

**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

№1. Имеется некоторый объем водного раствора кислоты 70%-ой концентрации. Отлили треть объема этого раствора и тут же долили такой же объем раствора кислоты 2%-ой концентрации (полный объем раствора не изменился). Данную процедуру повторили еще 6 раз (всего 7 раз, включая первую). Найдите концентрацию кислоты, полученной после проведения всех процедур. Результат округлите до целого числа.

Решение.

1)

	Масса раствора	%	Масса кислоты
1	$2x/3$	70	$2 \cdot 70x/300$
2	$x/3$	2	$2x/300$
1+2	x	$(2 \cdot 70 + 2)/3$	$x(2 \cdot 70 + 2)/300$

2)

	Масса раствора	%	Масса кислоты
1	$2x/3$	$(2 \cdot 70 + 2)/3$	$x(4 \cdot 70 + 4)/900$
2	$x/3$	2	$2x/300$
1+2	x	$(4 \cdot 70 + 4 + 3 \cdot 2)/9$	$x(4 \cdot 70 + 4 + 3 \cdot 2)/900$

3)

	Масса раствора	%	Масса кислоты
1	$2x/3$	$(4 \cdot 70 + 4 + 3 \cdot 2)/9$	$x(8 \cdot 70 + 8 + 3 \cdot 4)/2700$
2	$x/3$	2	$2x/300$
1+2	x	$(8 \cdot 70 + 8 + 3 \cdot 4 + 3^2 \cdot 2)/27$	$x(8 \cdot 70 + 8 + 3 \cdot 4 + 3^2 \cdot 2)/2700$

.....

7)

	Масса раствора	%	Масса кислоты
1	$2x/3$	$\frac{2^6 \cdot 70 + 2^6 + 3 \cdot 2^5 + \dots + 3^5 \cdot 2}{3^6}$	$\frac{x(2^7 \cdot 70 + 2^7 + 3 \cdot 2^6 + \dots + 3^5 \cdot 2^2)}{3^7 \cdot 100}$
2	$x/3$	2	$2x/300$
1+2	x	$\frac{2^7 \cdot 70 + 2^7 + 3 \cdot 2^6 + \dots + 3^6 \cdot 2}{3^7}$	$\frac{x(2^7 \cdot 70 + 2^7 + 3 \cdot 2^6 + \dots + 3^6 \cdot 2)}{3^7 \cdot 100}$

**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

$$n = \frac{2^7 \cdot 70 + 2^7 + 3 \cdot 2^6 + \dots + 3^6 \cdot 2}{3^7} = \frac{8960 + 2(3^7 - 2^7)}{2187} = \frac{13078}{2187} \approx 6.$$

Ответ: 6.

Критерии оценивания

Дан верный ответ.	5
Задание решено неверно.	0

№2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{7x} + 17\sqrt{y} = z\sqrt{2023}, \text{ если } z \leq 10?$$

Решение: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

$$\sqrt{7x} + 17\sqrt{y} = z\sqrt{7 \cdot 17 \cdot 27} \Rightarrow \frac{\sqrt{7x+17\sqrt{22y}}}{17\sqrt{7}} = z \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{289}} + \sqrt{\frac{y}{7}} = z$$

Если a, b и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ – рациональные числа, то \sqrt{a} и \sqrt{b} тоже рациональные числа. Действительно, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ – рациональное число, \sqrt{a} и \sqrt{b} – полусумма и полуразность рациональных чисел $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Поэтому x должно делиться нацело на 289, а y – на 7, т.е. $x = 289n, y = 7m$, и приходим к уравнению в целых числах $\sqrt{n} + \sqrt{m} = z$.

