

Решение варианта №2 (Математика - 10 класс)

1. Имеется семь карточек с буквами С, О, Б, А, Ч, К, И. Сколькими способами можно расположить все карточки в ряд так, чтобы не было трех согласных подряд и не было двух гласных подряд? (12 баллов)

Решение. Должны чередоваться гласные буквы и блоки из 1–2 согласных. Временно обозначим гласные А, согласные Б. Количество гласных букв 3, блоков согласных 2, 3 или 4, и чтобы чередование было возможным, эти количества не должны различаться более чем на 1.

Разбиения согласных на блоки: 1) ББ-ББ, 2) ББ-Б-Б, 3) Б-ББ-Б, 4) Б-Б-ББ, 5) Б-Б-Б-Б. Пересчитаем способы чередования гласных букв и этих блоков.

- 1) АББАББА,
- 2) АББАБАБ, ББАБАБА,
- 3) АБАББАБ, БАББАБА,
- 4) АБАБАББ, БАБАББА,
- 5) БАБАБАБ.

В каждой из этих 8 конфигураций надо заменить три А на три разные гласные буквы ($3! = 6$ способов) и заменить четыре Б на разные согласные буквы ($4! = 24$ способа), в итоге 8 умножится на 144.

Ответ: 1152.

2. Пусть x, y, z – корни многочлена $P(t) = t^3 - 4t + 2$. Найдите $x^7 + y^7 + z^7$. (16 баллов)

Решение. Многочлен имеет 3 разных действительных корня, поскольку $P(-10) < 0$, $P(0) > 0$, $P(1) < 0$, $P(10) > 0$. Выразим 7-ю степень его корня через меньшие степени:

$$x^7 = x(x^3)^2 = x(4x - 2)^2 = 16x^3 - 16x^2 + 4x = 16(4x - 2) - 16x^2 + 4x = -16x^2 + 68x - 32.$$

Из теоремы Виета получаем $x + y + z = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = -2 \cdot (-4) = 8$.

В итоге

$$x^7 + y^7 + z^7 = -16 \cdot 8 + 68 \cdot 0 + 3(-32) = -224.$$

Ответ: -224.

3. В треугольнике ABC угол B равен 60° , отрезок CH - высота. Окружность с центром в точке O_1 и радиусом $R = \sqrt{13}$ описана около треугольника ABC . В треугольник BCH вписана окружность с центром в точке O_2 и радиусом $r = 3 - \sqrt{3}$. Найдите длину O_1O_2 . (16 баллов)

Решение. 1) Пусть $BH = x$. В прямоугольном треугольнике BCH имеем: $BH = x$, $BC = 2x$, $CH = \sqrt{3}x$.

$$\text{Тогда } r = \frac{x + \sqrt{3}x - 2x}{2}, 2r = (\sqrt{3} - 1)x, x = 2\sqrt{3}, \quad BC = 4\sqrt{3}, CH = 6.$$

$$2) AC = 2R \sin 60^\circ = \sqrt{13} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{39}.$$

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{39 - 36} = \sqrt{3}.$$

1 случай: треугольник ABC - остроугольный
 $AB = 3\sqrt{3}$.

3) Проведем $O_2K \perp AB$, $K \in AB$. В прямоугольном треугольнике BO_2K угол KBO_2 равен 30° ,

$O_2K = r$, $BO_2 = 2r$, $BK = \sqrt{3}r = 3\sqrt{3} - 3$. Пусть M - середина AB . Тогда $O_2K \parallel O_1M$,

$$BM = 1,5\sqrt{3}, \quad MK = 3 - 1,5\sqrt{3}.$$

$$4) MO_1 = \sqrt{BO_1^2 - BM^2} = \sqrt{R^2 - 27/4} = \frac{5}{2}.$$

$$5) O_1O_2^2 = (MO_1 - r)^2 + MK^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + (3 - 1,5\sqrt{3})^2 = 19 - 10\sqrt{3}. \quad O_1O_2 = \sqrt{19 - 10\sqrt{3}}.$$

