

## Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)

1. Буквы в симметричном слове АРБУЗУЗУБРА случайно переставили так, что полученное слово отличается от исходного. С какой вероятностью это слово снова будет симметричным? Ответ запишите в виде несократимой дроби. (12 баллов)

*Решение.* Число перестановок 11 букв (из них три У и по две А, Р, Б, З) составляет

$$N = \frac{11!}{3!(2!)^4} = \frac{11!}{96}$$

Чтобы получить симметричную перестановку, надо поставить У в середину и на 5 местах слева от неё расставить по одной букве А, Р, Б, У, З. Это можно сделать  $M = 5!$  способами, после чего остальные 5 букв расставятся однозначно. Получаем вероятность

$$P = \frac{M-1}{N-1} = \frac{5!-1}{11!/96-1} = \frac{119}{415799}.$$

**Ответ:**  $\frac{119}{415799}$ .

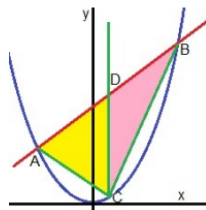
2. На параболе  $y = x^2$  даны две точки: А с абсциссой  $-3$  и В с абсциссой  $5$ . Точка С лежит на дуге АВ. Найдите максимальную возможную площадь треугольника АВС. (16 баллов)

*Решение.* Разрежем треугольник вертикальным отрезком CD, тогда

$$S(ABC) = S(ACD) + S(BCD) = \frac{(x_C - x_A)CD}{2} + \frac{(x_B - x_C)CD}{2} = \frac{x_B - x_A}{2} \cdot CD = 4 \cdot CD.$$

Пусть  $y = kx + b$  — уравнение прямой АВ. Тогда  $CD = kx + b - x^2$ . Этот трехчлен достигает максимум посередине между корнями, которые, очевидно, равны  $x_A$  и  $x_B$ . Значит, максимальная длина отрезка CD получится, если взять  $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = 1$ , и тогда  $CD = 16$ .

Ответ: 64.



3. В треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 5$ ,  $BC = 8$ ,  $AC = 7$  вписана окружность с центром в точке  $O$ , которая касается сторон  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. На прямой  $MN$  отмечена точка  $K$  так, что угол  $OAK$  равен  $60^\circ$ . Найдите длину отрезка  $KN$ . (16 баллов)

**Решение.** Проведем прямую  $AD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $D$  - точка пересечения с прямой  $MN$ . Треугольники  $CMN$  и  $AMD$  - подобные равнобедренные треугольники. Если  $AK_1$  - биссектриса треугольника  $MAD$ , то

$$\angle OAK_1 = \frac{\angle BAC + \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}.$$

По теореме косинусов найдем угол  $\angle ABC = \beta$ :

$$\cos \beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}, \quad \beta = 60^\circ. \text{ Тогда}$$

$$\angle OAK_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 60^\circ, \text{ и } K_1 = K.$$

Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \beta = 10\sqrt{3}, \quad S_{ABC} = \frac{P_{ABC} r}{2} = \frac{(AB + BC + AC)r}{2} = 10r, \quad r = \sqrt{3}. \text{ Тогда}$$

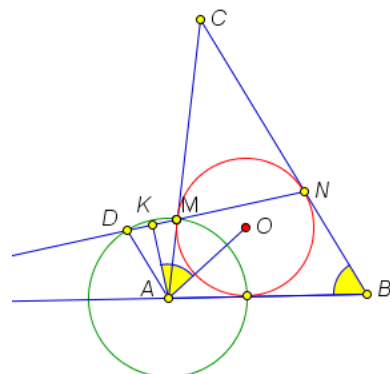
$$BN = r / \tan 30^\circ = 3, \quad CN = 5, \quad AM = 2.$$

По теореме косинусов найдем угол  $\angle ACB = \gamma$ :  $\cos \gamma = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{49 + 64 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{11}{14}.$

$$\text{Тогда } MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2CM \cdot CN \cos \gamma = 50 - \frac{50 \cdot 11}{14} = \frac{75}{7}, \quad MN = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

$$\frac{DM}{MN} = \frac{AM}{CM} = \frac{2}{5}, \quad KM = \frac{DM}{2} = \frac{MN}{5}, \quad KN = \frac{6MN}{5} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7}.$$

