Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
9 класс
Вариант 2

№1 Решите неравенство:

$$\sqrt{18x-1}-\sqrt{4x^2+11x-3} \geq 4x^2-7x-2.$$

Решение:

Пусть $u=\sqrt{18x-1}$, $v=\sqrt{4x^2+11x-3}$,

тогда $u^2=18x-1$, $v^2=4x^2+11x-3$ и $v^2-u^2=4x^2-7x-2$.

Неравенство примет вид: $u-v \geq v^2-u^2 \iff (u-v)(1+u+v) \geq 0$.

Возвращаясь к исходной переменной, будем иметь:

$$\left(\sqrt{18x-1}-\sqrt{4x^2+11x-3}\right)\left(1+\sqrt{18x-1}+\sqrt{4x^2+11x-3}\right) \geq 0 \iff$$

$$\iff \sqrt{18x-1}-\sqrt{4x^2+11x-3} \geq 0 \iff$$

$$\iff \sqrt{18x-1} \geq \sqrt{4x^2+11x-3} \iff \begin{cases} 18x-1 \geq 4x^2+11x-3, \\ 4x^2+11x-3 \geq 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4x^2-7x-2 \leq 0, \\ 4x^2+11x-3 \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{4};\ 2\right], \\ x \in (-\infty;\ -3] \cup \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right), \end{cases} \iff x \in \left[\frac{1}{4};\ 2\right].$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4};\ 2\right]$.

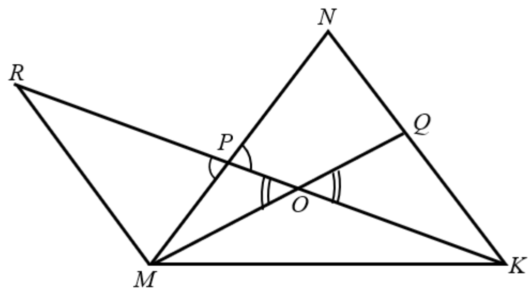
Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ
10	Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано, например, не описан равносильный переход в неравенствах.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, например, установлена связь

	между подкоренными выражениями и правой частью неравенства, но дальнейшее решение неверно или отсутствует, или содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№2 В треугольнике MNK на стороне MN взята точка P так, что $MP:PN = 2:3$, а на стороне NK отмечена точка Q так, что $NQ:QK = 5:4$. Прямые KP, MQ пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника KOQ, если известно, что площадь треугольника MOP равна 12.

Решение:



Проведем прямую $MR||KN.$ Точку пересечения этой прямой с прямой KP обозначим R.

Пусть $NQ = 5x,\ QK = 4x$, тогда $NK = 9x$.

$$\Delta MRP \sim \Delta NKP => \frac{MR}{NK} = \frac{MP}{PN} = \frac{PR}{KP} = \frac{2}{3} => MR = \frac{2}{3} \cdot 9x = 6x;$$

$$\frac{PR}{KP} = \frac{2}{3} \ => \ PR = \frac{2}{5}KR\ .$$

$$\Delta MOR \sim \Delta QOK => \frac{MR}{QK} = \frac{OM}{OQ} = \frac{OR}{OK} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \ => OK = \frac{2}{5} \cdot KR.$$

$$OP = KR - OK - PR = KR - \frac{2}{5} \cdot KR - \frac{2}{5}KR = \frac{1}{5}KR.$$

Тогда

$$\frac{S_{\Delta KOQ}}{S_{\Delta MOP}} = \frac{OK \cdot OQ}{OP \cdot OM} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{5 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{4}{3} => S_{\Delta KOQ} = \frac{4}{3} S_{\Delta MOP} = 16.$$

Ответ: 16 кв.ед.

Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ
10	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, например, верно найдено отношение $\frac{OM}{OQ}$ или $\frac{OK}{OP}$, но дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№3 Группе путешественников, состоящей из Наташи, Юрия, Игоря Константиновича и Татьяны Олеговны, необходимо преодолеть сложный горный участок повышенной опасности. По технике безопасности на этом участке пути нужно обязательно находиться в каске. Но на всю группу имеются только две каски. Если этот участок пути переходят два человека, то они идут со скоростью того, кто идёт медленнее. Известно, что Юрий преодолевает участок за 4 минуты, Наташа – за 8 минут, Игорь Константинович – за 18 минут и Татьяна Олеговна – за 24 минуты. За какое наименьшее время данная группа путешественников может преодолеть горный участок при данных условиях. Алгоритм перехода опишите. Ответ обоснуйте.

Решение. Алгоритм следующий:

первый рейс – Наташа и Юрий (8 минут),

обратно, например, Наташа (8 минут), (но можно и Юрий)

второй рейс – Игорь Константинович и Татьяна Олеговна (24 минуты)

обратно – Виктор (4 минуты)

третий рейс – Наташа и Юрий (8 минут).

Всего – 52 минуты.

Доказательство минимальности. Т.к. есть всего две каски, а путешественников 4, то за один рейс могут перейти переправу только двое туристов. Причём, если переход не последний, то один из них должен вернуться назад с обеими касками. Следовательно, нужно сделать три рейса в одну сторону и два рейса в обратную (всего 5 рейсов). Но если Игорь Константинович и Татьяна Олеговна перебираются в разных рейсах, то в сумме они уже дают 18+24=42 минуты. Плюс должно быть ещё три рейса, но самый короткий рейс длится четыре минуты (Юрий). Следовательно общее время будет не меньше 42+12=54 минуты. Значит, Валерий Сергеевич и Ангелина Павловна должны перебираться одним рейсом. Если этот рейс первый или последний, то один из них должен вернуться и ещё раз пройти путь, а это ещё добавит минимум 18 минут, т.е. в сумме получится не меньше чем 42+18=60 минут.

Значит, выбранный алгоритм является оптимальным.

Ответ: 52 минуты.

Критерии выставления оценок

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету Математика
9 класс
Вариант 2

Баллы	Критерии выставления
15	Описан правильный алгоритм перехода. Получен верный ответ с доказательством минимальности времени
10	Описан правильный алгоритм перехода. Получен верный ответ, но не доказано, что этот алгоритм минимален по времени
8	Описан правильный алгоритм перехода. Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из предыдущих условий

№4: При каких значениях параметра a уравнение $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+8)\cdot(x+16)=a\cdot x^2$ имеет ровно два различных решения.

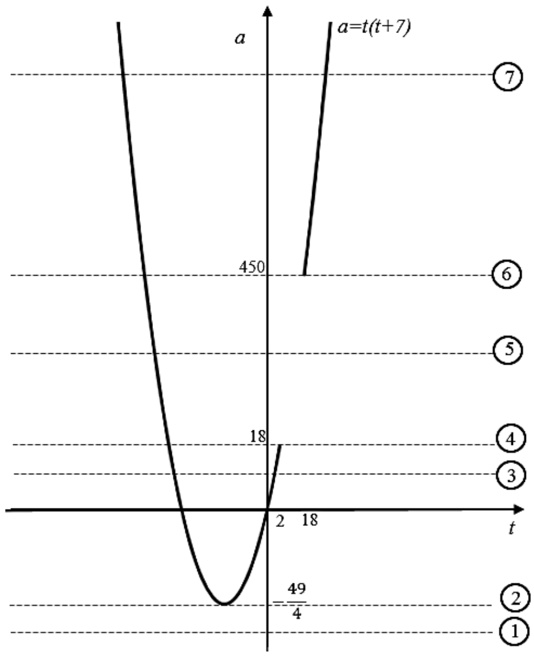
Решение. Сгруппируем и раскроем скобки. $((x+1)\cdot(x+16))\cdot((x+2)\cdot(x+8))=a\cdot x^2$

$$(x^2+17x+16)\cdot(x^2+10x+16)=a\cdot x^2$$

Заметим, что x=0 не является решением данного уравнения (получается 16х16=0, что неверно). Следовательно, при делении на x^2 множество решений не изменится. Разделим на x^2, получим: $(x+17+\frac{16}{x})\cdot(x+10+\frac{16}{x})=a$.

