

Решение варианта №1 (Математика - 10 класс)

1. Имеется шесть карточек с буквами С, О, Б, А, К, И. Сколькими способами можно расположить все карточки в ряд так, чтобы не было трех согласных подряд и не было трех гласных подряд? (12 баллов)

Решение. Должны чередоваться блоки из 1–2 гласных и 1–2 согласных. Временно обозначим гласные А, согласные Б. Количество блоков гласных 2 или 3, блоков согласных 2 или 3, и чтобы чередование было возможным, эти количества не должны различаться более чем на 1.

Разбиения гласных на блоки могут быть такими: 1) А-АА, 2) АА-А, 3) А-А-А.

Разбиения согласных на блоки: Б-ББ, ББ-Б, Б-Б-Б.

Пересчитаем способы чередования этих блоков.

1) БАББАА, ББАБАА, АБААББ, АББААБ, БАБААБ;

2) БААББА, ББААБА, ААБАББ, ААББАБ, БААБАБ;

3) АБАББА, АББАБА, БАБАБА, АБАБАБ.

В каждой из этих 14 конфигураций надо заменить три А на три разные гласные буквы ($3! = 6$ способов) и заменить три Б на три разные согласные буквы (так же 6 способов), в итоге 14 умножится на 36.

Ответ: 504.

2. Пусть x, y, z – корни многочлена $P(t) = t^3 - 3t - 1$. Найдите $x^7 + y^7 + z^7$. (16 баллов)

Решение. Многочлен имеет 3 разных действительных корня, поскольку $P(-10) < 0$, $P(-1) > 0$, $P(0) < 0$, $P(10) > 0$. Выразим 7-ю степень его корня через меньшие степени:

$$x^7 = x(x^3)^2 = x(3x + 1)^2 = 9x^3 + 6x^2 + x = 9(3x + 1) + 6x^2 + x = 6x^2 + 28x + 9.$$

Из теоремы Виета получаем $x + y + z = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = -2 \cdot (-3) = 6$.

В итоге

$$x^7 + y^7 + z^7 = 6 \cdot 6 + 28 \cdot 0 + 3 \cdot 9 = 63.$$

Ответ: 63.

3. В треугольнике ABC угол B равен 60° , отрезок CH - высота. Окружность с центром в точке O_1 и радиусом $R = \frac{\sqrt{39}}{3}$ описана около треугольника ABC . В треугольник BCH вписана окружность с центром в точке O_2 и радиусом $r = \sqrt{3} - 1$. Найдите длину O_1O_2 . (16 баллов)

Решение. 1) Пусть $BH = x$. В прямоугольном треугольнике BCH имеем:

$$BH = x, BC = 2x, CH = \sqrt{3}x. \text{ Тогда } r = \frac{x + \sqrt{3}x - 2x}{2}, 2r = (\sqrt{3} - 1)x, x = 2, \quad BC = 4, CH = 2\sqrt{3}.$$

$$2) AC = 2R \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{39}}{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{13},$$

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13 - 12} = 1,$$

1 случай: треугольник ABC - остроугольный $AB = 3$.

3) Проведем $O_2K \perp AB, K \in AB$. В прямоугольном треугольнике BO_2K угол KBO_2 равен 30° ,

$$O_2K = r, BO_2 = 2r, BK = \sqrt{3}r = 3 - \sqrt{3}. \text{ Пусть } M -$$

середина AB . Тогда $O_2K \parallel O_1M$,

$$BM = 1,5, \quad MK = \sqrt{3} - 1,5.$$

$$4) MO_1 = \sqrt{BO_1^2 - BM^2} = \sqrt{R^2 - 9/4} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

$$5) O_1O_2^2 = (MO_1 - r)^2 + MK^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + (\sqrt{3} - 1,5)^2 = \frac{19 - 10\sqrt{3}}{3}. \quad O_1O_2 = \sqrt{\frac{19 - 10\sqrt{3}}{3}}.$$

