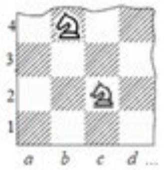
Профиль: компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике

Вариант: 1 Класс: 11



Задача 1 (10 *баллов*). На шахматную доску, состоящую из 8×7 клеток, поставили двух белых коней. С какой вероятностью они будут находиться под защитой друг друга? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.)

Задача 2 (10 *баллов*). В остроугольный треугольник ABC со сторонами $AB=8,\ BC=9{,}5$ вписана окружность с центром в точке O, которая касается сторон BC и AB в точках M и N соответственно. На прямой MN отмечена точка K так, что угол OCK равен 60°. Найдите площадь четырехугольника $BOCK$, если площадь треугольника ABC равна $21\sqrt{3}$.

Задача 3 (12 *баллов*). Найдите все действительные значения x, которые являются решениями неравенства $\log_{9x^2-x^4}(9a-ax^2)\le 1$ при любых $a\in(0;4)$.

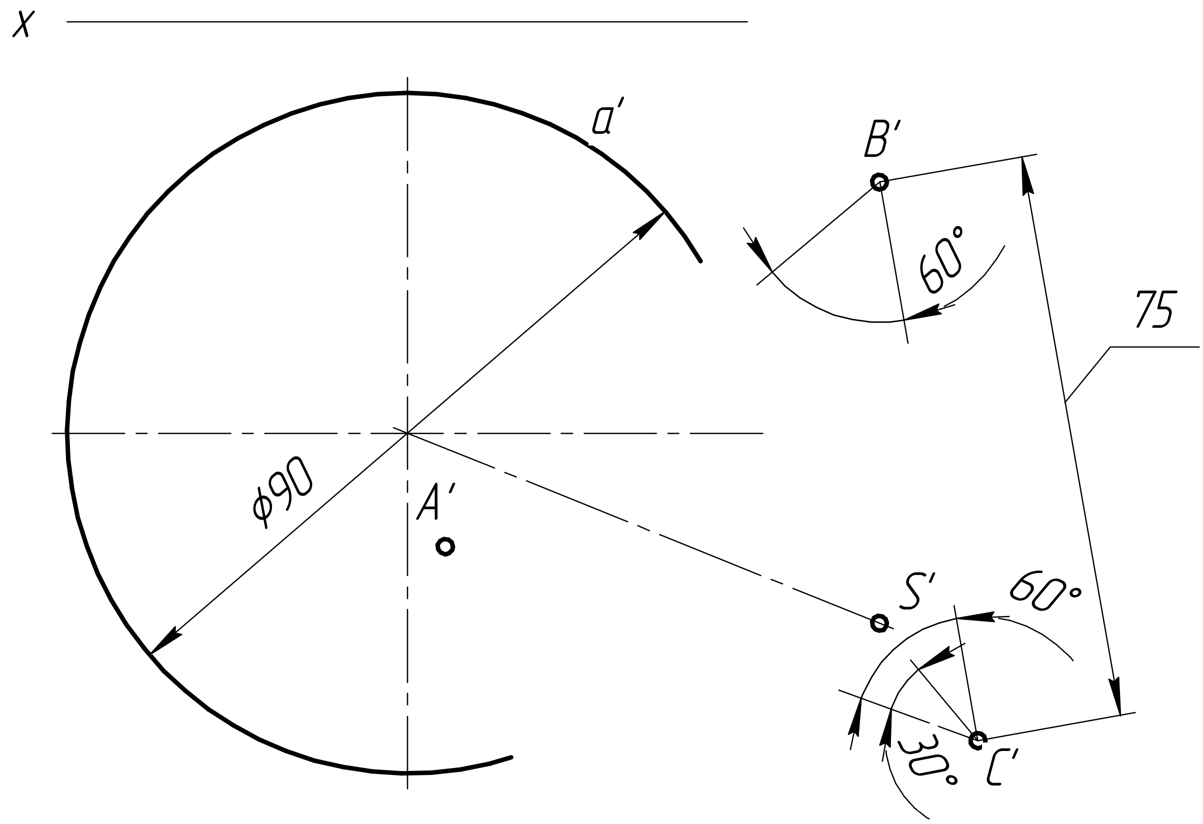
Задача 4 (10 *баллов*). См. лист 2.