- 1) $z = 0$, **одно** решение $x = 0, y = 0$;
- 2) $z = 1$, **два** решения: $x = 0, y = 7; x = 289, y = 0$;
- 3) $z = 2$, **три** решения: $x = 0, y = 28; x = 289, y = 7; x = 1156, y = 0$;
- 4) $z = 3$, **четыре** решения: $x = 0, y = 63; x = 289, y = 28; x = 1156, y = 7;$
 $x = 2601, y = 0$;
- 5) $z = 4$, **пять** решений: $x = 0, y = 112; x = 289, y = 63; x = 1156, y = 28;$
 $x = 2601, y = 7; x = 4624, y = 0$;
- 6) $z = 5$, **шесть** решений: $x = 0, y = 175; x = 289, y = 112; x = 1156, y = 63;$
 $x = 2601, y = 28; x = 4624, y = 7; x = 7225, y = 0$;
- 7) $z = 6$, **семь** решений: $x = 0, y = 252; x = 289, y = 175; x = 1156, y = 112;$
 $x = 2601, y = 63; x = 4624, y = 28; x = 7225, y = 7; x = 10404, y = 0$;

**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

8) $z = 7$, **восемь** решений: $x = 0, y = 343$; $x = 289, y = 252$; $x = 1156, y = 175$;
 $x = 2601, y = 112$; $x = 4624, y = 63$; $x = 7225, y = 28$; $x = 10404, y = 7$;
 $x = 14161, y = 0$;

9) $z = 8$, **девять** решений: $x = 0, y = 448$; $x = 289, y = 343$; $x = 1156, y = 252$;
 $x = 2601, y = 175$; $x = 4624, y = 112$; $x = 7225, y = 63$; $x = 10404, y = 28$;
 $x = 14161, y = 7$; $x = 18496, y = 0$;

10) $z = 9$, **десять** решений: $x = 0, y = 567$; $x = 289, y = 448$; $x = 1156, y = 343$;
 $x = 2601, y = 252$; $x = 4624, y = 175$; $x = 7225, y = 112$; $x = 10404, y = 63$;
 $x = 14161, y = 28$; $x = 18496, y = 7$; $x = 23409, y = 0$;

11) $z = 9$, **одиннадцать** решений: $x = 0, y = 700$; $x = 289, y = 567$; $x = 1156, y = 448$;
 $x = 2601, y = 343$; $x = 4624, y = 252$; $x = 7225, y = 175$; $x = 10404, y = 112$;
 $x = 14161, y = 63$; $x = 18496, y = 28$; $x = 23409, y = 7$; $x = 28900, y = 0$.

$$S = \frac{1 + 11}{2} \cdot 11 = 66.$$

Ответ: 66

Критерии оценивания

Дан верный ответ.	5
Задание решено неверно.	0

№3. Решите неравенство $\left| g\left(2\sqrt{2,5 - g(x)}\right) - 2 \right| \geq 1$, где $g(x) = \frac{3}{|x - 2| + 1}$. В ответ запишите сумму решений этого неравенства. Если решений бесконечно много или они отсутствуют, то в ответ запишите 0. (6 баллов)

Решение:

Функция

$g(x) = \frac{3}{|x - 2| + 1}$ определена

на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0; 3]$. Функция

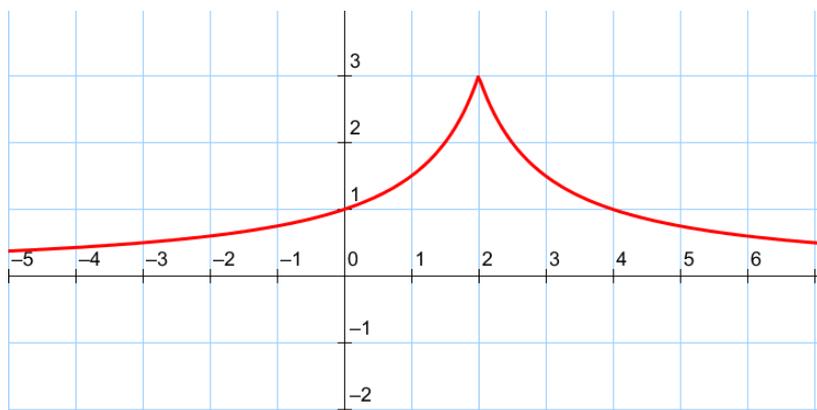
$g(x)$ достигает максимального

значения в точке $x = 2$,

$g_{\max} = g(2) = 3$, на промежутке

$(-\infty; 2)$ функция $g(x)$ возрастает,

на промежутке $(2; +\infty)$ — убывает. График функции $g(x)$ изображен на рисунке.