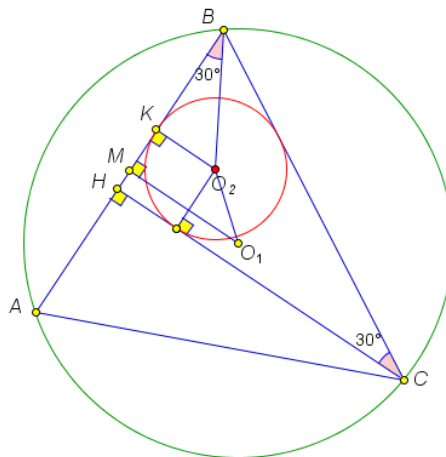
2 случай: треугольник ABC - тупоугольный $AB = \sqrt{3}$.

3) Проведем $O_2K \perp BH$, $K \in BH$. В прямоугольном треугольнике BO_2K угол KBO_2 равен 30° , $O_2K = r$, $BO_2 = 2r$, $BK = \sqrt{3}r = 3\sqrt{3} - 3$. Пусть M - середина AB . Тогда $O_2K \parallel O_1M$,

$$BM = 0,5\sqrt{3}, \quad MK = 2,5\sqrt{3} - 3.$$

$$4) MO_1 = \sqrt{BO_1^2 - BM^2} = \sqrt{R^2 - 3/4} = \frac{7}{2}.$$

$$5) O_1O_2^2 = (MO_1 - r)^2 + MK^2 = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2 + (2,5\sqrt{3} - 3)^2 = 31 - 14\sqrt{3}. \quad O_1O_2 = \sqrt{31 - 14\sqrt{3}}.$$



Ответ: $\sqrt{19-10\sqrt{3}}, \sqrt{31-14\sqrt{3}}$.

4. Найдите все значения x , для которых неравенство

$$\sqrt{2(x+2)^2 + 8x + a - 7} > (a+1)x^2 + a(2x-1) - 15 \text{ верно для любого } a \in [-3; -1].$$

(16 баллов)

Решение: $\sqrt{2x^2 + 16x + a + 1} > (a+1)x^2 + a(2x-1) - 15$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 16x + a + 1} > a((x+1)^2 - 2) + x^2 - 15 \quad (*)$$

Пусть для некоторого фиксированного значения x неравенство $(*)$ выполняется для всех $a \in [-3; -1]$.

Рассмотрим функции $f(a) = \sqrt{2x^2 + 16x + a + 1}$ и

$g(a) = a((x+1)^2 - 2) + x^2 - 15$. Область определения

$f(a)$ - множество, удовлетворяющее неравенству

$2x^2 + 16x + a + 1 \geq 0$. Выбранное значение x

удовлетворяет неравенству $2x^2 + 16x + a + 1 \geq 0$ при

любых $a \in [-3; -1]$, значит, $2x^2 + 16x - 2 \geq 0$. При $a \in [-3; -1]$ функция $f(a)$ возрастает, и

$f(a) \geq 0$. Графиком функции $f(a)$ является ветвь параболы. Функция $g(a)$ - линейная

функция, и $g(-3) = -2x^2 - 6x - 12 < 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