Задача 5 (8 *баллов*). Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 4) является круг с центром в точке O и диаметром 90 *мм*. Пирамида $SABC$, основанием которой является равносторонний треугольник ABC со стороной 75 *мм*, и конус имеют общую вершину S. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 *мм*, высота пирамиды равна 50 *мм*. Точки A', B', C', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса. Точка S' лежит на высоте $C'D'$ треугольника $A'B'C'$. Прямая OX перпендикулярна прямой $S'B'$, угол между прямыми OX и $A'C'$ составляет 20°, расстояние от точки A' до прямой OX равно 15 *мм*, $OA'=5\sqrt{10}$ *мм*. Найдите длину отрезка касательной, проведенной из точки S' к основанию конуса, и площадь объединенной фронтальной проекции двух фигур (см. условие задачи 5). (Указание: при расчетах считать $\cos 40^\circ = 0{,}8$.)

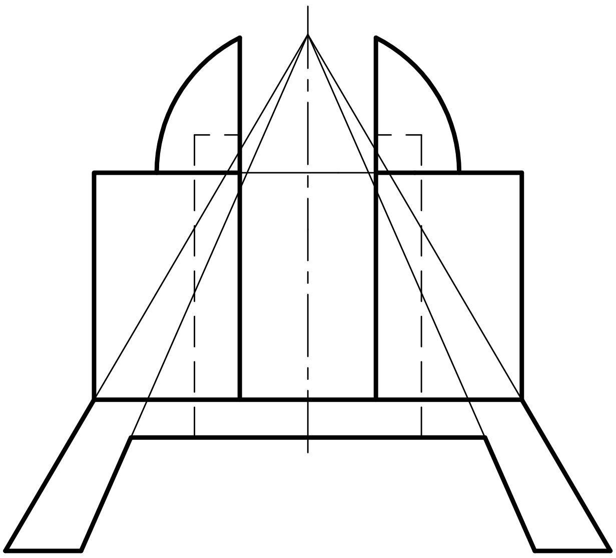
Задача 6 (20 *баллов*). См. лист 3.

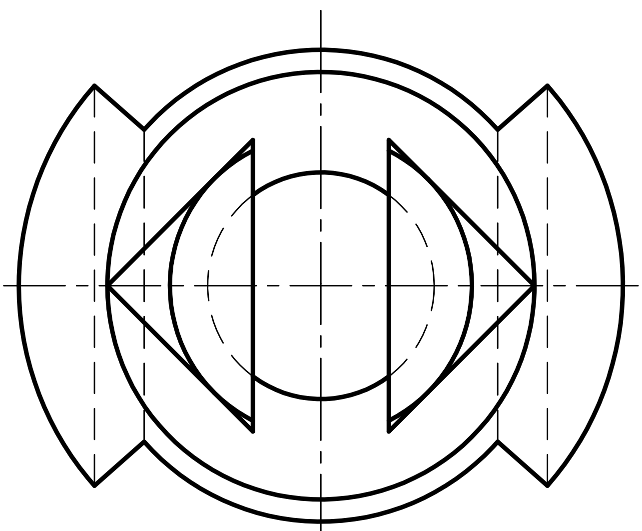
Задача 4 (10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания наклонного конуса **a'** и вершин основания пирамиды **A'B'C'**. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 мм. Высота пирамиды 50 мм. Требуется:

1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин проекций и видимости линий;
3) оформить все изображения в соответствии с ЕСКД.

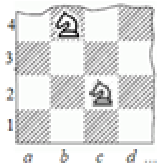


Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции фигуры.
Требуется:
1) на месте вида слева оформить изображение как соединение части вида и части профильного разреза;
2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза;
3) все изображения оформить в соответствии с ЕСКД;
4) нанести размеры, причем их количество должно быть минимальное, но однозначно определяющее форму фигуры;
5) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.