**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

Функция $\phi(t) = 2\sqrt{2,5-t}$ определена для $t \in (-\infty; 2,5]$. При $t = g(x)$ функция $\phi(t) = 2\sqrt{2,5-t}$ принимает свои значения при $t \in (0; 2,5]$, причем множество значений этой функции есть отрезок $[0; 2\sqrt{2,5})$. Для нахождения множества значений функции $f(x) = g(2\sqrt{2,5-g(x)})$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $[0; 2\sqrt{2,5})$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[1; 3]$.

$$\text{Тогда } \left| g\left(2\sqrt{2,5-g(x)}\right) - 2 \right| \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g\left(2\sqrt{2,5-g(x)}\right) \geq 3, \\ g\left(2\sqrt{2,5-g(x)}\right) \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g\left(2\sqrt{2,5-g(x)}\right) = 3, \\ g\left(2\sqrt{2,5-g(x)}\right) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2,5-g(x)} = 2, \\ 2\sqrt{2,5-g(x)} = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 1,5, \\ g(x) = 2,5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| = 1, \\ |x-2| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, x = 1, \\ x = 2, x = 2, x = 1, 8. \end{cases}$$

Ответ: 8

Критерии оценивания

Дан верный ответ.	12
Задание решено неверно.	0

№4. Имеются 5 тюленей, 4 котика и 3 моржа. Сколькими способами можно выбрать из них 5 животных так, чтобы среди выбранных присутствовали все три вида, но никакой вид не составлял абсолютного большинства? (12 баллов)

Решение.

Есть три варианта:

$$2T + 2K + 1M \text{ — число способов } C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = 10 \cdot 6 \cdot 3 = 180$$

$$2T + 1K + 2M \text{ — число способов } C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 10 \cdot 4 \cdot 3 = 120$$

$$1T + 2K + 2M \text{ — число способов } C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^2 = 5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$$

Ответ: 390

№5. С каким остатком число 2023^{2024} делится на 13? (12 баллов)

Решение.

(12

**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

Поскольку $2023 = 156 \cdot 13 - 5$, искомым остаток такой же, как у $(-5)^{2024} = 5^{2024}$.
Далее, заметим, что $5^4 = 625 = 48 \cdot 13 + 1$, так что остаток при делении на 13 одинаков у чисел $5^{2024} = 625^{506}$ и $1^{506} = 1$.

Ответ: 1

Критерии оценивания

Дан верный ответ.	12
Задание решено неверно.	0

№6. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB , если точка A принадлежит кривой $5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 24 = 0$, а точка B – одному из графиков семейства функций $y = (k^2 + 2k + 3)|x - 3|, k \in \mathbb{R}$? В ответ запишите сумму квадрата найденной наименьшей длины и значения k , при котором эта длина достигается. (12 баллов)

Решение.

Угловой коэффициент прямой $y = (k^2 + 2k + 3)(x - 3)$ (правая ветвь угла) будет минимальным при $k = -1$, и будет равен 2. Левая ветвь угла при этом задается уравнением $y = -2(x - 3)$.