**Ответ:**  $\frac{6\sqrt{21}}{7}.$



4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство

$$2\sqrt{x^2 + 324} - f(x) \geq \frac{x^2 + 324}{f(x) - a} - a \quad \text{имеет} \quad \text{единственное} \quad \text{решение,} \quad \text{если}$$

$$f(x) = \sqrt{g^2(x) - 400}, \quad g(x) = 19 + 2\cos 2x + 4\cos x. \quad (16 \text{ баллов})$$

**Решение:**

$$2\sqrt{x^2 + 324} - f(x) \geq \frac{x^2 + 324}{f(x) - a} - a \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 324} - f(x) - \frac{x^2 + 324}{f(x) - a} + a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - a - 2\sqrt{x^2 + 324} + \frac{x^2 + 324}{f(x) - a} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(f(x) - a)^2 - 2(f(x) - a)\sqrt{x^2 + 324} + x^2 + 324}{f(x) - a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(f(x) - a - \sqrt{x^2 + 324})^2}{f(x) - a} \leq 0.$$

В левой части неравенства стоит четная функция. Если неравенство имеет единственное решение, то это решение  $x = 0$ . Найдем все значения параметра  $a$ , при которых  $x = 0$  является решением. Поскольку  $f(0) = 15$ , то, подставляя  $x = 0$  в полученное неравенство,

получаем  $\frac{(a + 3)^2}{15 - a} \leq 0$ . Решениями этого неравенства являются  $a \in \{-3\} \cup (15; +\infty)$ .

1) Пусть  $a > 15$ . Найдем множество значений функции  $f(x) = \sqrt{g^2(x) - 400}$ , где  $g(x) = 19 + 2\cos 2x + 4\cos x$ . Определим сначала множество значений функции  $z = g(x) = 19 + 2\cos 2x + 4\cos x$ . Функция  $g(x)$  определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть  $t = \cos x$ . Тогда  $z = 17 + 4t^2 + 4t = 16 + (2t + 1)^2$  при  $t \in [-1; 1]$ , и  $E_g = [16; 25]$ . Функция  $y = f(x) = \sqrt{g^2(x) - 400}$  имеет то же множество значений, что и функция  $y = \sqrt{z^2 - 400}$  при  $z \in [20; 25]$ , поскольку функция  $y = \sqrt{z^2 - 400}$  определена при  $z \in (-\infty; -20] \cup [20; +\infty)$ , а  $z = g(x)$  принимает все значения из отрезка  $[16; 25]$ . Минимальное значение функции  $y = \sqrt{z^2 - 400}$  на отрезке  $[20; 25]$  равно 0, максимальное – равно 15. Следовательно,  $E_f = [0; 15]$ . Тогда при  $a > 15$  неравенство

$$\frac{(f(x) - a - \sqrt{x^2 + 324})^2}{f(x) - a} \leq 0 \text{ верно для всех } x \text{ из области определения функции } f(x), \text{ т.е.}$$

имеет бесконечно много решений (это все  $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$ .)

2) 1) Пусть  $a = -3$ . Тогда имеем  $\frac{(f(x) + 3 - \sqrt{x^2 + 324})^2}{f(x) + 3} \leq 0$ . Поскольку  $E_f = [0; 15]$ , и

$$f(x) + 3 > 0, \text{ то приходим к уравнению } f(x) + 3 - \sqrt{x^2 + 324} = 0, \text{ или}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 324} - 3. \text{ Из неравенств } f(x) \leq 15, \sqrt{x^2 + 324} - 3 \geq 15, \text{ приходим к системе}$$

$$\begin{cases} f(x) = 15, \\ \sqrt{x^2 + 324} - 3 = 15, \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \text{ Таким образом, при } a = -3 \text{ неравенство имеет единственное}$$

решение.

