

Решение олимпиады по математике

9-й класс, 2024 год

Вариант №1

№1 (15 баллов). Решите неравенство: $\sqrt{3x+2} - \sqrt{2x^2+x-1} \geq 2x^2 - 2x - 3$.

Решение:

Пусть $u = \sqrt{3x+2}$, $v = \sqrt{2x^2+x-1}$,

тогда $u^2 = 3x+2$, $v^2 = 2x^2+x-1$ и $v^2 - u^2 = 2x^2 - 2x - 3$.

Неравенство примет вид: $u - v \geq v^2 - u^2 \Leftrightarrow (u - v)(1 + u + v) \geq 0$.

Возвращаясь к исходной переменной, будем иметь:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3x+2} - \sqrt{2x^2+x-1})(1 + \sqrt{3x+2} + \sqrt{2x^2+x-1}) \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \qquad \qquad \qquad > \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x^2+x-1} \geq 0 \\ & \sqrt{3x+2} \geq \sqrt{2x^2+x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 \geq 2x^2+x-1, \\ 2x^2+x-1 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2x-3 \leq 0, \\ 2x^2+x-1 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right], \\ x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]. \end{aligned}$$

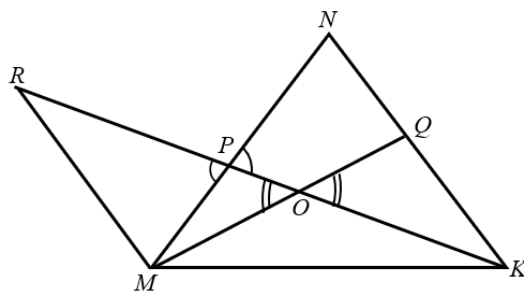
Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$.

Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ
10	Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано, например, не описан равносильный переход в неравенствах.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, например, установлена связь между подкоренными выражениями и правой частью неравенства, но дальнейшее решение неверно или отсутствует, или содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№2 (15 баллов) В треугольнике MNK на стороне MN взята точка P так, что $MP:PN = 2:3$, а на стороне NK отмечена точка Q так, что $NQ:QK = 4:5$. Прямые KP, MQ пересекаются в точке O . Найти площадь треугольника KOQ , если известно, что площадь треугольника MOP равна 48.

Решение:



Проведем прямую $MR \parallel KN$. Точку пересечения этой прямой с прямой KP обозначим R .

Пусть $NQ = 4x$, $QK = 5x$, тогда $NK = 9x$.

$$\triangle MRP \sim \triangle NKP \Rightarrow \frac{MR}{NK} = \frac{MP}{PN} = \frac{PR}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow MR = \frac{2}{3} \cdot 9x = 6x;$$

$$\frac{PR}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow PR = \frac{2}{5} KR.$$

$$\triangle MOR \sim \triangle QOK \Rightarrow \frac{MR}{QK} = \frac{OM}{OQ} = \frac{OR}{OK} = \frac{6}{5} \Rightarrow OK = \frac{5}{11} \cdot KR.$$

$$OP = KR - OK - PR = KR - \frac{5}{11} \cdot KR - \frac{2}{5} KR = \frac{8}{55} KR.$$

Тогда

$$\frac{S_{\triangle KOQ}}{S_{\triangle MOP}} = \frac{OK \cdot OQ}{OP \cdot OM} = \frac{5 \cdot 55 \cdot 5}{11 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{125}{48} \Rightarrow S_{\triangle KOQ} = \frac{125}{48} S_{\triangle MOP} = 125.$$

Ответ: 125 кв.ед.

Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ
10	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, например, верно найдено отношение $\frac{OM}{OQ}$ или $\frac{OK}{OP}$, но дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№3 (15 баллов). Туристической группе из четырёх человек (Риты, Виктора, Ангелины Павловны и Валерия Сергеевича) нужно преодолеть сложную переправу. По технике безопасности на переправе нужно обязательно находиться в каске. Но на всю группу имеются только две каски. Если переправу переходят два человека, то они двигаются со скоростью того, кто идёт медленнее. Известно, что Виктор преодолевает переправу за 3 минуты,

Рита – за 5 минут, Валерий Сергеевич за - 10 минут, а Ангелина Павловна – за 15 минут. За какое наименьшее время данная туристическая группа может преодолеть переправу при данных условиях. Алгоритм перехода опишите. Ответ обоснуйте.

Решение. Алгоритм следующий:

первый рейс – Рита и Виктор (5 минут),

обратно, например, Рита (5 минут), (но можно и Виктор)

второй рейс – Валерий Сергеевич и Ангелина Павловна (15 минут)

обратно – Виктор (3 минуты)

третий рейс – Рита и Виктор (5 минут).

Всего – 33 минуты.