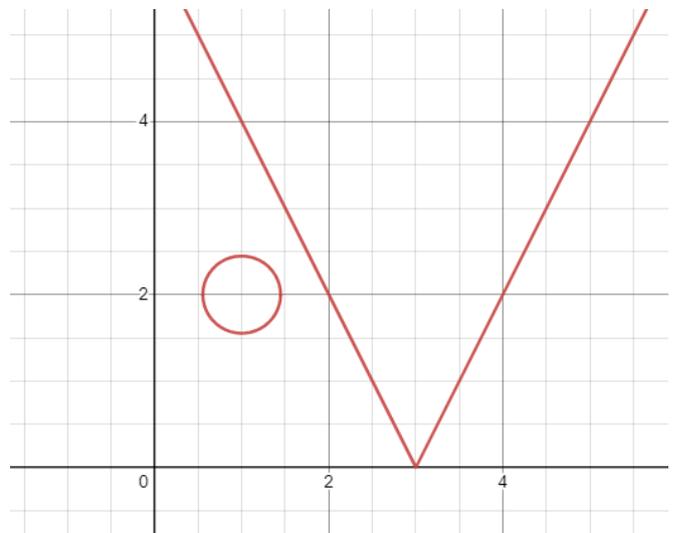
Минимальное расстояние от точки на окружности

$5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 24 = 0$, или

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0,2$, до прямой

$y = -2(x - 3)$ равно разности расстояния d от центра $(1; 2)$ этой окружности до указанной прямой и радиуса $r = \sqrt{0,2}$ этой окружности:

$$d - r = \frac{|2 \cdot 1 + 2 - 6|}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



Следовательно, в ответе имеем $0,2 - 1 = -0,8$.

Ответ: -0,8

№7. В равнобедренном треугольнике ABC углы при основании AC равны 80° , боковая сторона $AB = 2 \cos 10^\circ / (1 - \cos 40^\circ)$. На сторонах AB и BC выбраны точки E и D соответственно, причем угол CAD равен 50° , а угол ACE равен 60° . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AED . (16 баллов)

**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

Решение.

Проведем $EF \parallel AC$, $\angle FAC = 60^\circ$.

Треугольники AGC и EFG равносторонние.

Треугольник ABC равнобедренный, $\angle ACB = 80^\circ$.

Треугольник ADC равнобедренный, поскольку $\angle DAC = \angle ADC = 50^\circ$, $AC = CD$.

Поскольку $AC = CG$, то треугольник DCG равнобедренный, $CD = CG$, $\angle CGD = 80^\circ$.

Тогда $\angle AFC = \angle FGD = 40^\circ$, и треугольник FGD равнобедренный, $FD = DG$.

Треугольники DGE и DFE равны.

$$\angle CED = \frac{\angle CEF}{2} = 30^\circ.$$

Треугольники ABD и CED подобны. Имеем

$$\frac{ED}{AD} = \frac{DC}{BD} = \frac{EC}{AB}.$$

По теореме синусов для треугольника ADE

$$\text{получаем } \frac{ED}{\sin 30^\circ} = \frac{AD}{\sin 70^\circ} \Rightarrow \frac{ED}{AD} = \frac{1}{2 \sin 70^\circ}.$$

$$\text{Тогда } \frac{DC}{BD} = \frac{1}{2 \sin 70^\circ},$$

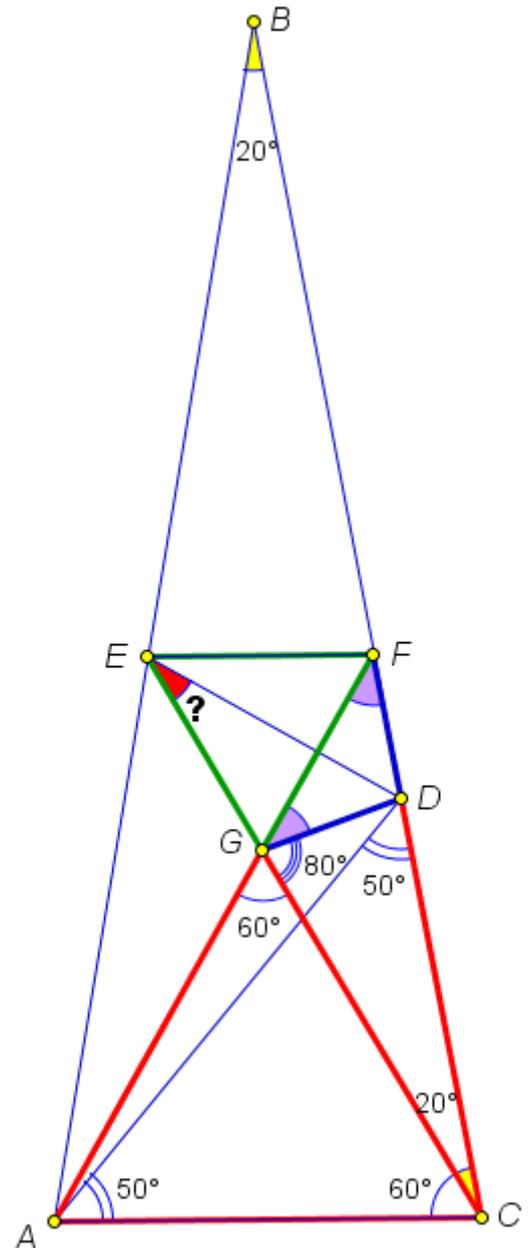
$$BC = 2 \cos 10^\circ / (1 - \cos 40^\circ) = DC + BD = DC(1 + 2 \sin 70^\circ).$$