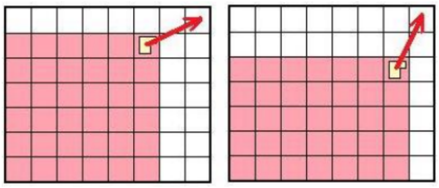
Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)



1. На шахматную доску, состоящую из 8×7 клеток, поставили двух белых коней. С какой вероятностью они будут находиться под защитой друг друга? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (10 баллов)

Решение:

Решение. Сосчитаем количество позиций, где тот белый конь, который стоит левее, защищает другого по каждому из 4 возможных векторов.



Чтобы защищать по вектору (2;1) (рис. слева), конь должен стоять на одной из $6 \cdot 6 = 36$ закрашенных клеток, при этом позиция другого коня определяется однозначно; аналогичная картина для вектора $(2; -1)$.

Чтобы защищать по вектору (1;2) (рис. справа), конь должен стоять на одной из $7 \cdot 5 = 35$ закрашенных клеток, при этом позиция другого коня определяется однозначно; аналогичная картина для вектора $(1; -2)$.

Вычислим вероятность, разделив число найденных позиций на число всех позиций двух одинаковых коней:

$$P = \frac{2 \cdot 36 + 2 \cdot 35}{C_{56}^2} = \frac{2 \cdot 71}{56 \cdot 55/2} = \frac{71}{14 \cdot 55}$$

Ответ: $71/770$.

2. В остроугольный треугольник ABC со сторонами $AB=8,\ BC=9{,}5$ вписана окружность с центром в точке O, которая касается сторон BC и AB в точках M и N соответственно. На прямой MN отмечена точка K так, что угол OCK равен $60°$. Найдите площадь четырехугольника $BOCK$, если площадь треугольника ABC равна $21\sqrt{3}$. (10 баллов)

Решение.

Используя формулу $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin\beta,\ \beta=\angle ABC,$ найдем угол β: $21\sqrt{3}=\dfrac{19\cdot 8}{4}\sin\beta,$

$\sin\beta=\dfrac{21\sqrt{3}}{38},\quad \cos\beta=\dfrac{11}{38}.$

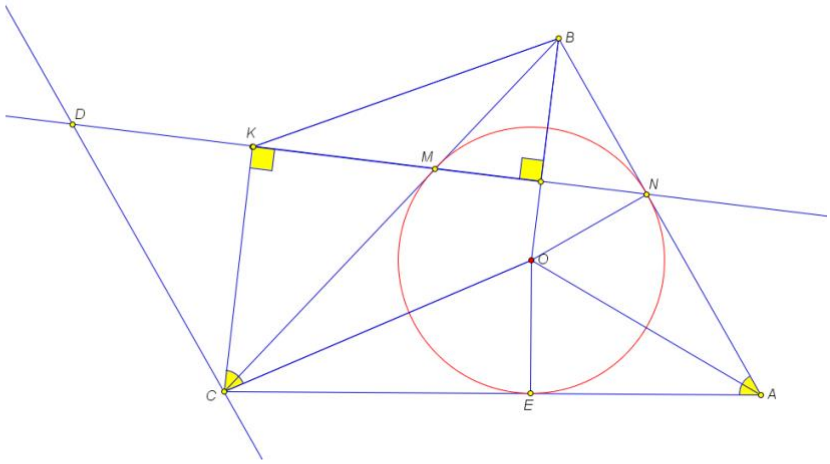
По теореме косинусов найдем сторону AC:

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\beta=64+361/4-44=441/4,\ \ AC=10{,}5.$ Используя формулу

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha,\ \alpha=\angle BAC,$

найдем угол α: $21\sqrt{3}=\dfrac{21\cdot 8}{4}\sin\alpha,$

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \alpha=60°.$



Проведем прямую CD, $CD\parallel AB$, D - точка пересечения с прямой MN. Треугольники BMN и CMD - подобные равнобедренные треугольники. Если CK_1 - биссектриса треугольника MCD, то $\angle OCK_1=\dfrac{\angle ABC+\angle ACB}{2}=90°-\dfrac{\angle BAC}{2}=90°-\dfrac{\alpha}{2}=60°,$ и $K_1=K.$

Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник ABC:

$S_{ABC}=21\sqrt{3},\ S_{ABC}=\dfrac{P_{ABC}r}{2}=\dfrac{(AB+BC+AC)r}{2}=14r,\ \ r=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$ Тогда