Доказательство минимальности. Т.к. есть всего две каски, а путешественников 4, то за один рейс могут перейти переправу только двое туристов. Причём, если переход не последний, то один из них должен вернуться назад с обеими касками. Следовательно, нужно сделать три рейса в одну сторону и два рейса в обратную (всего 5 рейсов). Но если Валерий Сергеевич и Ангелина Павловна перебираются в разных рейсах, то в сумме они уже дают $10+15=25$ минут. Плюс должно быть ещё три рейса, но самый короткий рейс длится три минуты (Виктор), Следовательно общее время будет не меньше $25+9=34$ минут. Значит, Валерий Сергеевич и Ангелина Павловна должны перебираться одним рейсом. Если этот рейс первый или последний, то один из них должен вернуться и ещё раз пройти путь, а это ещё добавит минимум 10 минут, т.е. в сумме получится не меньше чем $15+10+10=35$ минут.

Значит, выбранный алгоритм является оптимальным.

Ответ: 33 минуты.

Критерии выставления оценок

Баллы	Критерии выставления
15	Описан правильный алгоритм перехода. Получен верный ответ с доказательством минимальности времени
10	Описан правильный алгоритм перехода. Получен верный ответ, но не доказано, что этот алгоритм минимален по времени
8	Описан правильный алгоритм перехода. Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из предыдущих условий

№4 (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение $(x+2) \cdot (x+4) \cdot (x+9) \cdot (x+18) = a \cdot x^2$ имеет ровно два различных решения.

Решение. Сгруппируем и раскроем скобки.

$$((x+2) \cdot (x+18)) \cdot ((x+4) \cdot (x+9)) = a \cdot x^2$$

$$(x^2 + 20x + 36) \cdot (x^2 + 13x + 36) = a \cdot x^2$$

Заметим, что $x=0$ не является решением данного уравнения (получается $36 \cdot 36 = 0$, что неверно). Следовательно, при делении на x^2 множество решений не изменится. Разделим на x^2 , получим:

$$(x + 20 + \frac{36}{x}) \cdot (x + 13 + \frac{36}{x}) = a. \text{ Сделаем замену: } t = (x + 13 + \frac{36}{x}). \text{ Получим}$$

уравнение $t \cdot (t+7) = a$. Изучим, сколько решений (по x) имеет уравнение

$t = x + 13 + \frac{36}{x}$ в зависимости от t . Для этого домножим уравнение на x

$t \cdot x = x^2 + 13x + 36$; $x^2 - (t-13) \cdot x + 36 = 0$. Вычислим дискриминант этого уравнения: $D = (t-13)^2 - 4 \cdot 36 = (t-13+12)(t-13-12) = (t-1) \cdot (t-25)$.

Вывод: при $t \in (-\infty; 1) \cup (25; +\infty)$ уравнение имеет два различных решения;

при $t = 1$ и $t = 25$ уравнение имеет одно решение, а при $t \in (1; 25)$ уравнение

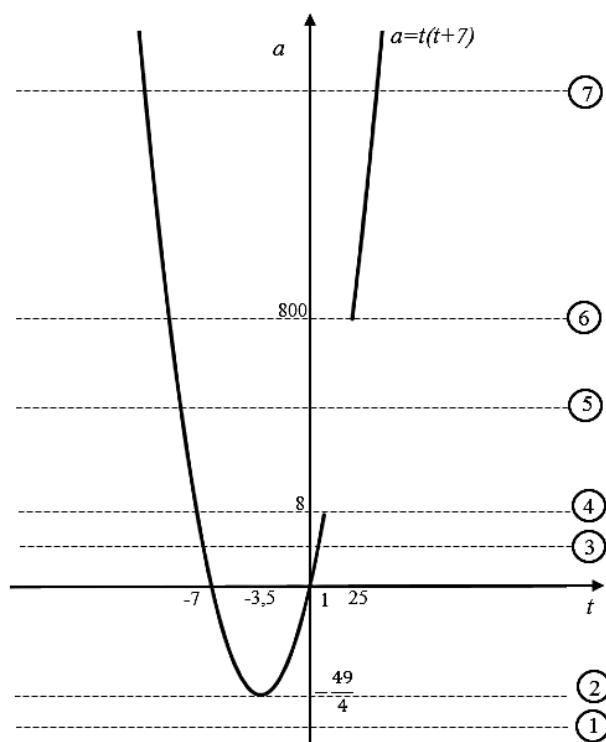
решений не имеет. Следовательно, нам нужно изучить число решений

уравнения $t \cdot (t+7) = a$ на промежутке $t \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$ с учётом

полученной ранее информации. Построим график функции $a = t \cdot (t+7)$ на

промежутке $t \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$. Для этого вычислим: $t_{\text{в}} = -\frac{7}{2}$; $a_{\text{в}} = -\frac{49}{4}$;

$a(1) = 1 \cdot (1+7) = 8$; $a(25) = 25 \cdot (25+7) = 800$.