Сделаем замену: $t=(x+10+\frac{16}{x})$. Получим уравнение $t\cdot(t+7)=a$. Изучим, сколько решений (по x) имеет уравнение $t=x+10+\frac{16}{x}$ в зависимости от t. Для этого домножим уравнение на x $t\cdot x=x^2+10x+16$; $x^2-(\mathrm{t}-10)\cdot \mathrm{x}+16=0$. Вычислим дискриминант этого уравнения: $D=(t-10)^2-4\cdot16=(t-10+8)(t-10-8)=(t-2)\cdot(t-18)$.

Вывод: при $t \in (-\infty;2) \cup (18;+\infty)$ уравнение имеет два различных решения; при $t = 2$ и $t = 18$ уравнение имеет одно решение, а при $t \in (2;18)$ уравнение решений не имеет. Следовательно, нам нужно изучить число решений уравнения $t \cdot (t+7) = a$ на промежутке $t \in (-\infty;2] \cup [18;+\infty)$ с учётом полученной ранее информации. Построим график функции $a = t \cdot (t+7)$ на промежутке $t \in (-\infty;2] \cup [18;+\infty)$. Для этого вычислим: $t_в = -\frac{7}{2}$; $a_в = -\frac{49}{4}$; $a(2) = 2 \cdot (2+7) = 18$; $a(18) = 18 \cdot (18+7) = 450$.



Из графика видно, что при $a < -\frac{49}{4}$ уравнение решений не имеет;

При $a = -\frac{49}{4}$ уравнение имеет два решения, при $a \in (-\frac{49}{4};18)$ - 4 решения; при $a = 18$ - 3 решения, при $a \in (18;450)$ 2 решения; при $a = 450$ - 3 решения,

при $a > 450$ - 4 решения.

Ответ: $\{-\frac{49}{4}\} \cup (18;450)$.

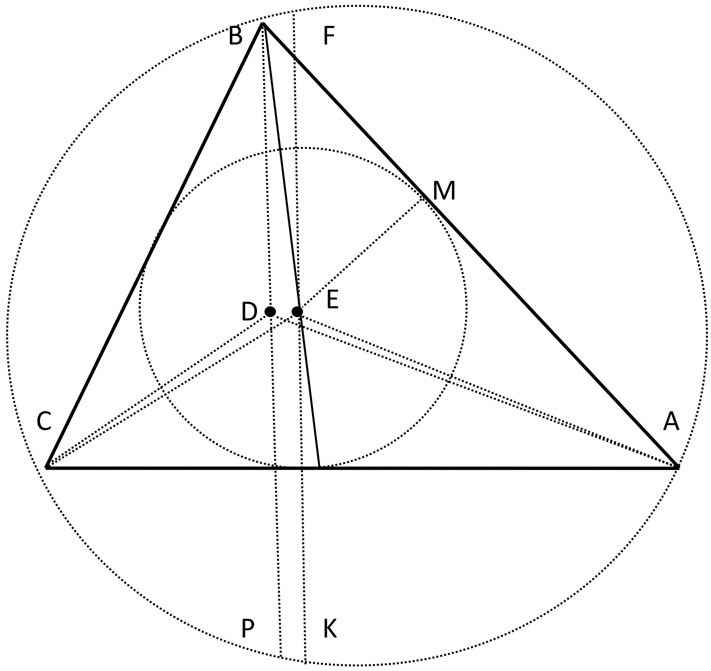
Критерии выставления оценок

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
9 класс
Вариант 2

Баллы	**Критерии выставления**
15	Верное решение. Обоснованно получен правильный ответ
12	При графическом способе: верно построен график квадратного трёхчлена с учётом ограничений на переменную замены (t), но получен неверный ответ. При решении через расположение корней квадратного уравнения относительно числа – верно составлены все условия (системы).
8	Верно определено, сколько решений по x даёт каждое значение переменной замены (t)
4	Верно выбран метод решения задачи. Сделана правильная замена
0	Решение не соответствует ни одному из предыдущих условий