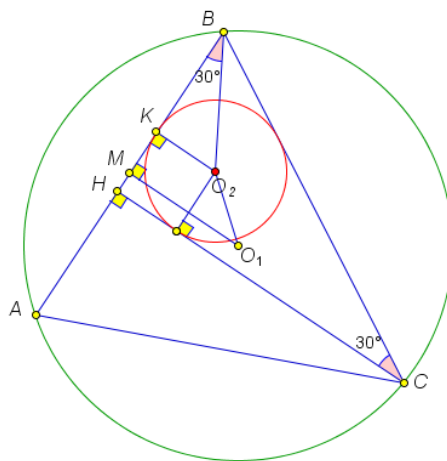
2 случай: треугольник ABC - тупоугольный $AB = 1$.

3) Проведем $O_2K \perp BH, K \in BH$. В прямоугольном треугольнике BO_2K угол KBO_2 равен 30° , $O_2K = r, BO_2 = 2r, BK = \sqrt{3}r = 3 - \sqrt{3}$. Пусть M - середина AB . Тогда $O_2K \parallel O_1M$,

$$BM = 0,5, \quad MK = 2,5 - \sqrt{3}.$$

$$4) MO_1 = \sqrt{BO_1^2 - BM^2} = \sqrt{R^2 - 1/4} = \frac{7}{2\sqrt{3}}.$$

$$5) O_1O_2^2 = (MO_1 - r)^2 + MK^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + (2,5 - \sqrt{3})^2 = \frac{31 - 14\sqrt{3}}{3}. \quad O_1O_2 = \sqrt{\frac{31 - 14\sqrt{3}}{3}}.$$



Ответ: $\sqrt{\frac{19-10\sqrt{3}}{3}}, \sqrt{\frac{31-14\sqrt{3}}{3}}.$

4. Найдите все значения x , для которых неравенство $\sqrt{2x^2+8x+a} > ax^2 + (1-a)(2x-1) - 15$ верно для любого $a \in [-2; 0]$. (16 баллов)

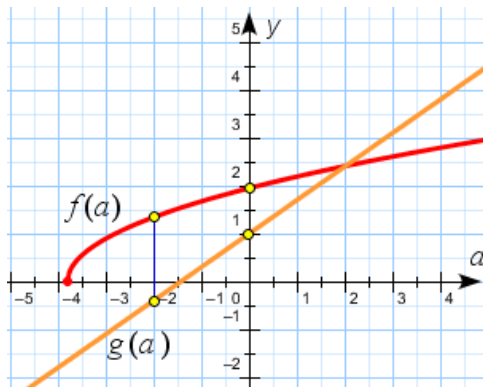
Решение: $\sqrt{2x^2+8x+a} > ax^2 + (1-a)(2x-1) - 15$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+8x+a} > a(x-1)^2 + 2x-16 \quad (*)$$

Пусть для некоторого фиксированного значения x неравенство $(*)$ выполняется для всех $a \in [-2; 0]$.

Рассмотрим функции $f(a) = \sqrt{2x^2+8x+a}$ и $g(a) = a(x-1)^2 + 2x-16$. Область определения $f(a)$ -множество, удовлетворяющее неравенству $2x^2+8x+a \geq 0$. Выбранное значение x удовлетворяет неравенству $2x^2+8x+a \geq 0$ при любых $a \in [-2; 0]$,

значит, $2x^2+8x-2 \geq 0$. При $a \in [-2; 0]$ функция $f(a)$ возрастает, и $f(a) \geq 0$. Графиком функции $f(a)$ является ветвь параболы. Функция $g(a)$ - неубывающая линейная функция, и $g(-2) = -2x^2+6x-18 < 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.