Из графика видно, что при $a < -\frac{49}{4}$ уравнение решений не имеет;

При $a = -\frac{49}{4}$ уравнение имеет два решения, при $a \in (-\frac{49}{4}; 8)$ - 4 решения;
 при $a = 8$ - 3 решения, при $a \in (8; 800)$ 2 решения; при $a = 800$ - 3 решения,
 при $a > 800$ - 4 решения.

Ответ: $\{-\frac{49}{4}\} \cup (8; 800)$.

Критерии выставления оценок

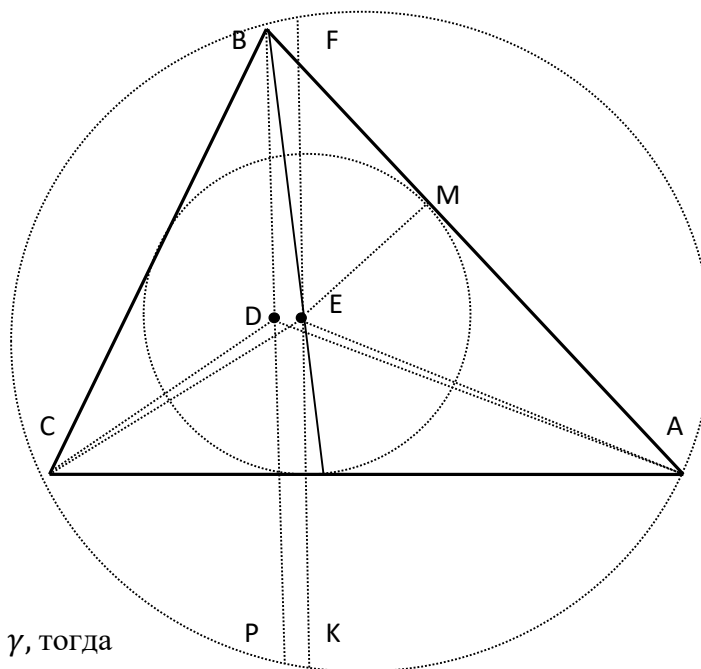
Баллы	Критерии выставления
15	Верное решение. Обоснованно получен правильный ответ
12	При графическом способе: верно построен график квадратного трёхчлена с учётом ограничений на переменную замены (t), но получен неверный ответ. При решении через расположение корней квадратного уравнения относительно числа – верно составлены все условия (системы).
8	Верно определено, сколько решений по x даёт каждое значение переменной замены (t)
4	Верно выбран метод решения задачи. Сделана правильная замена
0	Решение не соответствует ни одному из предыдущих условий

№5: (20 баллов). Последовательность величин углов при вершинах A, B, C в остроугольном треугольнике ABC образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть D, E – точки пересечения его высот и биссектрис, соответственно. Величины углов при вершинах в треугольнике BDE образует в некотором порядке возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите градусную величину угла A в треугольнике ABC .

Решения.

9.5.1 A, B, C в остроугольном треугольнике ABC образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, следовательно, $\angle B = \frac{1}{3}(\angle A + \angle B + \angle C) = 60^\circ$. Проведем описанную и вписанную окружности треугольника ABC . $\angle A < 60^\circ < \angle C \Rightarrow$ хорда BP , содержащая высоту треугольника ABC , пройдет левее центров этих окружностей (ближе к C).

По свойствам треугольника: $\angle AEC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B = 120^\circ$, $\angle ADC = 180^\circ - \angle B = 120^\circ \Rightarrow$ проекции точек D, E точки P, K - принадлежат описанной около треугольника ABC окружности, а сами лежат на одной окружности с точками треугольнике A, C .



Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, тогда

$$\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE = 30^\circ - \frac{1}{2}\alpha, \angle CED = \angle CAD = 90^\circ - \gamma, \angle BEA = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma \Rightarrow$$

$$\angle BED = 360^\circ - \angle BEA - \angle AEC - \angle CED = 60^\circ + \frac{1}{2}\gamma, \angle DBE = \angle DBA - \angle EBA = 60^\circ - \alpha.$$

$$\text{В треугольнике } EBD: \angle BED + \angle DBE + \angle EDB = 180^\circ, 60^\circ + \frac{1}{2}\gamma + 60^\circ - \alpha + \angle EDB = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\angle EDB = 60^\circ - \frac{1}{2}\gamma + \alpha = 60^\circ - \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) + \frac{3}{2}\alpha = \frac{3}{2}\alpha.$$

Углы B, D, E в треугольнике BDE образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, так как $\angle DBE = 60^\circ - \alpha$, $\angle BDE = \frac{3}{2}\alpha$, $\angle DEB = 120^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ и $\alpha < 60^\circ \Rightarrow \angle BDE < \angle DEB \Rightarrow \angle BDE = 60^\circ = \frac{3}{2}\alpha \Rightarrow \alpha = 40^\circ$.