**Ответ:**  $a = -3$ .

5. Основанием четырехугольной пирамиды  $SABCD$  является параллелограмм  $ABCD$  со сторонами  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $AD = 4\sqrt{3}$  и углом  $A$ , равным  $60^\circ$ . Высотой пирамиды  $SABCD$  является отрезок  $SO$ , где  $O$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ ,  $SO = 1$ . Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью, параллельной медиане  $SE$  боковой грани  $SAB$  и проходящей через середину ребра  $SC$  и середину отрезка  $AO$ . (20 баллов)

### Решение.

Построим сечение пирамиды.

Пусть  $M$  – середина  $SC$ , а  $G$  – середина  $AO$ . В плоскости  $SEC$  ( $SE$  – медиана грани  $SAB$ ) через точку  $M$  проведем прямую  $MF$ , параллельную  $SE$ ,  $F \in EC$ ,  $MF$  – средняя линия треугольника  $SEC$ .

В плоскости  $ABC$  через точки  $G$  и  $F$  проведем прямую  $KL$ ,  $K \in AD$ ,  $L \in BC$ .

Пусть  $H$  – точка пересечения прямых  $KL$  и  $CD$ . В плоскости  $SDC$  через точки  $H$  и  $M$  проведем прямую  $MH$ ,  $N$  – точка пересечения прямых  $MH$  и  $SD$ .

Искомое сечение  $KLMN$ .

Обозначим  $AB = a$ ,  $AD = 2a$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

Пусть  $P$  – точка пересечения прямых  $KL$  и  $AB$ . Треугольники  $FEP$  и  $FCH$  равны,  $PE = CH$ .  
 $\triangle GAP \sim \triangle GCH$ ,

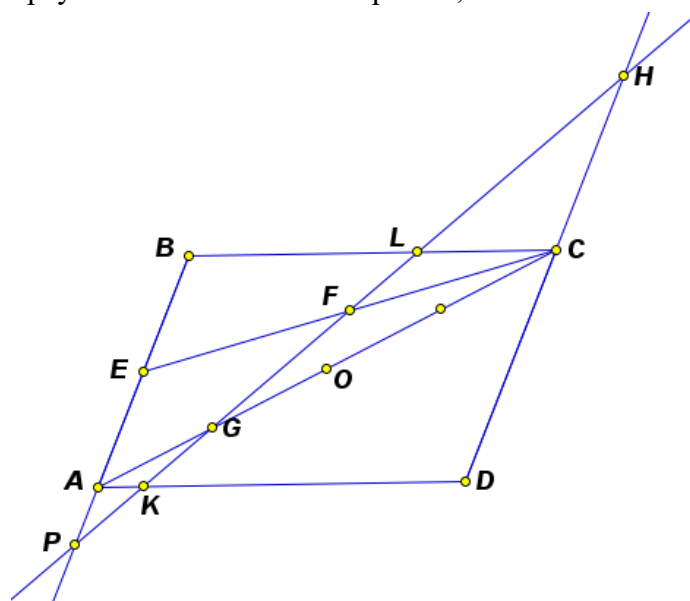
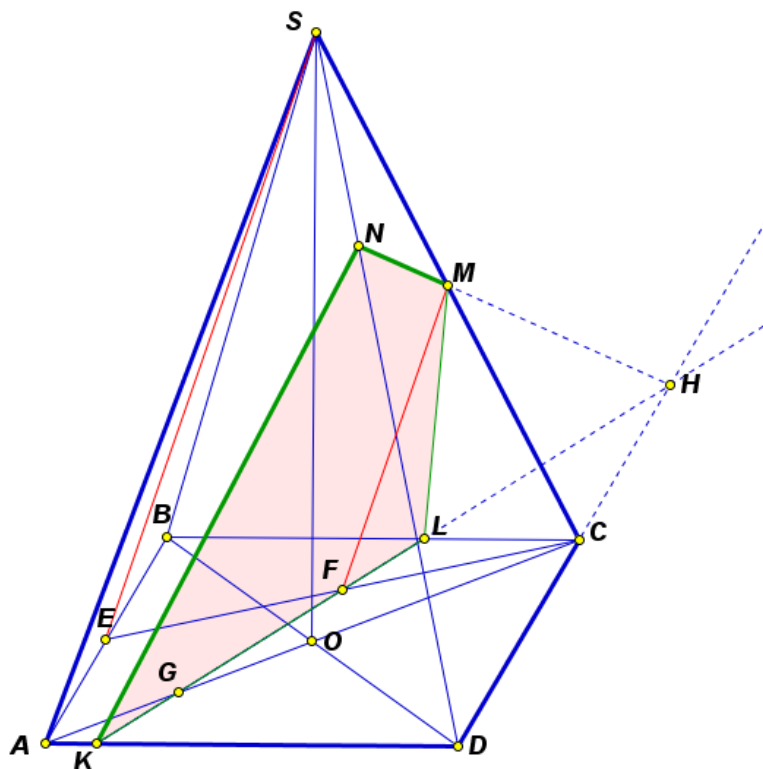
$$\frac{AP}{CH} = \frac{1}{3}, \quad AP = \frac{CH}{3}, \quad CH = \frac{a}{2} + \frac{CH}{3},$$

