Олимпиада: 5 февраля

Вариант: 2 Класс: 8

Задача 1 (*15 баллов*). Акционеры, имеющие разные количества акций в активе, имеют, соответственно, разные права при обсуждении. Четверо акционеров делят 10 акций. Сначала обладатель наибольшего числа акций предлагает свой вариант раздела. Если более половины всех участников не согласны с представленным вариантом, то акционер, внесший предложение, выбывает из дальнейшего дележа и никаких акций не получает. Далее, тот из оставшихся, кто имеет наибольшее число акций, предлагает свой вариант раздела. Если его предложение отвергнут, то дележ акций продолжается для двух акционеров. Цель каждого - получить как можно больше акций. Как в итоге будут распределены акции? (Решение задачи предполагает разбор всех вариантов и обоснования).

Решение.

Если двое (10,0).Если трое 1)(10,0,0)-первый лишится всего;2) (9,1,0)-второй может отказаться и тогда (10,0);3)(9,0,1)-третий отказываться не будет, т.к. иначе не получит ничего. Если четверо:1)(10,0,0,0)-первые лишится всего;2)(9,1,0,0)-второй откажется и будет (9,0,1);3)(9,0,1,0)-третий не откажется, иначе получит 0;4)(9,0,0,1)-четвертый может и отказаться, т.к. для него ничего не изменится, значит , первого такой расклад не устроит.

Ответ: (9,0,1,0).

Баллы	Критерии
15	Верное обоснованное решение
10	Верный ответ с недостатками обоснования.
5	Верный ответ, но рассмотрены не все случаи

Задача 2 (*15 баллов*). Решите уравнение. $16-4|3-x|^2-(x-3)^2\left(4-(x-3)^2\right)=\left(x^2-6x+9\right)^2$

Решение.

Замена $|3-x|^2=t$.

$$16-4t-t(4-t)=t^2;(4-t)(4-t)=t^2;4-t=t\vee 4-t=-t;t=2;|x-3|=\sqrt{2};\ x=3\pm\sqrt{2}$$

Ответ: $x=3\pm\sqrt{2}$.

Баллы	Критерии
15	Решение верно.
10	Верный ход решения, но допущена одна арифметическая ошибка.
5	Сделана замена переменной, решено уранение, но есть ошибки в применении формул или раскрытии модуля.

Задача 3 (*15 баллов*). В остроугольном $\triangle ABC$ точка H - точка пересечения высот, точка О – центр вписанной окружности. Угол AOB в k раз больше угла AHB. Найти величину угла ACB. Какие значения может принимать коэффициент k?

Решение.

Обозначим $\angle ACB=\alpha$

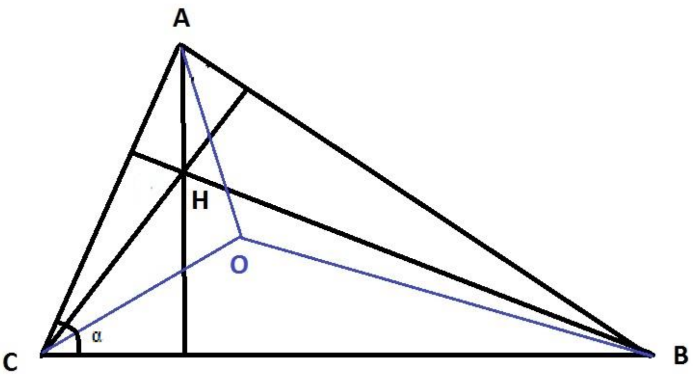
$$\angle AOB=180-\frac{180-\alpha}{2}=90+\frac{\alpha}{2}$$

$$\angle AHB=180-\alpha$$

$$k\cdot(180-\alpha)=90+\frac{\alpha}{2}$$

$$180\cdot k-90=k\cdot\alpha+\frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{180\cdot(k-1/2)}{k+1/2}, k>1/2$$



