24 минуты. За какое наименьшее время данная группа путешественников может преодолеть горный участок при данных условиях. Алгоритм перехода опишите. Ответ обоснуйте.

Решение. Алгоритм следующий:

первый рейс – Наташа и Юрий (8 минут),

обратно, например, Наташа (8 минут), (но можно и Юрий)

второй рейс – Игорь Константинович и Татьяна Олеговна (24 минуты)

обратно – Виктор (4 минуты)

третий рейс – Наташа и Юрий (8 минут).

Всего – 52 минуты.

Доказательство минимальности. Т.к. есть всего две каски, а путешественников 4, то за один рейс могут перейти переправу только двое туристов. Причём, если переход не последний, то один из них должен вернуться назад с обеими касками. Следовательно, нужно сделать три рейса в одну сторону и два рейса в обратную (всего 5 рейсов). Но если Игорь Константинович и Татьяна Олеговна перебираются в разных рейсах, то в сумме они уже дают $18+24=42$ минуты. Плюс должно быть ещё три рейса, но самый короткий рейс длится четыре минуты (Юрий). Следовательно общее время будет не меньше $42+12=54$ минуты. Значит, Валерий Сергеевич и Ангелина Павловна должны перебираться одним рейсом. Если этот рейс первый или последний, то один из них должен вернуться и ещё раз пройти путь, а это ещё добавит минимум 18 минут, т.е. в сумме получится не меньше чем $42+18=60$ минут.

Значит, выбранный алгоритм является оптимальным.

Ответ: 52 минуты.

Критерии выставления оценок

Баллы	Критерии выставления
15	Описан правильный алгоритм перехода. Получен верный ответ с доказательством минимальности времени
10	Описан правильный алгоритм перехода. Получен верный ответ, но не доказано, что этот алгоритм минимален по времени
8	Описан правильный алгоритм перехода. Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из предыдущих условий

№4: (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+8) \cdot (x+16) = a \cdot x^2$ имеет ровно два различных решения.

Решение. Сгруппируем и раскроем скобки.

$$((x+1) \cdot (x+16)) \cdot ((x+2) \cdot (x+8)) = a \cdot x^2$$

$$(x^2 + 17x + 16) \cdot (x^2 + 10x + 16) = a \cdot x^2$$

Заметим, что $x=0$ не является решением данного уравнения (получается $16 \cdot 16 = 0$, что неверно). Следовательно, при делении на x^2 множество решений не изменится. Разделим на x^2 , получим:

$$(x + 17 + \frac{16}{x}) \cdot (x + 10 + \frac{16}{x}) = a. \text{ Сделаем замену: } t = (x + 10 + \frac{16}{x}). \text{ Получим}$$

уравнение $t \cdot (t + 7) = a$. Изучим, сколько решений (по x) имеет уравнение

$$t = x + 10 + \frac{16}{x} \text{ в зависимости от } t. \text{ Для этого домножим уравнение на } x$$

$$t \cdot x = x^2 + 10x + 16; \quad x^2 - (t - 10) \cdot x + 16 = 0. \text{ Вычислим дискриминант этого}$$

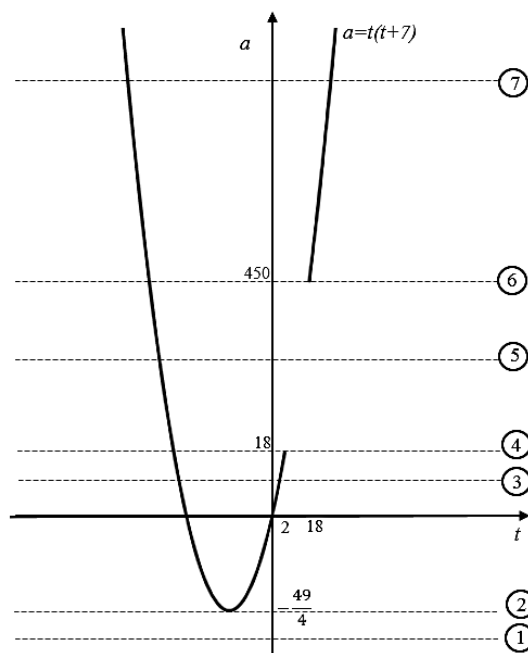
$$\text{уравнения: } D = (t - 10)^2 - 4 \cdot 16 = (t - 10 + 8)(t - 10 - 8) = (t - 2) \cdot (t - 18).$$

Вывод: при $t \in (-\infty; 2) \cup (18; +\infty)$ уравнение имеет два различных решения; при $t = 2$ и $t = 18$ уравнение имеет одно решение, а при $t \in (2; 18)$ уравнение решений не имеет. Следовательно, нам нужно изучить число решений уравнения $t \cdot (t + 7) = a$ на промежутке $t \in (-\infty; 2] \cup [18; +\infty)$ с учётом

полученной ранее информации. Построим график функции $a = t \cdot (t + 7)$ на

$$\text{промежутке } t \in (-\infty; 2] \cup [18; +\infty). \text{ Для этого вычислим: } t_B = -\frac{7}{2}; a_B = -\frac{49}{4};$$

$$a(2) = 2 \cdot (2 + 7) = 18; \quad a(18) = 18 \cdot (18 + 7) = 450.$$



Из графика видно, что при $a < -\frac{49}{4}$ уравнение решений не имеет;

При $a = -\frac{49}{4}$ уравнение имеет два решения, при $a \in (-\frac{49}{4}; 18)$ - 4 решения;
 при $a = 18$ - 3 решения, при $a \in (18; 450)$ 2 решения; при $a = 450$ - 3 решения,
 при $a > 450$ - 4 решения.