$$CH = \frac{3a}{4}, \quad AP = \frac{a}{4}.$$

$$\triangle AKP \sim \triangle BLP, \quad \frac{AK}{BL} = \frac{1}{5}, \quad AK = x, \quad BL = 5x.$$

$$\triangle CLH \sim \triangle DKH,$$

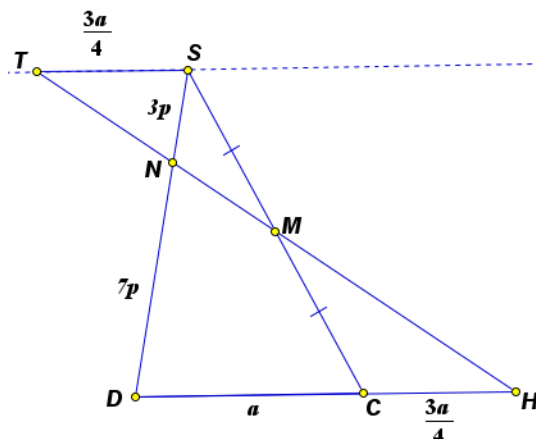
$$\frac{CL}{DK} = \frac{3}{7}, \quad CL = 3y, \quad DK = 7y.$$



$$\begin{cases} x+7y=2a, \\ 5x+3y=2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7y=2a, \\ 5x+3y=2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a/4, \\ x=a/4. \end{cases} \quad AK = a/4, \quad BL = 5a/4, \quad CL = 3a/4, \quad DK = 7a/4.$$

$$CL = 3a/4, \quad DK = 7a/4.$$

В плоскости грани  $SCD$  проведем прямую  $TS$  параллельно  $DC$ , точка  $T$  – точка пересечения этой прямой с прямой  $MH$ . Треугольники  $MCH$  и  $MST$  равны,  $TS = CH$ .  $\triangle TSN \sim \triangle HDN$ ,  $\frac{SN}{ND} = \frac{3}{7}$ .

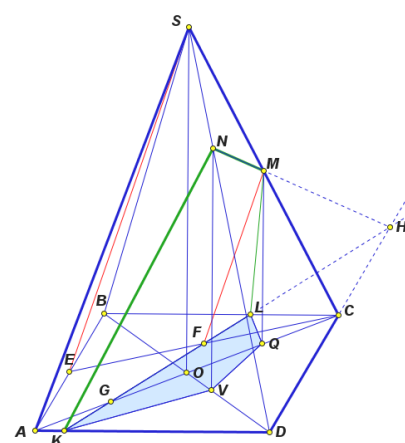


Площадь сечения  $KLMN$  будем вычислять по

формуле  $S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi}$ , где  $S_{np}$  – площадь проекции

сечения на плоскость основания,  $\varphi$  – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.