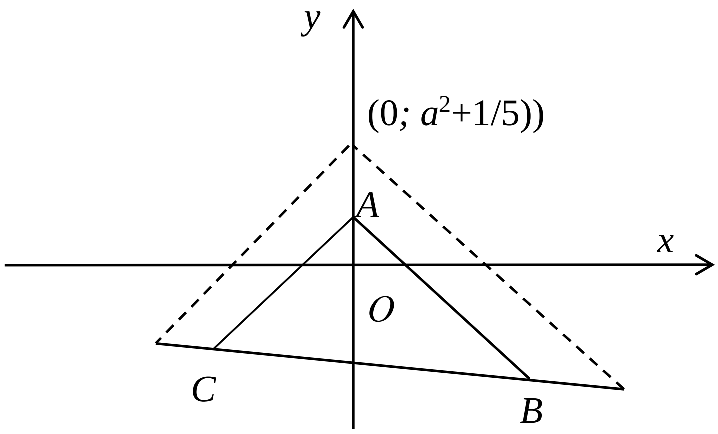
Ответ: $\angle ACB = \dfrac{180\cdot(k-1/2)}{k+1/2}, k>1/2$

Баллы	Критерии
15	Решение верно.
13	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
5	За правильно найденное значение каждого из углов: $\angle AOB$ или $\angle AHB$.
0	Решение не верно или отсутствует

Задача 4 (*15 баллов*). При каких значениях параметра *a* фигура, ограниченная графиками $y = a^2 + \dfrac{1}{5} - |x|$ и $5y + x = -9$ имеет наименьшую площадь? Найдите эту наименьшую площадь.

Решение.

Изобразим на плоскости xOy графики, для $y = a^2 + \dfrac{1}{5} - |x|$ получаем при $x>0,\ y = a^2+\dfrac{1}{5}-x$, при $x<0,\ y = a^2+\dfrac{1}{5}+x$, при $x=0,\ y=a^2+\dfrac{1}{5}$. График показан на рисунке пунктиром. Самое нижнее положение точки пересечения с осью Оу будет при $a=0$, это точка $A\left(0;\dfrac{1}{5}\right)$. Графиком $5y+x=-9$ будет прямая ВС. На прямой ВС при $x=0,\ y=-\dfrac{9}{5}$, эта точка ниже $A\left(0;\dfrac{1}{5}\right)$, поэтому при любом значении параметра графики ограничивают треугольник. Наименьшее



значение площади будет при $a=0$, это площадь треугольника ABC с вершинами $A\left(0;\frac{1}{5}\right)$, $B\left(\frac{5}{2};-\frac{23}{10}\right)$, $C\left(-\frac{5}{3};-\frac{22}{15}\right)$.

Надо найти площадь прямоугольного треугольника ABC. Находим катеты $AB=\frac{5}{2}\sqrt{(-1)^2+1^2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}, AC=\frac{5}{3}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\frac{5}{3}\sqrt{2}$, площадь равна $\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{25}{6}$.

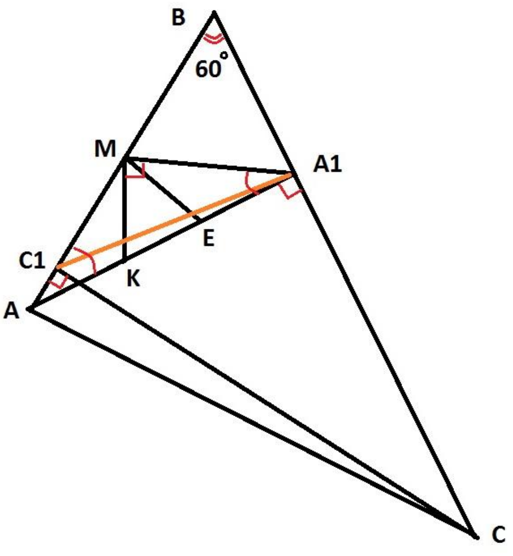
Ответ: $a=0$, площадь $\frac{25}{6}$.

Баллы	Критерии
15	Полное обоснованное решение
12	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.
10	При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи
5	Верно «раскрыт» модуль или другое верное начало решения
0	Неверные рассуждения или записан только ответ.

Задача 5 (*20 баллов*). В $\triangle ABC$, AA_1 *и* CC_1 - высоты. Точка M - середина стороны AB. Точка $K\in AA_1$ и делит ее в отношении 1:2, считая от точки A.

Найти длину стороны A_1C_1, если длина отрезка $AC=14$ *и* $\angle A_1MK=90^0$.