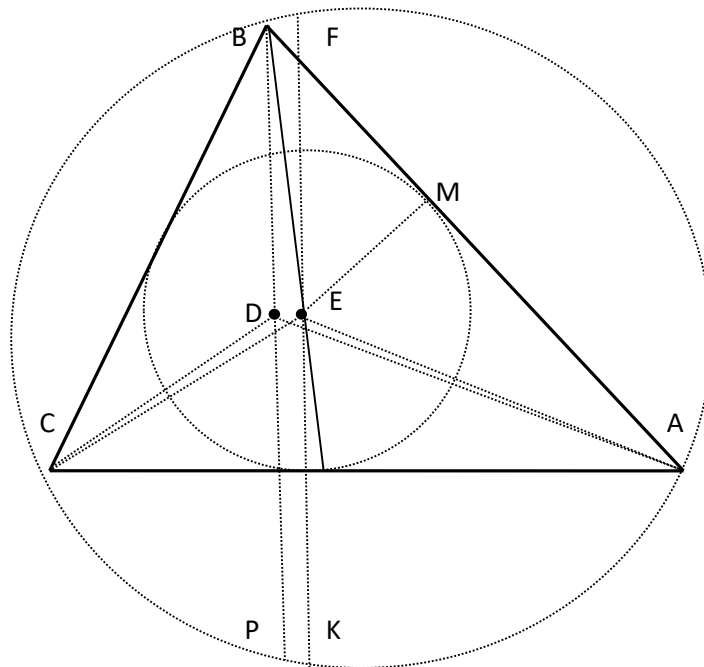
Ответ: $\{-\frac{49}{4}\} \cup (18; 450)$.

Критерии выставления оценок

Баллы	Критерии выставления
15	Верное решение. Обоснованно получен правильный ответ
12	При графическом способе: верно построен график квадратного трёхчлена с учётом ограничений на переменную замены (t), но получен неверный ответ. При решении через расположение корней квадратного уравнения относительно числа – верно составлены все условия (системы).
8	Верно определено, сколько решений по x даёт каждое значение переменной замены (t)
4	Верно выбран метод решения задачи. Сделана правильная замена
0	Решение не соответствует ни одному из предыдущих условий

№5: (20 баллов). Последовательность величин углов при вершинах A, B, C в остроугольном треугольнике ABC образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть D, E – точки пересечения его высот и биссектрис, соответственно. Последовательность величин углов при вершинах B, D, E в остроугольном треугольнике BDE образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите градусную величину угла C в треугольнике ABC .

Решение: A, B, C в остроугольном треугольнике ABC образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, следовательно, $\angle B = \frac{1}{3}(\angle A + \angle B + \angle C) = 60^\circ$. Проведем описанную и вписанную окружности треугольника ABC . $\angle A < 60^\circ < \angle C \Rightarrow$ хорда BP , содержащая высоту треугольника ABC , пройдет левее центров этих окружностей (ближе к C).



По свойствам треугольника: $\angle AEC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B = 120^\circ$, $\angle ADC = 180^\circ - \angle B = 120^\circ \Rightarrow$ проекции точек D, E точки P, K - принадлежат описанной около треугольника ABC окружности, а сами лежат на одной окружности с точками треугольника A, C . Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, тогда

$$\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE = 30^\circ - \frac{1}{2}\alpha, \quad \angle CED = \angle CAD = 90^\circ - \gamma, \quad \angle BEA = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma \Rightarrow$$

$$\angle BED = 360^\circ - \angle BEA - \angle AEC - \angle CED = 60^\circ + \frac{1}{2}\gamma, \quad \angle DBE = \angle DBA - \angle EBA = 60^\circ - \alpha.$$

В треугольнике EBD :

$$\angle BED + \angle DBE + \angle EDB = 180^\circ, \quad 60^\circ + \frac{1}{2}\gamma + 60^\circ - \alpha + \angle EDB = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\angle EDB = 60^\circ - \frac{1}{2}\gamma + \alpha = 60^\circ - \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) + \frac{3}{2}\alpha = \frac{3}{2}\alpha.$$

Углы B, D, E в треугольнике BDE образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, так как $\angle DBE = 60^\circ - \alpha$, $\angle BDE = \frac{3}{2}\alpha$, $\angle DEB = 120^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ и $\alpha < 60^\circ \Rightarrow \angle BDE < \angle DEB \Rightarrow \angle BDE = 60^\circ = \frac{3}{2}\alpha \Rightarrow \alpha = 40^\circ \Rightarrow \gamma = 80^\circ$.