$$\begin{aligned} DC &= \frac{2 \cos 10^\circ}{(1 - \cos 40^\circ)(1 + 2 \sin 70^\circ)} \\ &= \frac{2 \cos 10^\circ}{2 \sin^2 20^\circ (1 + 2 \sin 70^\circ)} = \\ &= \frac{1}{2 \sin 20^\circ \sin 10^\circ (1 + 2 \sin 70^\circ)} \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ED &= 2DC \sin 20^\circ = \frac{2 \cos 10^\circ}{(1 + 2 \sin 70^\circ) \sin 20^\circ} = \frac{2 \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ (1 + 2 \cos 20^\circ)} \\ &= \frac{2 \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ} = \frac{2 \cos 10^\circ}{2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ} = 2 \Rightarrow R = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2

Критерии оценивания



**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

Дан верный ответ.	16
Задание решено неверно.	0

№8. Найдите все значения параметра p , при которых система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} y^2 = \frac{1+\cos x}{2} \\ px^2 + p - 3 = 2x^2 + y - \sqrt{\frac{1-\cos(4x)}{2}} \end{cases}$$

В ответе выпишите наименьшее из

полученных значений параметра.

(16 баллов)

Решение.

$$\begin{cases} y^2 = \frac{1+\cos x}{2} \\ px^2 + p - 3 = 2x^2 + y - |\sin 2x| \end{cases}$$

Все функции, входящие в уравнения

системы являются четными относительно x , поэтому для единственности решения

необходимо, чтобы $x=0$. Тогда получаем $\begin{cases} y^2 = 1 \\ p - 3 = y \end{cases}$, значит $\begin{cases} y = 1 \\ p = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = -1 \\ p = 2 \end{cases}$

При $p=4$ получаем уравнение $2x^2 + 1 = y - |\sin 2x|$. Из первого уравнения системы следует, $|y| \leq 1$. Поскольку $2x^2 + 1 \geq 1, y - |\sin 2x| \leq 1$, то равенство возможно, если $2x^2 + 1 = 1$ и $y - |\sin 2x| = 1$. Это возможно только, если $x = 0, y = 1$. Решение системы единственно.

При $p=2$ решением системы является пара $x = 2\pi k, y = -1$ при любом $k \in Z$, следовательно, решений бесконечно много.

Ответ: 4.

Критерии оценивания

Дан верный ответ.	16
Задание решено неверно.	0

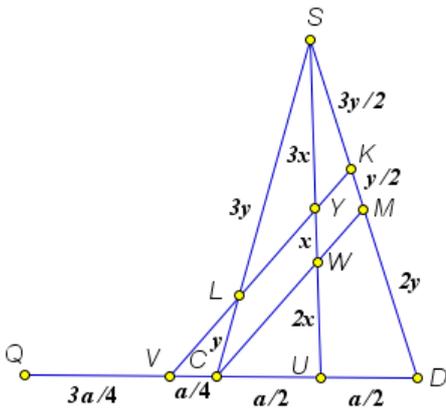
**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

№9. Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через центр основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF . Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость сечения разбивает пирамиду, если плоскость сечения наклонена к плоскости основания пирамиды под углом $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Решение представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m и n - натуральные числа.