№5: Последовательность величин углов при вершинах A, B, C в остроугольном треугольнике ABC образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть D, E – точки пересечения его высот и биссектрис, соответственно. Последовательность величин углов при вершинах B, D, E в остроугольном треугольнике BDE образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите градусную величину угла C в треугольнике ABC.

Решение: A, B, C в остроугольном треугольнике ABC образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, следовательно, $\angle B = \frac{1}{3}(\angle A + \angle B + \angle C) = 60^0$. Проведем описанную и вписанную окружности треугольника ABC. $\angle A < 60^0 < \angle C =>$ хорда BP, содержащая высоту треугольника ABC, пройдет левее центров этих окружностей (ближе к C).



По свойствам треугольника: $\angle AEC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle B = 120^0, \angle ADC = 180^0 - \angle B = 120^0$ => проекции точек D, E точки P, K - принадлежат описанной около треугольника ABC окружности, а сами лежат на одной окружности с точками треугольнике A, C. Пусть $\angle A = \alpha,\ \angle C = \gamma,$ тогда

$$\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE = 30^0 - \frac{1}{2}\alpha,\ \angle CED = \angle CAD = 90^0 - \gamma,$$

$\angle BEA = 90^0 + \frac{1}{2}\gamma =>$

$$\angle BED = 360^0 - \angle BEA - \angle AEC - \angle CED = 60^0 + \frac{1}{2}\gamma, \angle DBE =$$

$\angle DBA - \angle EBA = 60^0 - \alpha.$

В треугольнике EBD:

$$\angle BED + \angle DBE + \angle EDB = 180^0,$$

$$60^0 + \frac{1}{2}\gamma + 60^0 - \alpha + \angle EDB = 180^0 =>$$

$\angle EDB = 60^0 - \frac{1}{2}\gamma + \alpha$=$60^0 - \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) + \frac{3}{2}\alpha = \frac{3}{2}\alpha.$

Углы B, D, E в треугольнике BDE образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, так как $\angle DBE = 60^0 - \alpha$, $\angle BDE = \frac{3}{2}\alpha$, $\angle DEB = 120^0 - \frac{1}{2}\alpha$ и $\alpha < 60^0$ $=> \angle BDE < \angle DEB =>$ $\angle BDE = 60^0 = \frac{3}{2}\alpha => \alpha = 40^0 => \gamma = 80^0$.

<u>Второй способ:</u> $BE = EK = 2r = 2EM$ $=> \angle BKE = \angle EBK =$ $\angle PBK = \frac{1}{2}\angle PBE = \frac{1}{2}(60^0 - \alpha)$.

В треугольнике BDE: $\angle DBE = 60^0 - \alpha < 60^0 =>$ самый маленький. Так как DP и DK – параллельные (перпендикулярные AC), то величины дуг DE, BF и PK – равны, следовательно, $DEKP$ и $BFKP$ – равнобедренные трапеции $=> \angle PKE = \angle DEK = \angle BFK = \angle EDB$.

Из рисунка следует, что $\angle BDE = \angle PKF = \angle PKC + \angle CKB + \angle BKF =$ $\angle PAC + \angle CAB + \angle DAE = \angle CAD + \angle CAB + \angle DAE = \alpha - 30^0 + \alpha + 30^0 -$ $\frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{2}\alpha.$

Углы B, D, E в треугольнике BDE образует в данном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, так как $\angle DBE = 60^0 - \alpha$, $\angle BDE = \frac{3}{2}\alpha$, $\angle DEB = 120^0 - \frac{1}{2}\alpha$ и $\alpha < 60^0$ $=> \angle BDE < \angle DEB =>$ $\angle BDE = 60^0 = \frac{3}{2}\alpha => \alpha = 40^0 => \gamma = 80^0$.