Второй способ: $BE = EK = 2r = 2EM \Rightarrow \angle BKE = \angle EBK = \angle PBK = \frac{1}{2}\angle PBE = \frac{1}{2}(60^\circ - \alpha)$.

В треугольнике BDE : $\angle DBE = 60^\circ - \alpha < 60^\circ \Rightarrow$ самый маленький. Так как DP и DK – параллельные (перпендикулярные AC), то величины дуг DE, BF и PK – равны, следовательно, $DEKP$ и $BFKP$ – равнобедренные трапеции $\Rightarrow \angle PKE = \angle DEK = \angle BFK = \angle EDB$.

Из рисунка следует, что $\angle BDE = \angle PKF = \angle PKC + \angle CKB + \angle BKF = \angle PAC + \angle CAB + \angle DAE = \angle CAD + \angle CAB + \angle DAE = \alpha - 30^\circ + \alpha + 30^\circ - \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{2}\alpha$.

Углы B, D, E в треугольнике BDE образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, так как $\angle DBE = 60^\circ - \alpha$, $\angle BDE = \frac{3}{2}\alpha$, $\angle DEB = 120^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ и $\alpha < 60^\circ \Rightarrow \angle BDE < \angle DEB \Rightarrow \angle BDE = 60^\circ = \frac{3}{2}\alpha \Rightarrow \alpha = 40^\circ \Rightarrow \gamma = 80^\circ$.

Ответ: 80°

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
14	При верном и обоснованном ходе решения (доказано, что $\angle B = \frac{1}{3}(\angle A + \angle B + \angle C) = 60^\circ$ и точки C, D, E, A – принадлежат одной окружности, $\angle DBE = 60^\circ - \alpha < 60^\circ \Rightarrow$ самый маленький), но получен неверный ответ, или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6: (20 баллов). На конкурсе проектов участвовало 12 команд. Жюри, в состав которого входили председатель и еще M человек, оценивали эти проекты и присуждали им места с 1 по 12 по своему усмотрению, но каждый по следующему принципу. Сначала проекту присуждал место председатель, а затем каждый из членов жюри мог присудить такое место этому проекту в своем списке, которое отличается от мест других членов и председателя не более чем на три. Победителем признается проект, у которого наименьшая сумма мест, поставленная каждым из членов жюри, включая председателя. Если наименьшая сумма мест у двух или более участников, то победитель определяется особым порядком. Известно, что победитель набрал наибольшую из возможных сумм – 23, а особый порядок присуждения первого места не понадобился. Чему равно M ?

Решение: Рассмотрим группу проектов, которым хотя бы раз присуждали 1-е место. Очевидно, что в такой группе могло быть только 1, 2, 3 или 4 проекта. Действительно, если в группе более 4 проектов, то они, по условию, не должны опускаться ниже 4-го места, а таких мест даже на 5 команд уже не хватает.

Если все $N = M + 1$ первых мест достались одному проекту, то он набрал N баллов.

Если все N первых мест достались двум проектам, то наибольшее число баллов у первого места – это не более чем $(N \cdot 1 + N \cdot 4): 2 = 2,5N$ баллов, но тогда наступает особый порядок, если N – четное, следовательно, $[2,5N - 0,5]$ баллов, (где $[x]$ – целая часть x).

Если все N первых мест достались трем проектам, то наибольшее число баллов у первого места – это не более чем $(N \cdot 1 + N \cdot 3 + N \cdot 4): 3 = 2, (6)N$ баллов, но тогда, чтобы не наступал особый порядок $[2, (6)N - 0,5]$ баллов – это наибольшее из возможных.

Если все N первых мест достались четырем проектам, то наибольшее число баллов у первого места – это не более чем $(N \cdot 1 + N \cdot 2 + N \cdot 3 + N \cdot 4): 4 = 2,5N$ баллов, но тогда наступает особый порядок, если N – четное, следовательно, $[2,5N - 0,5]$ баллов, (где $[x]$ – целая часть x).

Очевидно, что максимум при $N = 9 \Rightarrow [2, (6) \cdot 9 - 0,5] = 23$.

Пример. 1-е место (1,1,1,1,3,4,4,4,4), 2-е место (4,4,4,3,1,3,3,1,1), 3-е место (3,3,3,4,4,1,1,3,3), 4-е место (2,2,2,2,2,5,5,5,5), 5-е место (5,5,5,5,5,2,2,2,2), 6-е место (6,6,6,6,6,6,6,6,6), 7-е место (7,7,7,7,7,7,7,7,7), 8-е место (8,8,8,8,8,8,8,8,8) 9-е место (9,9,9,9,9,9,9,9,9), 10-е место (10,10,10,10,10,10,10,10,10), 11-е место (11,11,11,11,11,11,11,11,11) и 12-е место (12,12,12,12,12,12,12,12,12).

Ответ: 8.

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
18	При верном и обоснованном ходе решения допущены логические ошибки или при верном ответе решение недостаточно обосновано или нет примера.
12	Разобраны не все варианты.
8	Доказано, что 1 место может быть присуждено не более чем 4 командам.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.