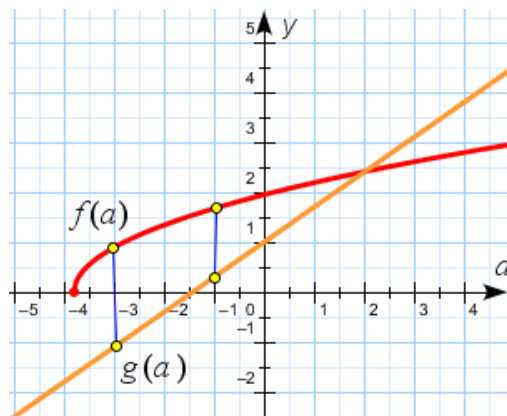
Для выполнения неравенства $(*)$ для всех $a \in [-3; -1]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 2x^2 + 16x - 2 \geq 0, \\ f(-1) > g(-1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x - 1 \geq 0, \\ \sqrt{2x^2 + 16x} > -2x - 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x(x+8) \geq 0, \\ x > -7, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -7, \\ 2x^2 + 16x > 4x^2 + 56x + 196, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -4 - \sqrt{17}] \cup [-4 + \sqrt{17}; +\infty), \\ \begin{cases} x \in [0; +\infty), \\ x \leq -7, \\ x^2 + 20x + 98 < 0, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -4 - \sqrt{17}] \cup [-4 + \sqrt{17}; +\infty), \\ \begin{cases} x \in [0; +\infty), \\ x \in (-10 - \sqrt{2}; -10 + \sqrt{2}), \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-10 - \sqrt{2}; -10 + \sqrt{2}) \cup [-4 + \sqrt{17}; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-10 - \sqrt{2}; -10 + \sqrt{2}) \cup [-4 + \sqrt{17}; +\infty)$.