Второй способ: $BE = EK = 2r = 2EM \Rightarrow \angle BKE = \angle EBK = \angle PBK = \frac{1}{2}\angle PBE = \frac{1}{2}(60^\circ - \alpha)$.

В треугольнике BDE : $\angle DBE = 60^\circ - \alpha < 60^\circ \Rightarrow$ самый маленький. Так как DP и DK – параллельные (перпендикулярные AC), то величины дуг DE, BF и PK – равны, следовательно, $DEKP$ и $BFKP$ – равнобедренные трапеции $\Rightarrow \angle PKE = \angle DEK = \angle BFK = \angle EDB$.

Из рисунка следует, что $\angle BDE = \angle PKF = \angle PKC + \angle CKB + \angle BKF = \angle PAC + \angle CAB + \angle DAE = \angle CAD + \angle CAB + \angle DAE = \alpha - 30^\circ + \alpha + 30^\circ - \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{2}\alpha$.

Углы B, D, E в треугольнике BDE образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, так как $\angle DBE = 60^\circ - \alpha$, $\angle BDE = \frac{3}{2}\alpha$, $\angle DEB = 120^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ и $\alpha < 60^\circ \Rightarrow \angle BDE < \angle DEB \Rightarrow \angle BDE = 60^\circ = \frac{3}{2}\alpha \Rightarrow \alpha = 40^\circ$.

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
14	При верном и обоснованном ходе решения (доказано, что $\angle B = \frac{1}{3}(\angle A + \angle B + \angle C) = 60^\circ$ и точки C, D, E, A – принадлежат одной окружности, $\angle DBE = 60^\circ - \alpha < 60^\circ \Rightarrow$ самый маленький), но получен неверный ответ, или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6: (20 баллов). На конкурсе проектов участвовало 10 команд. Жюри, в состав которого входили председатель и еще 7 человек, оценивали эти проекты и присуждали им места с 1 по 10 по своему усмотрению каждый по следующему принципу. Сначала проекту присуждал место председатель, а затем каждый из членов жюри мог присудить такое место этому проекту в своем списке, которое отличается от мест других членов и председателя не более, чем на три. Победителем признается проект, у которого наименьшая сумма мест, поставленная каждым из восьми членов жюри, включая председателя. Если наименьшая сумма мест у двух или более участников, то победитель определяется особым порядком. Известно, что победитель набрал наибольшую из возможных сумм, а особый порядок присуждения первого места не понадобился. Какая сумма мест была у победителя?

Решение. Рассмотрим группу проектов, которым хотя бы раз присуждали 1-е место. Очевидно, что в такой группе могло быть только 1, 2, 3 или 4 проекта. Действительно, если в группе более 4 проектов, то они, по условию, не должны опускаться ниже 4-го места, а таких мест даже на 5 команд уже не хватает.

Если все восемь первых мест достались одному проекту, то он набрал 8 баллов.

Если все восемь первых мест достались двум проектам, то наибольшее число баллов у первого места – это не более чем $(8 \cdot 1 + 8 \cdot 4) : 2 = 20$ баллов, но тогда наступает особый порядок (т.к. 20 и 20 баллов), следовательно, 19 баллов.

Если все восемь первых мест достались трем проектам, то наибольшее число баллов у первого места – это не более чем $[(8 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4) : 3] = 21$ баллов, но тогда наступает особый порядок (т.к. 21, 21 и 22 баллов), следовательно, 20 баллов – это наибольшее из возможных (20, 21 и 23 баллов, где $[x]$ – целая часть x).

Если все восемь первых мест достались четырем проектам, то наибольшее число баллов у первого места – это не более чем $(8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4) : 4 = 20$ баллов, но тогда наступает особый порядок (т.к. 20, 20, 20 и 20 балла), следовательно, 19 баллов (19, 20, 20 и 21 баллов).

Пример. 1-е место (1,1,1,3,3,3,4,4), 2-е место (4,4,4,1,1,1,3,3), 3-е место (3,3,3,4,4,1,1), 4-е место (2,2,2,2,2,5,5,5), 5-е место (2,2,2,5,5,5,5,5), 6-е место (6,6,6,6,6,6,6,6), 7-е место (7,7,7,7,7,7,7,7), 8-е место (8,8,8,8,8,8,8,8) 9-е место (9,9,9,9,9,9,9,9) и 10-е место (10,10,10,10,10,10,10,10).

Ответ: 20.

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
18	При верном и обоснованном ходе решения допущены логические ошибки или при верном ответе решение недостаточно обосновано или нет примера.
12	Доказано, что максимальное число баллов не более 20.
8	Доказано, что 1 место может быть присуждено не более чем 4 командам.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.