$AN=r/\mathrm{tg}\,30°=4{,}5,\quad BN=BM=3{,}5,\quad CM=6.$

Тогда $MN^2=BM^2+BN^2-2BM\cdot BN\cos\beta=\dfrac{49}{2}-\dfrac{49\cdot 11}{76}=\dfrac{49\cdot 27}{76},\ \ MN=\dfrac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{19}},$

$\dfrac{DM}{MN}=\dfrac{CM}{BM}=\dfrac{12}{7},\quad KM=\dfrac{DM}{2}=\dfrac{6MN}{7}=\dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$ Четырехугольник $BOCK$ – трапеция с высотой

$h=KM+\dfrac{MN}{2}=\dfrac{19MN}{14}=\dfrac{3\sqrt{57}}{4}.$ Найдем основания трапеции:

$CK=\sqrt{CM^2-KM^2}=\sqrt{36-\dfrac{81\cdot 3}{19}}=3\sqrt{4-\dfrac{27}{19}}=\dfrac{21}{\sqrt{19}},\quad BO=\sqrt{r^2+BN^2}=\dfrac{\sqrt{27+49}}{2}=\sqrt{19}.$

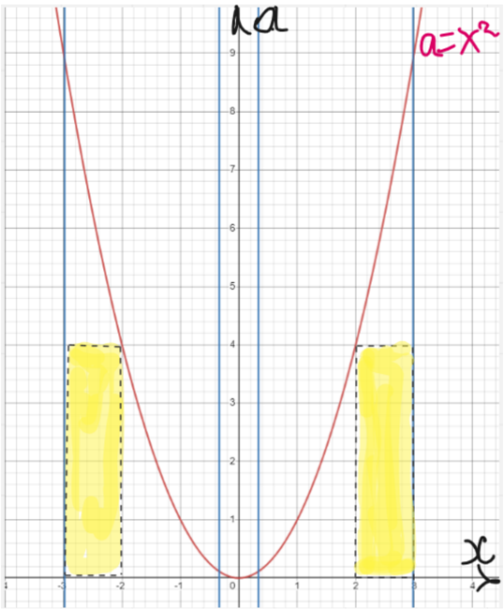
$S_{BOCK} = \dfrac{CK + BO}{2} h = \left(\dfrac{21}{\sqrt{19}} + \sqrt{19} \right) \cdot \dfrac{3\sqrt{57}}{8} = 15\sqrt{3}.$ **Ответ:** $15\sqrt{3}$.

3. Найдите все действительные значения x, которые являются решениями неравенства $\log_{9x^2-x^4}(9a - ax^2) \le 1$ при любых $a \in (0; 4)$. (12 баллов)

Решение:

$$\begin{cases} 9x^2 - x^4 > 0, \\ 9x^2 - x^4 \ne 1, \\ 9a - ax^2 > 0, \\ (9x^2 - x^4 - 1)(9a - ax^2 - 9x^2 + x^4) \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(9 - x^2) > 0, \\ x^4 - 9x^2 + 1 \ne 0, \\ a(9 - x^2) > 0, \\ (x^4 - 9x^2 + 1)(x^2 - 9)(x^2 - a) \ge 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3;0) \cup (0;3), \\ x \ne \pm\sqrt{\dfrac{9 \pm \sqrt{77}}{2}}, \\ a > 0, \\ (x^4 - 9x^2 + 1)(x^2 - a) \le 0. \end{cases}$$