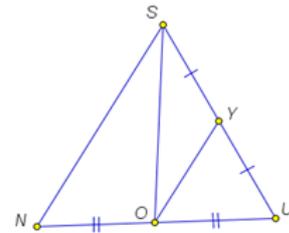
В ответ записать сумму $m + n$. (16 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. В плоскости SNU (SU – апофема грани SCD) через точку O проведем прямую OY , параллельную SN , $Y \in SU$, OY – средняя линия треугольника SNU .



$$SK:KD = 3:5$$

$$SL:LC = 3:1$$



**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

В плоскости SCD через точку Y проведем прямую KL , параллельную CM , $K \in SD$, $L \in SC$.

Медианы SU и CM треугольника SCD в точке пересечения W делятся в отношении 2:1, т.е. $SW:WU = 2:1$. Имеем $SY:YW:WU = 3:1:2$. Согласно теореме Фалеса, приходим к соотношениям $SL:LC = 3:1$, $SK:KD = 3:5$.

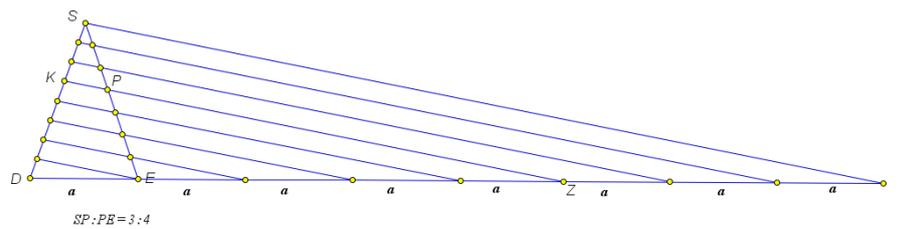
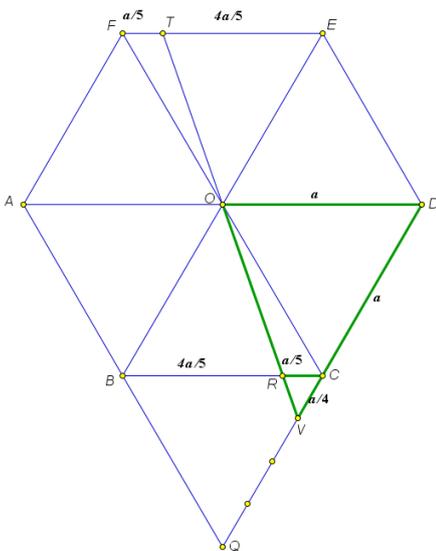
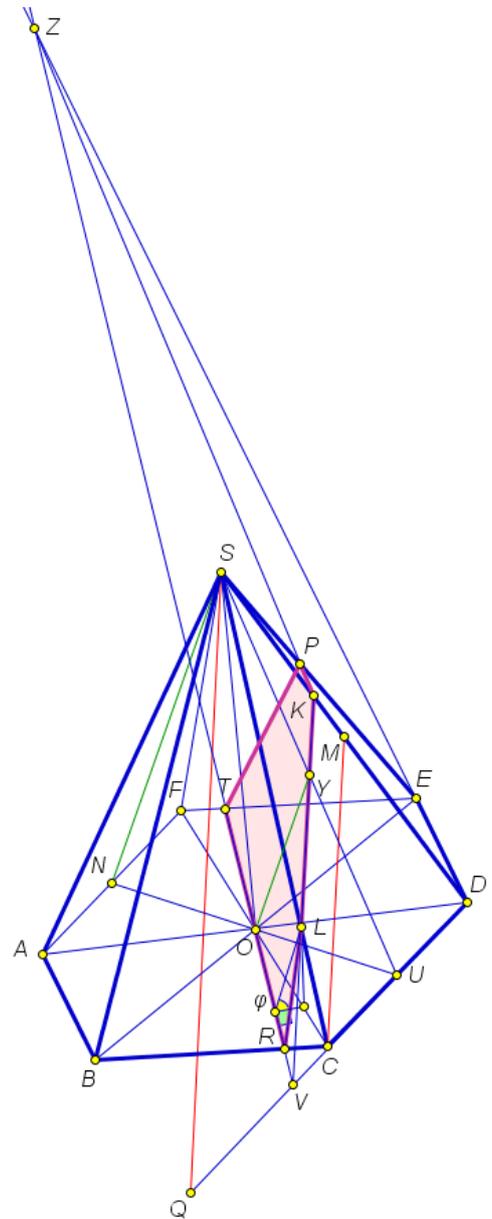
Точка V – точка пересечения прямой KL и CD , $KM:MD = VC:CD = 1:4$.