Для выполнения неравенства $(*)$ для всех $a \in [-2; 0]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 2x^2+8x-2 \geq 0, \\ f(0) > g(0), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-1 \geq 0, \\ \sqrt{2x^2+8x} > 2x-16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x(x+4) \geq 0, \\ x < 8, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 8, \\ 2x^2+8x > 4x^2-64x+256, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2-\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5}; +\infty), \\ \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [0; 8), \\ \begin{cases} x \geq 8, \\ x^2-36x+128 < 0, \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2-\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5}; +\infty), \\ \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [0; 8), \\ x \in [8; 32), \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty; -2-\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5}; 32).$$

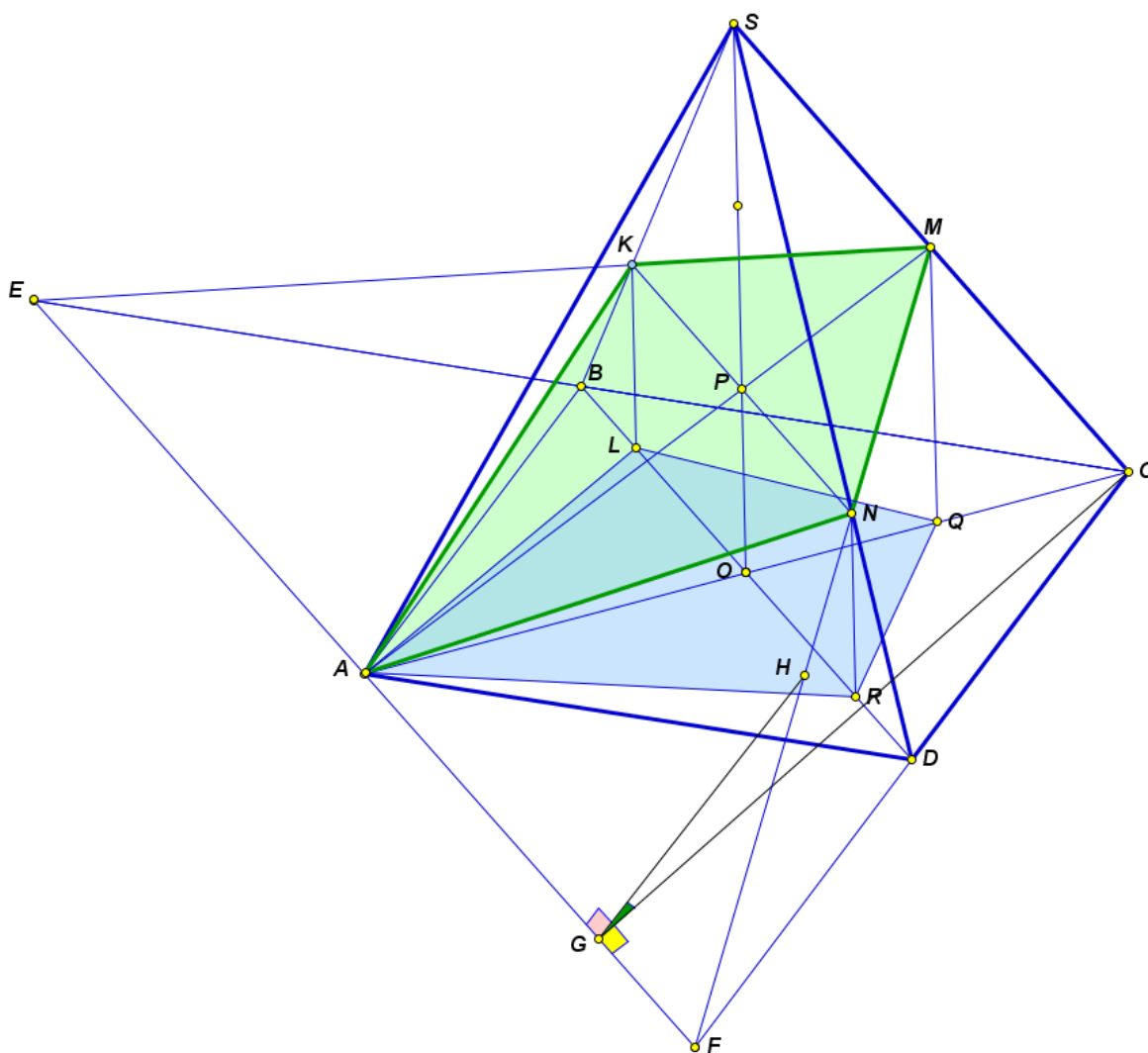
Ответ: $x \in (-\infty; -2-\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5}; 32).$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{7}$, $BC = 3\sqrt{7}$ и углом A , равным 60° . Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO , где O - точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через середину ребра SC и точку P , лежащую на высоте пирамиды SO , причем $SP = 2PO$, если расстояние от точки S до плоскости сечения равно $3\sqrt{3}/2$. (20 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. Пусть $P \in SO$, $SP = 2SO$, а M – середина SC . Отрезки AM и SO являются медианами треугольника ASC , они пересекаются в точке P . Следовательно, сечение проходит через точку A . В плоскости BSD через точку P проведем прямую KN , параллельную BD , $K \in BS$, $N \in SD$, $\frac{SK}{KB} = \frac{SN}{ND} = 2$. Искомое сечение – четырехугольник $AKMN$.