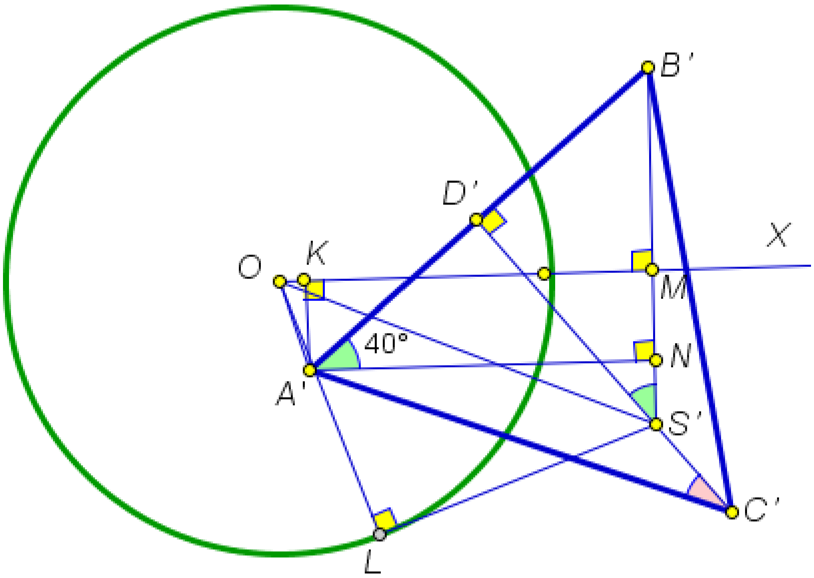
При любых $a \in (0; 4)$ данной системе удовлетворяют $x \in \left(-\sqrt{\dfrac{9 + \sqrt{77}}{2}}; -2 \right] \cup \left[2; \sqrt{\dfrac{9 + \sqrt{77}}{2}} \right)$.

Ответ: $\left(-\sqrt{\dfrac{9 + \sqrt{77}}{2}}; -2 \right] \cup \left[2; \sqrt{\dfrac{9 + \sqrt{77}}{2}} \right)$.

5. Основанием наклонного конуса (см. условие задачи 4) является круг с центром в точке O и диаметром 90 *мм*. Пирамида $SABC$, основанием которой является равносторонний треугольник ABC со стороной 75 *мм*, и конус имеют общую вершину S. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 *мм*, высота пирамиды равна 50 *мм*. Точки A', B', C', S' являются проекциями соответствующих вершин пирамиды на горизонтальную плоскость проекций, в которой лежит основание конуса. Точка S'

лежит на высоте $C'D'$ треугольника $A'B'C'$. Прямая OX перпендикулярна прямой $S'B'$, угол между прямыми OX и $A'C'$ составляет $20°$, расстояние от точки A' до прямой OX равно 15 *мм*, $OA' = 5\sqrt{10}$ *мм*. Найдите длину отрезка касательной, проведенной из точки S' к основанию конуса, и площадь объединенной фронтальной проекции двух фигур (см. условие задачи 4). (Указание: при расчетах считать $\cos 40° = 0{,}8$.)

Решение:



$A'N \parallel OX$, $N \in B'S'$, $\Delta A'NB'$ прямоугольный $\Rightarrow NB' = 75\sin 40° = 45.$