В плоскости основания проведем прямую VO , точки R и T – точки пересечения со сторонами BC и FE соответственно. Треугольники RCV и ODV подобны, и $SL:LC = 3:1$, $SK:KD = 3:5$. Обозначим сторону основания a , тогда $RC = FT = a/5$, $BR = TE = 4a/5$.

Точка Z – точка пересечения прямых RT и DE . Треугольники TZE и OZD подобны, и $TE:OD = ZE:ZD = 4:5$, $ED = a$, $ZE = 4a$.

В плоскости SDE точка P – точка пересечения прямых ZK и SE . По теореме Фалеса имеем $SP:PE = 3:4$.

Искомое сечение $KLRT$.

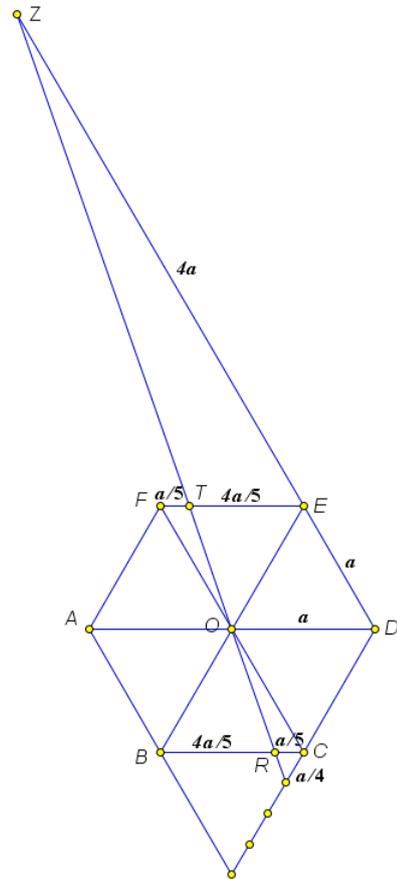
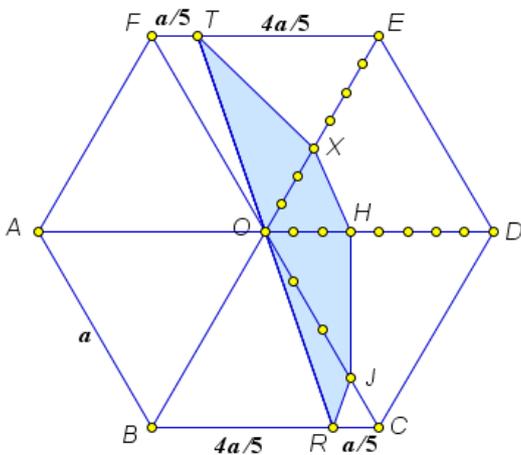


**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

Площадь сечения будем вычислять по формуле

$$S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi}, \text{ где } S_{np} - \text{ площадь проекции сечения на}$$

плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.