Решение.



1) $\triangle KMA_1$ прямоугольный.

Пусть E – середина

$$KA_1\Rightarrow ME=\frac{1}{2}KA_1=EK=EA_1$$

2) $\triangle AA_1B$ - прямоугольный.

M – середина AB (по условию)

$$\Rightarrow AM=MA_1\Rightarrow\triangle AMK=\triangle MA_1E$$

$$\Rightarrow MK=ME\Rightarrow MK=\frac{1}{2}KA_1\Rightarrow$$

$$\angle MA_1A=30^0\Rightarrow\angle MAA_1=30^0\Rightarrow$$

$$\text{из }\triangle AA_1B\quad\angle ABA_1=60^0$$

3) $\triangle AA_1B\sim\triangle CC_1B$ (по двум углам) $\Rightarrow\frac{BC_1}{BC}=\frac{BA_1}{BA}\Rightarrow\triangle A_1BC_1\sim\triangle ABC$

(по двум сторонам и углу между ними), где $k=\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{BC_1}{BC}=\cos\angle ABC=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow A_1C_1=\frac{1}{2}AC=7$$

Ответ: 7

Баллы	Критерии
20	Решение верно.
15	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
10	Найден угол A или угол B или доказано подобие треугольников.
5	Верно выполнен один из пунктов решения, в том числе использовано свойство медианы прямоугольного треугольника.
0	Решение не верно или отсутствует

Задача 6 (*20 баллов*). Малое предприятие производит комплекты пластиковых деталей и датчиков для измерительных приборов. В затраты на один комплект входит стоимость материалов, ежедневно закупаемых у фирмы-поставщика. Первого числа некоторого месяца эта стоимость составляла 2 тысячи рублей. В связи с сезонным снижением цен стоимость материалов уменьшается каждый день в течение месяца на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим днем. Так, шестого числа стоимость материалов будет 1,75 тысяч рублей. Стоимость одного комплекта равна стоимости материалов в данный день, умноженной на коэффициент k, (с помощью которого учитываются расходы на оплату труда работников, а также затраты на упаковку, этикетки, цены на которые зависят от валютного курса). В течение месяца можно считать, что k(t)=1+0,08t, где t – номер дня. Партия состоит из 40 комплектов, стоимость партии рассчитывается по ценам текущего дня. При оформлении заказа стоимость партии увеличивается на 25 %.

Для информирования заказчиков необходимо ответить на вопрос: в какой из 30 дней месяца стоимость партии будет наибольшей с учетом оформления заказа и чему она равна?

Решение.

Стоимость материалов уменьшается каждый день в течение месяца на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим днем, поэтому стоимость материалов $S(t)=at+b$, где t – номер дня, $S(1)=2=a+b$, $S(6)=1{,}75=6a+b$. Получим $S(t)=-\frac{1}{20}t+\frac{41}{20}=\frac{1}{20}\cdot(41-t)$. Стоимость одного комплекта равна $S(t)\cdot k(t)=\frac{1}{20}\cdot(41-t)\cdot\left(1+\frac{2}{25}t\right)$, где $t=1,2,\ldots,30.$

Стоимость партии из 40 комплектов после оформления заказа $f(t)=40\cdot1{,}25\cdot S(t)\cdot k(t)=40\cdot1{,}25\cdot\frac{1}{20}\cdot(41-t)\cdot(25+2t)\cdot\frac{1}{25}$.

Абсцисса вершины $\frac{1}{2}\cdot\left(41-\frac{25}{2}\right)=\frac{57}{4}=14\frac{1}{4}$. Наибольшее значение стоимости партии из 40 комплектов после оформления заказа равно $f(14)==40\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{20}\cdot(41-14)\cdot(25+28)\frac{1}{25}=\frac{27\cdot53}{10}=143{,}1$ тысячи рублей.

Ответ: 14 день, 143,1 тысячи рублей.

Баллы	Критерии
20	Полное обоснованное решение
18	Допущена арифметическая ошибка на последнем этапе при верном ходе рассуждений
15	Верно найден номер дня, в который стоимость заказа наибольшая.
10	Верно составлено выражение для стоимости заказа.
5	Верно составлено выражение для стоимости материалов.
0	Неверные рассуждения или записан только ответ.