$\Delta D'S'B'$ прямоугольный $\Rightarrow S'B' = 75/(2\sin 40°) = 62{,}5.$

$NS' = S'B' - NB' = 62{,}5 - 45 = 17{,}5.$

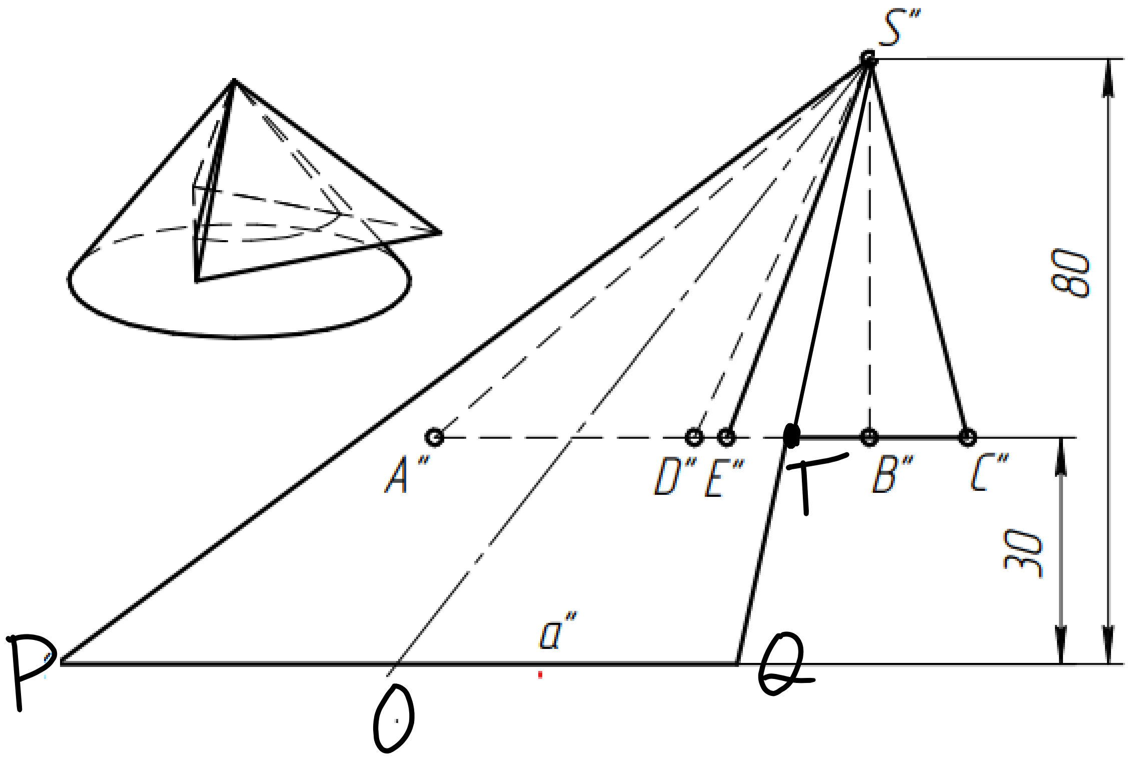
$A'K \perp OX$, $K \in OX$, $A'K = 15.$ $M = OX \cap B'S'$, $MS' = 15 + 17{,}5 = 32{,}5.$

$A'N = 75\cos 40° = 60,$ $OK = 5,$ $OM = 5 + 60 = 65.$

$\Delta OMS'$ прямоугольный $\Rightarrow$ $OS'^2 = OM^2 + MS'^2 = 65^2 + 32{,}5^2 = 5281{,}25.$

$\Delta OS'L$ прямоугольный $\Rightarrow$ $LS'^2 = OS'^2 - OL^2 = 5281{,}25 - 2025 = 3256{,}25.$

$$LS'^2 = \frac{13025}{4} = \frac{25\cdot 521}{4},\ LS' = \frac{5\sqrt{521}}{2}.$$