Ответ: 80^0

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.

14	При верном и обоснованном ходе решения (доказано, что $\angle B = \frac{1}{3}(\angle A + \angle B + \angle C) = 60^0$ и точки C, D, E, A – принадлежат одной окружности, $\angle DBE = 60^0 - \alpha < 60^0 =>$ самый маленький), но получен неверный ответ, или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6: На конкурсе проектов участвовало 12 команд. Жюри, в состав которого входили председатель и еще M человек, оценивали эти проекты и присуждали им места с 1 по 12 по своему усмотрению, но каждый по следующему принципу. Сначала проекту присуждал место председатель, а затем каждый из членов жюри мог присудить такое место этому проекту в своем списке, которое отличается от мест других членов и председателя не более чем на три. Победителем признается проект, у которого наименьшая сумма мест, поставленная каждым из членов жюри, включая председателя. Если наименьшая сумма мест у двух или более участников, то победитель определяется особым порядком. Известно, что победитель набрал наибольшую из возможных сумм – 23, а особый порядок присуждения первого места не понадобился. Чему равно M?

Решение: Рассмотрим группу проектов, которым хотя бы раз присуждали 1-е место. Очевидно, что в такой группе могло быть только 1, 2, 3 или 4 проекта. Действительно, если в группе более 4 проектов, то они, по условию, не должны опускаться ниже 4-го места, а таких мест даже на 5 команд уже не хватает.

Если все $N = M + 1$ первых мест достались одному проекту, то он набрал N баллов.

Если все N первых мест достались двум проектам, то наибольшее число баллов у первого места – это не более чем $(N \cdot 1 + N \cdot 4) : 2 = 2{,}5N$ баллов, но тогда наступает особый порядок, если N – четное, следовательно, $[2{,}5N - 0{,}5]$ баллов, (где [x] – целая часть x).

Если все N первых мест достались трем проектам, то наибольшее число баллов у первого места – это не более чем $(N \cdot 1 + N \cdot 3 + N \cdot 4) : 3 = 2,(6)N$ баллов, но тогда, чтобы не наступал особый порядок $[2,(6)N - 0{,}5]$ баллов – это наибольшее из возможных.

Если все N первых мест достались четырем проектам, то наибольшее число баллов у первого места – это не более чем $(N \cdot 1 + N \cdot 2 + N \cdot 3 + N \cdot 4) : 4 = 2{,}5N$ баллов, но тогда наступает особый порядок, если N – четное, следовательно, $[2{,}5N - 0{,}5]$ баллов, (где [x] – целая часть x).

Очевидно, что максимум при $N = 9 \Rightarrow [2,(6) \cdot 9 - 0{,}5] = 23$.

Пример. 1-е место (1,1,1,1,3,4,4,4,4), 2-е место (4,4,4,3,1,3,3,1,1), 3-е место (3,3,3,4,4,1,1,3,3), 4-е место (2,2,2,2,2,5,5,5,5), 5-е место (5,5,5,5,5,2,2,2,2), 6-е место (6,6,6,6,6,6,6,6,6), 7-е место (7,7,7,7,7,7,7,7,7), 8-е место (8,8,8,8,8,8,8,8,8) 9-е место (9,9,9,9,9,9,9,9,9), 10-е место (10,10,10,10,10,10,10,10,10), 11-е место (11,11,11,11,11,11,11,11,11) и 12-е место (12,12,12,12,12,12,12,12,12).

Ответ: 8.

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.

18	При верном и обоснованном ходе решения допущены логические ошибки или при верном ответе решение недостаточно обосновано или нет примера.
12	Разобраны не все варианты.
8	Доказано, что 1 место может быть присуждено не более чем 4 командам.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.