Обозначим $AB = a$, $AD = 3a$, $\angle A = \alpha$, $a = \sqrt{7}$, $\alpha = 60^\circ$.

Площадь сечения $AKMN$ будем вычислять по формуле $S_{\text{сеч}} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi}$, где S_{np} – площадь проекции сечения на плоскость основания, φ – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания. Проекцией является четырехугольник $ALQR$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = AB \cdot AD \sin \alpha = 3a^2 \sin \alpha$, $S = 21\sqrt{3}/2$.



Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

$$S_{np} = 2(S_{AOR} + S_{ROQ}) = \frac{S}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{S}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}.$$

Плоскость сечения и плоскость основания пересекаются по прямой EF , параллельной BD и проходящей через точку A . Пусть CG – перпендикуляр к прямой EF , $H \in MF$, $HG \perp EF$. Угол CGH – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, он равен φ .

Расстояние от точки S до плоскости сечения равно расстоянию от точки C до плоскости сечения и равно $d = 3\sqrt{3}/2$.

Отрезок CG – высота треугольника ECF , $EF \cdot CG = EC \cdot CF \sin \alpha$,

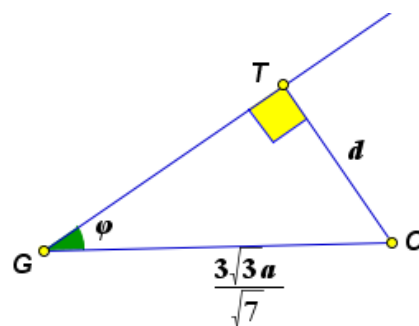
$$CG = \frac{EC \cdot CF \sin \alpha}{EF} = \frac{2BC \cdot 2CD \sin 60^\circ}{\sqrt{4BC^2 + 4CD^2 - 2 \cdot 4BC \cdot CD \cos 60^\circ}} = \frac{BC \cdot CD \sqrt{3}}{\sqrt{BC^2 + CD^2 - BC \cdot CD}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} a.$$

Проведем перпендикуляр CT к прямой GH , длина этого перпендикуляра равна d . Тогда

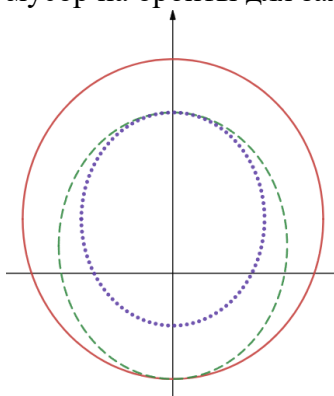
$$\sin \varphi = \frac{CT}{CG} = \frac{d\sqrt{7}}{3\sqrt{3}a} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 30^\circ, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{np}}}{\cos \varphi} = \frac{21}{2} = 10,5.$$

Ответ: 10,5.