Проекцией является пятиугольник $TXHJR$. Площадь проекции сечения вычисляется

$$\text{по формуле } S_{np} = S_{ORJ} + S_{OJH} + S_{OHX} + S_{OXT} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{20} + \frac{9}{32} + \frac{9}{56} + \frac{12}{35} \right) = \frac{a^2 1047 \sqrt{3}}{4 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 5}$$

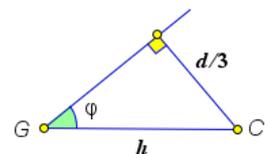
Обозначим расстояние от точки S до плоскости сечения d . Расстояние от точки C до сечения равно $d/3$. В треугольнике RCV проведем высоту CG , обозначим ее длину h .

Тогда $\sin \varphi = \frac{d}{3h}$, $\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{d^2}{9h^2}}$. Найдем RV по теореме косинусов:

$$RV^2 = \frac{a^2}{25} + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{20} = \frac{21a^2}{400}. \text{ Используя различные формулы для нахождения площади}$$

треугольника RCV , имеем $\frac{a\sqrt{21}}{20} h = \frac{a^2}{20} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $h = \frac{a}{2\sqrt{7}}$. Тогда

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{d^2}{9h^2}} = \sqrt{1 - \frac{28d^2}{9a^2}}, \quad d = \frac{3a}{8} \sqrt{\frac{13}{7}}.$$



**Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
11 класс**

Имеем $S_{\text{сеч}} = \frac{a^3 3141\sqrt{3}}{4480\sqrt{9a^2 - 28d^2}}$, $S_{\text{сеч}} = \frac{1047a^2}{1120}$. Вычислим объем пирамиды $SKL RTP$:

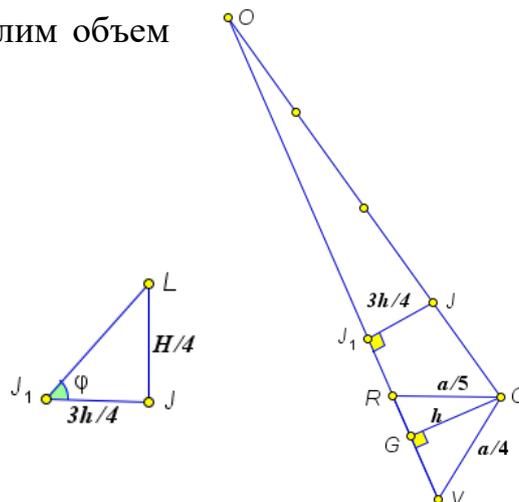
$$V_{SKL RTP} = \frac{1}{3} S_{\text{сеч}} d = \frac{1047a^2}{3 \cdot 1120} \frac{3a}{8} \sqrt{\frac{13}{7}} = \frac{1047a^3}{1120 \cdot 8} \sqrt{\frac{13}{7}}.$$

Найдем высоту H пирамиды $S ABCDEF$. $\text{tg} \varphi =$

$$\sqrt{\frac{13}{3}}, H = 3h \text{tg} \varphi = \frac{3a}{2\sqrt{7}} \cdot \sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \sqrt{\frac{13}{7}}.$$

Объем V пирамиды $S ABCDEF$ равен: $V =$

$$\frac{1}{3} \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \sqrt{\frac{13}{7}} = \frac{3a^3}{4} \sqrt{\frac{13}{7}}.$$



$$V_1 = \frac{V}{2} + V_{SKL RTP} = \frac{3a^3}{8} \sqrt{\frac{13}{7}} + \frac{1047a^3}{1120 \cdot 8} \sqrt{\frac{13}{7}} = \frac{3a^3}{8} \sqrt{\frac{13}{7}} \cdot \frac{1469}{1120},$$

$$V_2 = \frac{V}{2} - V_{SKL RTP} = \frac{3a^3}{8} \sqrt{\frac{13}{7}} - \frac{1047a^3}{1120 \cdot 8} \sqrt{\frac{13}{7}} = \frac{3a^3}{8} \sqrt{\frac{13}{7}} \cdot \frac{771}{1120},$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1469}{771}.$$

Ответ: 2240.

Критерии оценивания

Дан верный ответ.	16
Задание решено неверно.	0