$$S_{S''PQ} = \frac{90 \cdot 80}{2} = 3600,$$

$$B''C'' = 75\sin 10° = 75\cos 80° = 75(2\cos^2 40° - 1) = 75 \cdot 0,28 = 21$$

$$TB'' = \frac{5}{8}(OM - 45) = \frac{5}{8}(65 - 45) = 12,5$$

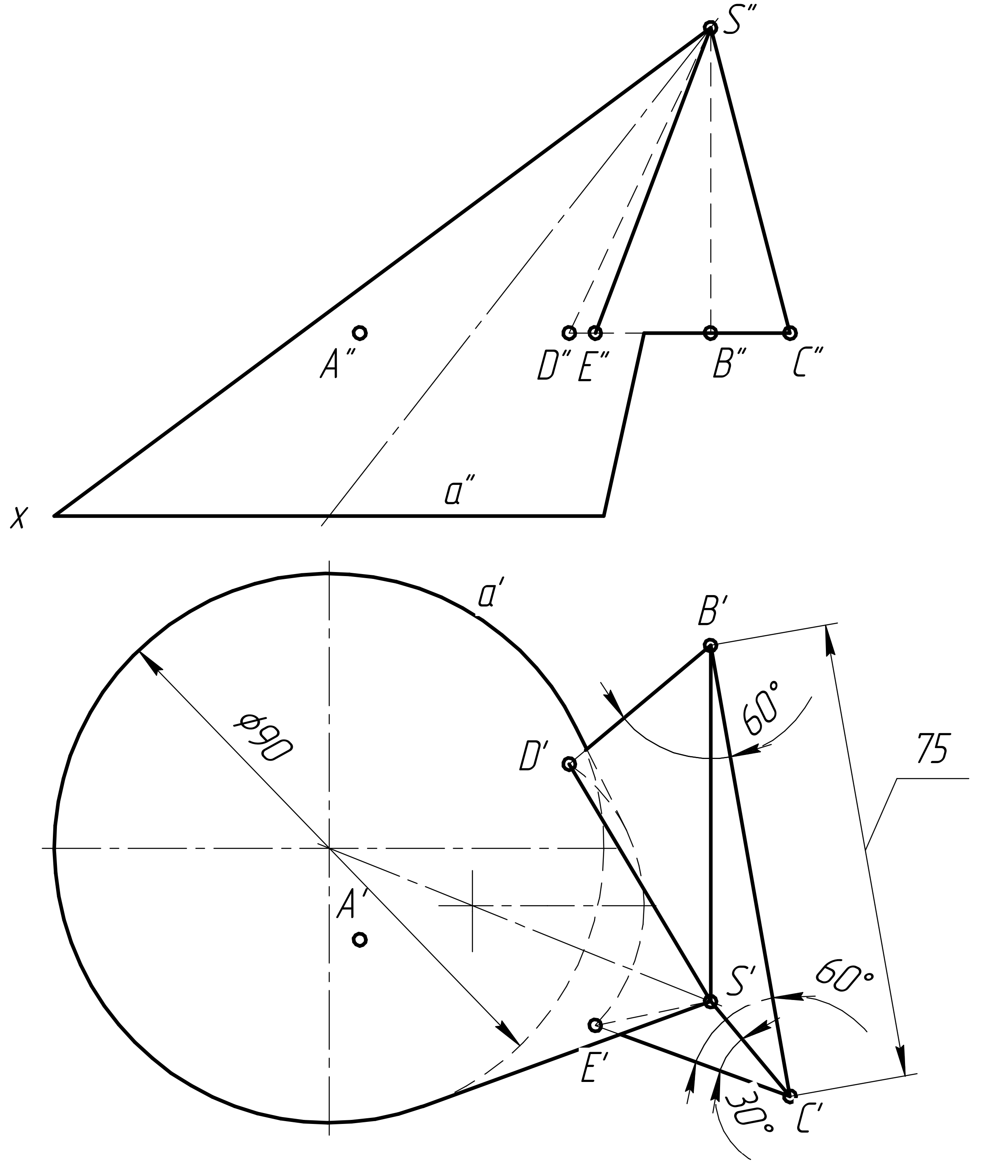
$$TC'' = 12,5 + 21 = 33,5, \; S_{S''TC''} = \frac{33,5 \cdot 50}{2} = 837,5$$

$$S = S_{S''PQ} + S_{S''TC''} == 3600 + 837,5 = 4437,5$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{521}}{2}$ *мм*, $4437,5$ *мм²*

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 2 класс: 10–11

Задача 4а (10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания наклонного конуса **a'** и вершин основания пирамиды **A'B'C'**. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 мм. Высота пирамиды 50 мм.
Требуется:
1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин и границ участков линии;
3) обозначить видимость фигур и линии их пересечения;
4) оформить все изображения по ГОСТ 2.303–306;