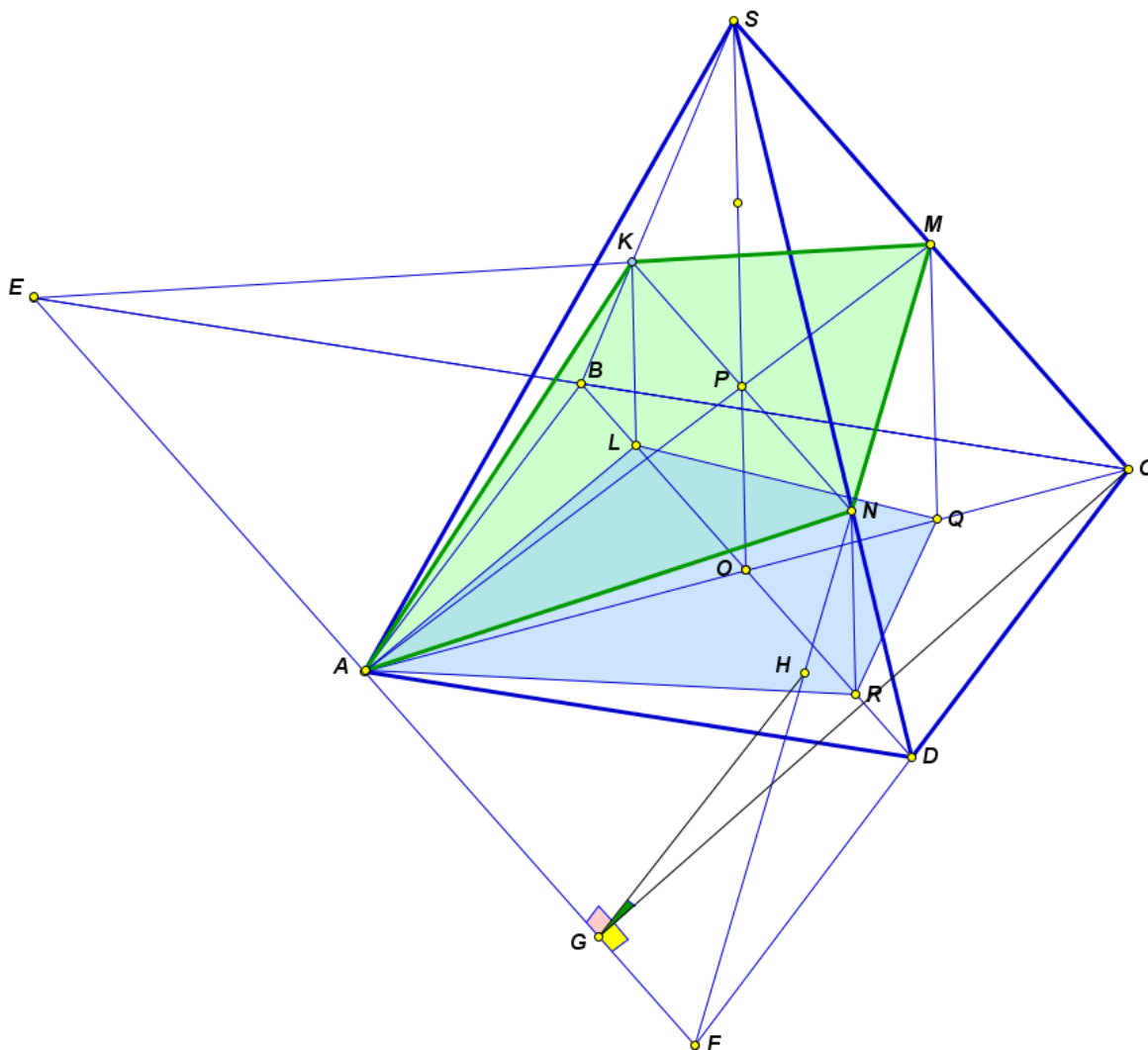


5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{13}$, $BC = 4\sqrt{13}$ и углом A , равным 60° . Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO , где O - точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через середину ребра SC и точку P , лежащую на высоте пирамиды SO , причем $SP = 2PO$, если расстояние от точки S до плоскости сечения равно $2\sqrt{3}$. (20 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. Пусть $P \in SO$, $SP = 2SO$, а M – середина SC . Отрезки AM и SO являются медианами треугольника ASC , они пересекаются в точке P . Следовательно, сечение проходит через точку A . В плоскости BSD через точку P проведем прямую KN , параллельную BD , $K \in BS$, $N \in SD$, $\frac{SK}{KB} = \frac{SN}{ND} = 2$. Искомое сечение – четырехугольник $AKMN$.

Обозначим $AB = a$, $AD = 4a$, $\angle A = \alpha$, $a = \sqrt{13}$, $\alpha = 60^\circ$.

Площадь сечения $AKMN$ будем вычислять по формуле $S_{\text{сеч}} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi}$, где S_{np} – площадь проекции сечения на плоскость основания, φ – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания. Проекцией является четырехугольник $ALQR$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = AB \cdot AD \sin \alpha = 4a^2 \sin \alpha$, $S = 26\sqrt{3}$.



Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

$$S_{np} = 2(S_{AOR} + S_{ROQ}) = \frac{S}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{S}{2} = 13\sqrt{3}.$$

Плоскость сечения и плоскость основания пересекаются по прямой EF , параллельной BD и проходящей через точку A . Пусть CG – перпендикуляр к прямой EF , $H \in MF$, $HG \perp EF$. Угол CGH – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, он равен φ .

Расстояние от точки S до плоскости сечения равно расстоянию от точки C до плоскости сечения и равно $d = 2\sqrt{3}$.

Отрезок CG – высота треугольника ECF , $EF \cdot CG = EC \cdot CF \sin \alpha$,

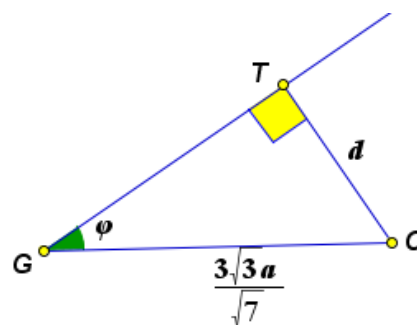
$$CG = \frac{EC \cdot CF \sin \alpha}{EF} = \frac{2BC \cdot 2CD \sin 60^\circ}{\sqrt{4BC^2 + 4CD^2 - 2 \cdot 4BC \cdot CD \cos 60^\circ}} = \frac{BC \cdot CD \sqrt{3}}{\sqrt{BC^2 + CD^2 - BC \cdot CD}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}} a.$$

Проведем перпендикуляр CT к прямой GH , длина этого перпендикуляра равна d . Тогда

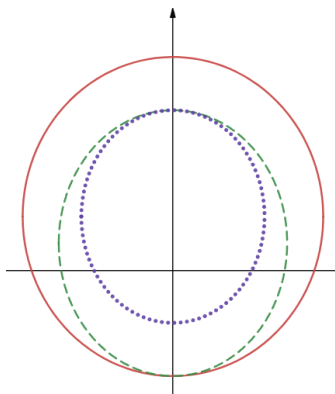
$$\sin \varphi = \frac{CT}{CG} = \frac{d\sqrt{13}}{4\sqrt{3}a} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 30^\circ, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi} = 26.$$

Ответ: 26.