6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопились сотни тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства может быть существенно осложнено возрастающей угрозой столкновения с этим мусором. Согласно результатам исследований удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.



Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью, равной 9000 км. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Пусть уравнение траектории движения обломка задано следующим образом: $81x^2 + 65(y-4)^2 = 5265$.

На некотором удалении от указанной орбиты находится космическая научная станция, уравнение движения которой $36x^2 + 20(y-4)^2 = 720$. С нее стартует летательный аппарат, который

движется по переходной эллиптической траектории: $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2} = 1$. Он должен совершить

маневр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку для изменения его скорости и направления движения.

Известно, что скорость движения по эллиптической орбите вида $\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-c)^2}{a^2} = 1$, $a \geq b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, с большой полуосью, равной a , вычисляется по

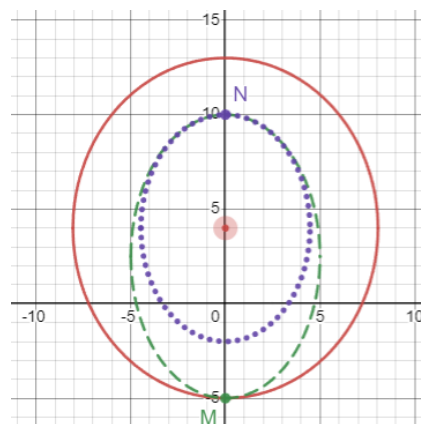
формуле $V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$, $\mu \approx 3,9 \cdot 10^5 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ - гравитационный потенциал Земли, r –

расстояние от начала координат, расположенного в одном из фокусов эллипса, до движущейся точки.

Найдите максимальную скорость движения осколков космического мусора на указанной орбите. Определите параметры z , y_0 , если известно, что переходная траектория должна проходить через точку, в которой скорость движения обломков максимальна и проходить через точку орбиты научной станции, в которой скорость движения станции минимальна. Выпишите уравнение переходной орбиты. (20 баллов)

Решение. Анализируя формулу скорости, можно заметить, что минимальное значение скорости движения по эллиптической орбите достигается в вершине эллипса, наиболее удаленной от фокуса, в котором находится начало координат, а максимальное – в ближайшей к фокусу вершине. Поэтому переходная траектория должна проходить через точки $M(0, -5)$ и $N(0, 10)$.

Для нахождения скорости рассмотрим точку M



$$M(0, -5) \Rightarrow V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{9} \right)} = \sqrt{3,9 \cdot 10^5 \left(\frac{13}{3 \cdot 15 \cdot 1000} \right)} \approx \sqrt{\frac{13^2 \cdot 10}{15}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 13}{\sqrt{3}} \approx 10,6 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Здесь мы учли, что расчёты делали в тысячах километров.

Для нахождения переходной траектории учтем симметрию эллипса, положим $x=0 \Rightarrow y-y_0 = \pm z \Rightarrow y = y_0 - z = -5$, $y = y_0 + z = 10 \Rightarrow y_0 = \frac{10-5}{2} = \frac{5}{2}$, $z = \frac{15}{2}$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{(y-5/2)^2}{(15/2)^2} = 1.$$

Ответ: 10,6; 7,5; 2,5; $\frac{x^2}{5^2} + \frac{(y-5/2)^2}{(15/2)^2} = 1$



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика

Предмет: Математика

Класс: 10

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	3
Задание решено на 50%	6
Задание решено на 75%	9
Задание решено на 100%	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	4
Задание решено на 50%	8
Задание решено на 75%	12
Задание решено на 100%	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Задание не решено	0
Задание решено на 25%	5
Задание решено на 50%	10
Задание решено на 75%	15
Задание решено на 100%	20