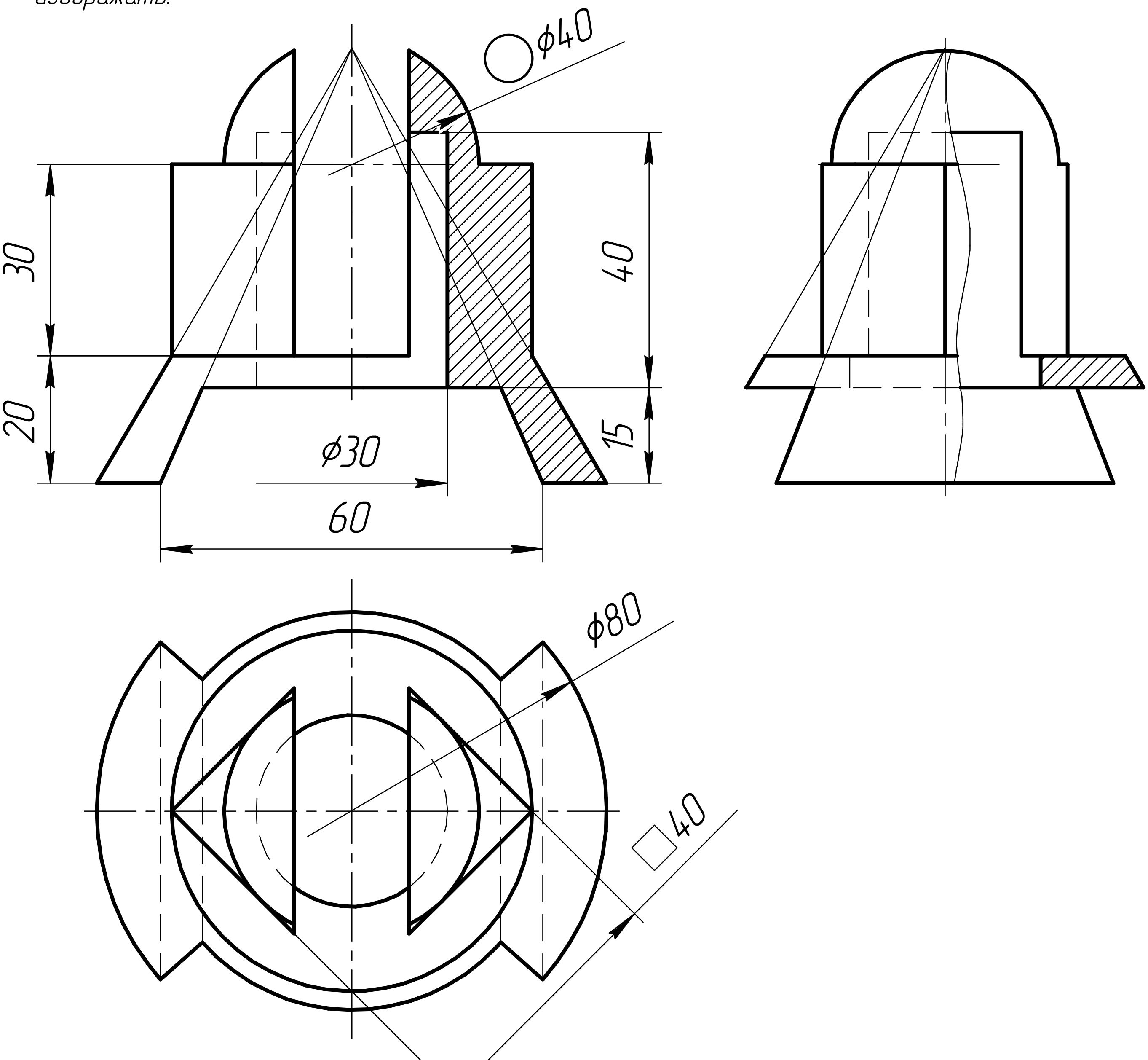
№	**Критерии задача 4а**	**Да**	**Нет**
1	Построена фронтальная и горизонтальная проекции двух фигур	2	-
2	Построена линия пересечения фигур	2	-
3	Определена видимость очерка конуса	1	-
4	Определена видимость очерка пирамиды	1	-
5	Определена видимость участков линии пересечения	2	-
6	Чертеж оформлен с обозначением проекций вершин и границ участков линии пересечения	2	-
	Итого	**до 10**	

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант:2 класс: 10–11

Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции фигуры.

Требуется:

1) на месте вида слева оформить изображение как соединение части вида и части профильного разреза;
2) главный вид оформить как соединение половины вида и половины фронтального разреза;
3) все изображения оформить по ГОСТ 2.305–2008;
4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;
5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;
6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011
7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.



№	Критерии задача 6 (Вариант№1)	Да	Нет
1	**Общие требования:**		
	Построены три изображения в проекционной связи. На видах невидимый контур показан штриховой линией и на разрезах линии невидимого контура не обозначены	4	-
2	**Главный вид**		
	Главный вид выполнен как соединение части вида и части фронтального разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза)	4	-
3	**Вид слева**		
	Вид слева выполнен как соединение части вида и части профильного разреза без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза (с указанием волнистой линии разделения вида и разреза)	5	-
4	**Вид сверху**		
	Вид сверху выполнен без разреза (учитывать только при выполнении пункта 1)	2	-
5	**Указание размеров**		
	Обозначены более половины необходимых размеров	4	-
6	**Оформление**		
	Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии ЕСКД	1	-
	Итого	**до 20**	