6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопились сотни тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства может быть существенно осложнено возрастающей угрозой столкновения с этим мусором. Согласно результатам исследований удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.



Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью, равной 7000 км. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Пусть уравнение траектории движения обломка задано следующим образом: $49x^2 + 40(y-3)^2 = 1960$.

На некотором удалении от указанной орбиты находится космическая научная станция, уравнение движения которой $25x^2 + 16(y-3)^2 = 400$. С нее стартует летательный аппарат, который

движется по переходной эллиптической траектории: $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2} = 1$. Он должен совершить

маневр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку для изменения его скорости и направления движения.

Известно, что скорость движения по эллиптической орбите вида $\frac{(x)^2}{b^2} + \frac{(y-c)^2}{a^2} = 1$, $a \geq b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, с большой полуосью, равной a , вычисляется по

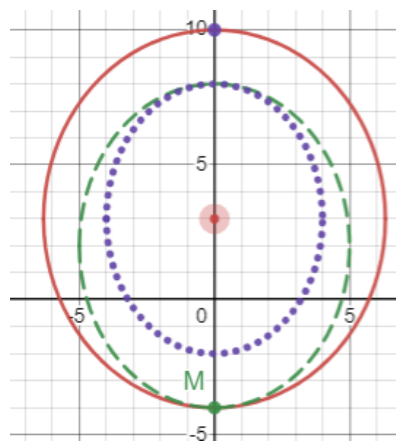
формуле $V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$, $\mu \approx 3,9 \cdot 10^5 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ - гравитационный потенциал Земли, r –

расстояние от начала координат, расположенного в одном из фокусов эллипса, до движущейся точки.

Найдите минимальную скорость движения осколков космического мусора на указанной орбите. Определите параметры z , y_0 , если известно, что переходная траектория должна проходить через точку, в которой скорость движения обломков максимальна и проходить через точку орбиты научной станции, в которой скорость движения станции минимальна. Выпишите уравнение переходной орбиты. (20 баллов)

Решение. Анализируя формулу скорости, можно заметить, что минимальное значение скорости движения по эллиптической орбите достигается в вершине эллипса, наиболее удаленной от фокуса, в котором находится начало координат, а максимальное – в ближайшей к фокусу вершине. Поэтому переходная траектория должна проходить через точки $M(0, -4)$ и $N(0, 7)$.

Для нахождения скорости рассмотрим точку $(0, 10)$



$$(0, 10) \Rightarrow V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{10} - \frac{1}{7} \right)} = \sqrt{3,9 \cdot 10^5 \left(\frac{4}{7 \cdot 10000} \right)} \approx \sqrt{\frac{39 \cdot 4}{7}} = \sqrt{5,6} \cdot 2 \approx 4,7 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Здесь мы учли, что расчёты делали в тысячах километров.

Для нахождения переходной траектории учтем симметрию эллипса, положим

$$x = 0 \Rightarrow y - y_0 = \pm z \Rightarrow y = y_0 - z = -4, y = y_0 + z = 8 \Rightarrow y_0 = \frac{8 - 4}{2} = 2, z = 6$$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{6^2} = 1.$$

Ответ: 4,7; 6; 2; $\frac{x^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{6^2} = 1$



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика

Предмет: Математика

Класс: 10

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	3
Задание решено на 50%	6
Задание решено на 75%	9
Задание решено на 100%	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20