Проекцией является четырехугольник  $KLQV$ . Пусть  $h$  – длина высоты параллелограмма  $ABCD$ , проведенной к стороне  $AD$ , площадь  $S = AB \cdot AD \sin \alpha = 2a^2 \sin \alpha = 2ah$  – площадь параллелограмма  $ABCD$ .  $S = 12\sqrt{3}$



Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

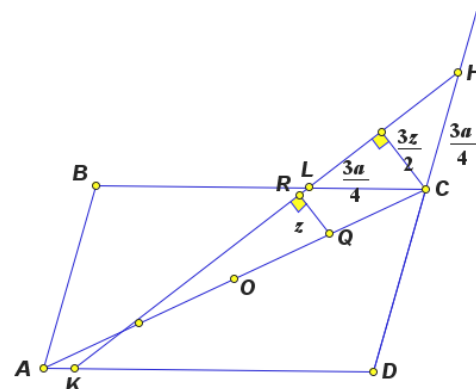
$$\begin{aligned} S_{np} &= S_{KLCD} - S_{CLQ} - S_{CQVD} - S_{DKV} = \\ &= \frac{5ah}{4} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{4} - \left( \frac{S}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{S}{4} \right) - \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{S}{4} = \\ &= \frac{S}{4} \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{16} - \frac{17}{20} - \frac{49}{80} \right) = \frac{S}{4} \cdot \frac{200 - 15 - 68 - 49}{80} = \frac{17S}{80} = \frac{51\sqrt{3}}{20}. \end{aligned}$$

В плоскости основания из точки  $Q$  проведем перпендикуляр  $QR$  к прямой  $KL$ , пусть  $QR = z$ . Тогда перпендикуляр, проведенный из точки  $C$  к прямой  $KL$ , будет равен  $3z/2$ . Угол  $MRQ$  равен  $\varphi$  – углу между плоскостью сечения и плоскостью основания. Треугольник  $LCH$  равнобедренный,  $LC = CH = \frac{3a}{4}$ . Угол  $LCH$  равен  $120^\circ$ , угол  $CLH$  равен  $30^\circ$ , и

$$3z/2 = 3a/8, \quad z = a/4. \text{ Если } SO = H, \text{ то } MQ = H/2,$$

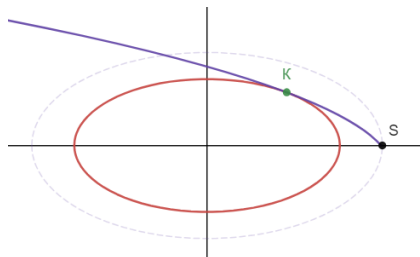
$$\operatorname{tg} \varphi = 2H/a = 1/\sqrt{3}, \quad \varphi = 30^\circ, \quad \cos \varphi = \sqrt{3}/2.$$

$$\text{Окончательно имеем } S_{сеч} = \frac{51\sqrt{3}}{20} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{51}{10}. \quad \text{Ответ: } \frac{51}{10}.$$



6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопилось по данным NASA около 300 тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства в ближайшем будущем может быть существенно осложнено всё возрастающей угрозой столкновения с космическим мусором. Согласно результатам исследований, удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.

Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью равной 5000 км, малой – 2500 км. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Введем систему координат с началом отсчета в центре рассматриваемого эллипса, с осью абсцисс, направленной вдоль большой полуоси. Тогда уравнение траектории движения обломка запишется следующим образом:  $x^2 + 4y^2 = 25$ .



На некотором удалении по оси абсцисс находится межпланетная научная станция S. С нее стартует летательный аппарат-захватчик, который движется по параболической траектории:  $(y+1)^2 = -9 \cdot (x-7) / 4$ . Он должен совершить маневр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку для изменения его скорости и направления движения.

Определите координаты точки касания указанных траекторий и угол, который образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к параболической траектории в начальный момент времени в точке S. (20 баллов)

**Решение:** Выразим из уравнений  $x^2 + 4y^2 = 25$ ,  $(y+1)^2 = -9 \cdot (x-7) / 4$  функции  $y(x)$  в явном виде

$$y = \pm \sqrt{\frac{25-x^2}{4}} \quad \text{и} \quad y = -1 \pm \sqrt{-9 \cdot (x-7) / 4}, \quad \text{найдем их производные} \quad y' = \pm \frac{1}{4} \frac{(-2x)}{\sqrt{25-x^2}} \quad \text{и}$$

$$y' = \pm \frac{1}{4} \frac{(-9)}{\sqrt{-9 \cdot (x-7)}}. \quad \text{Приравняем производные друг к другу}$$

$$\pm \frac{1}{4} \frac{(-2x)}{\sqrt{25-x^2}} = \pm \frac{1}{4} \frac{(-9)}{\sqrt{-9 \cdot (x-7)}} \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{9}{\sqrt{-9 \cdot (x-7)}} \Rightarrow \frac{4x^2}{25-x^2} = \frac{9}{7-x} \quad \text{или}$$

$28x^2 - 4x^3 = 9 \cdot 25 - 9x^2$ . Будем искать целые решения уравнения. Если такие есть, то они являются делителями свободного члена,  $x=3$  – подходит. Преобразуем уравнение, поделив на  $x-3$ , получим

$$(x-3)(4x^2 - 25x - 75) = 0 \Rightarrow (x-3) \left( x - \frac{25+5\sqrt{73}}{8} \right) \left( x - \frac{25-5\sqrt{73}}{8} \right) = 0, \quad \text{но } x \text{ должен быть}$$

положительным и меньше 7. Подставляя 3 в любое из исходных выражений, находим  $y=2$ . Значит координаты точки касания (3,2).

При  $y=0$ ,  $(1)^2 = -9 \cdot (x-7) / 4 \Rightarrow x = 59/9$  Подставляем в производную и находим тангенс угла касательной в начальный момент.  $y' = \pm \frac{1}{8} \frac{(-9)}{\sqrt{-9 \cdot (x-7) / 4}} = \pm \left(\frac{-9}{8}\right) \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{-9}{8}\right)$

**Ответ:**  $(3, 2)$ ,  $\alpha = -\arctg\left(\frac{9}{8}\right)$  или  $\alpha = \pi - \arctg\left(\frac{9}{8}\right)$ .



## Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика

Предмет: Математика

Класс: 11

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

| Критерий (выбрать соответствие одному критерию) | Балл |
|-------------------------------------------------|------|
| Задание не решено                               | 0    |
| Задание решено на 25%                           | 3    |
| Задание решено на 50%                           | 6    |
| Задание решено на 75%                           | 9    |
| Задание решено на 100%                          | 12   |

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

| Критерий (выбрать соответствие одному критерию) | Балл |
|-------------------------------------------------|------|
| Задание не решено                               | 0    |
| Задание решено на 25%                           | 4    |
| Задание решено на 50%                           | 8    |
| Задание решено на 75%                           | 12   |
| Задание решено на 100%                          | 16   |

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

| Критерий (выбрать соответствие одному критерию) | Балл |
|-------------------------------------------------|------|
| Задание не решено                               | 0    |
| Задание решено на 25%                           | 4    |
| Задание решено на 50%                           | 8    |
| Задание решено на 75%                           | 12   |
| Задание решено на 100%                          | 16   |

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

| Критерий (выбрать соответствие одному критерию) | Балл |
|-------------------------------------------------|------|
| Задание не решено                               | 0    |
| Задание решено на 25%                           | 4    |
| Задание решено на 50%                           | 8    |
| Задание решено на 75%                           | 12   |
| Задание решено на 100%                          | 16   |

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

| Критерий (выбрать соответствие одному критерию) | Балл |
|-------------------------------------------------|------|
| Задание не решено                               | 0    |
| Задание решено на 25%                           | 5    |
| Задание решено на 50%                           | 10   |
| Задание решено на 75%                           | 15   |
| Задание решено на 100%                          | 20   |

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

| Критерий (выбрать соответствие одному критерию) | Балл |
|-------------------------------------------------|------|
| Задание не решено                               | 0    |
| Задание решено на 25%                           | 5    |
| Задание решено на 50%                           | 10   |
| Задание решено на 75%                           | 15   |
| Задание решено на 100%                          | 20   |