

Задача 1 (10 баллов). На кухне в кружке Петя обнаружил недопитый остывший чай комнатной температуры (25°). Он долил в него до полной кружки кипятков из чайника (90° - 100°), пригубил, и понял, что чай еще недостаточно горяч. Тогда он отпил четверть кружки и снова долил кипятку до полной кружки. После этого чай оказался нужной комфортной температуры (60°). Определите максимальный и минимальный возможные объемы недопитого остывшего чая в кружке Пети (в долях от объема кружки). /Указание. Уравнение теплового баланса (равновесия) для физических теплоизолированных систем из двух тел: $m_1C_1(t_1 - t) = m_2C_2(t - t_2)$, где m_1 и m_2 — массы, t_1 и t_2 — исходные температуры, C_1 и C_2 — удельные теплоемкости тел, а t — установившаяся в результате теплообмена равновесная (одинаковая) температура взаимодействующих тел. Считать, что плотность и теплоемкость чая любой концентрации и чистой воды одинаковы, а температура кипятка в первом и во втором случаях не меняется./

Задача 2 (10 баллов). В треугольнике ABC со сторонами $AB = 12$, $BC = 15$, $AC = 18$ проведена биссектриса BD . В треугольники ABD и BCD вписаны окружности с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно. Найдите площадь треугольника $O_1O_2O_3$, где O_3 - центр окружности, описанной около треугольника ABC .

Задача 3 (10 баллов). Найдите все значения x , при которых неравенство

$$(a + 2)x - (1 + 2a)\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + a^2 + 4a - 5 > 0 \text{ выполняется хотя бы для одного } a \in [-2; 1].$$

Задача 4 (10 баллов). Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ с углом A , равным 60° , и диагоналями, равными 7 и $\sqrt{91}$. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO , где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через точку M , лежащую на ребре SC , $MC = 3SM$, и точку P , лежащую на высоте пирамиды SO , причем $SP:PO = 2:3$, если расстояние от точки S до плоскости сечения равно $\sqrt{3}/2$.

Задача 5 (10 баллов). По просьбе мамы Вася купил в магазине пачку кускового (прессованного) быстрорастворимого сахара и увидел надпись: «336 кусочков сахара» (см. рис). Вася любит математику и головоломки, и поэтому решил, не вскрывая пачку, выяснить, во сколько рядов (слоев) уложены кусочки сахара в пачке по высоте, по ширине и по длине. Для этого Вася линейкой измерил внешние размеры пачки, сделанной из тонкой плотной бумаги (оказалось 60 мм, 120 мм и 180 мм), а по изображению на пачке уверенно смог установить лишь то, что кусочки сахара имеют форму одинаковых параллелепипедов, неизвестные длины сторон x , y и z которых находятся в соотношениях $1 < \frac{y}{x} < \frac{3}{2}$, $1 < \frac{z}{y} < \frac{3}{2}$. Кроме того, Вася вспомнил, как папа удивлялся тому, что кусочки сахара



расположены в пачке «как бы наоборот»: вдоль короткой стороны пачки кусочки сахара уложены своей длинной стороной, а вдоль длинной стороны пачки — своей короткой стороной. Помогите Васе решить его задачу.

Решение варианта №1 (Инженерное дело – 10-11 классы)

1. На кухне в кружке Вася обнаружил недопитый остывший чай комнатной температуры (25°). Он долил в него до полной кружки кипятков из чайника (90° - 100°), пригубил, и понял, что чай еще недостаточно горяч. Тогда он отпил четверть кружки и снова долил кипятку до полной кружки. После этого чай оказался нужной комфортной температуры (60°). Определите максимальный и минимальный возможные объемы недопитого остывшего чая в кружке Пети (в долях от объема кружки). /Указание. Уравнение теплового баланса (равновесия) для физических теплоизолированных систем из двух тел: $m_1C_1(t_1 - t) = m_2C_2(t - t_2)$, где m_1 и m_2 — массы, t_1 и t_2 — исходные температуры, C_1 и C_2 — удельные теплоемкости тел, а t — установившаяся в результате теплообмена равновесная (одинаковая) температура взаимодействующих тел. Считать, что плотность и теплоемкость чая любой концентрации и чистой воды одинаковы, а температура кипятка в первом и во втором случаях не меняется./ (10 баллов)

Решение. Из приведенного уравнения теплового баланса (равновесия) для физических теплоизолированных системах из двух тел следует, что при равной теплоемкости тел получаем конечную равновесную температуру:

$$t = \frac{m_1t_1 + m_2t_2}{m_1 + m_2},$$

или через объемы (при равенстве плотностей тел):

$$t = \frac{V_1t_1 + V_2t_2}{V_1 + V_2}.$$

Пусть V — неизвестный объем (в кубических сантиметрах) кружки Васи, $V_0 = pV$ — начальный объем остывшего чая, $0 < p < 1$, θ — неизвестная равновесная температура чая после 1-го доливания кипятка, и t_k — неизвестная температура кипятка в чайнике. Тогда из уравнения равновесия после 1-го доливания кипятка получаем:

$$\theta = \frac{V_0 \cdot 25 + (V - V_0)t_k}{V_0 + (V - V_0)} = 25p + (1 - p)t_k < 60.$$

После 2-го переливания имеем:

$$60 = \frac{\frac{3}{4} \cdot V \cdot \theta + \frac{1}{4} \cdot V \cdot t_k}{\frac{3}{4} \cdot V + \frac{1}{4} \cdot V} = \frac{3}{4} \cdot \theta + \frac{1}{4} \cdot t_k.$$

Таким образом, получаем следующую систему уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} \theta = 25p + (1 - p)t_k, \\ 60 = \frac{3}{4} \cdot \theta + \frac{1}{4} \cdot t_k, \\ 0 < p < 1, \\ 0 < \theta < 60 \\ 90 \leq t_k \leq 100. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем:

$$60 = \frac{3}{4}[25p + (1 - p)t_k] + \frac{1}{4}t_k, \quad 240 = [75p + 3(1 - p)t_k] + t_k,$$

$$240 = 75p + (4 - 3p)t_k, \quad t_k = \frac{240 - 75p}{4 - 3p}.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \theta &= 25p + (1 - p)t_k = 25p + (1 - p) \left(\frac{240 - 75p}{4 - 3p} \right) = \\ &= \frac{25p(4 - 3p) + (1 - p)(240 - 75p)}{4 - 3p} = \frac{5(48 - 43p)}{4 - 3p}. \end{aligned}$$

Решая неравенство $0 < \theta < 60$ при $0 < p < 1$, находим:

$$0 < \frac{5(48 - 43p)}{4 - 3p} < 60, \quad 0 < 5(48 - 43p) < (4 - 3p)60,$$

$$0 < 48 - 43p < (4 - 3p)12, \quad 0 < 48 - 43p < 48 - 36p, \quad 0 < p < 1.$$

Значит, условие $0 < \theta < 60$ не накладывает никаких ограничений на искомую долю p : $0 < p < 1$.

Рассмотрим последнее условие: максимальная температура кипятка не может быть больше 100° :

$$90 \leq t_k \leq 100, \quad 90 \leq \frac{240 - 75p}{4 - 3p} \leq 100, \quad 360 - 270p \leq 240 - 75p \leq 100(4 - 3p),$$

$$120 \leq 195p, \quad 225p \leq 160, \quad \frac{8}{13} \leq p \leq \frac{32}{45}.$$

Ответ: минимальное значение - $\frac{8}{13}$; максимальное значение - $\frac{32}{45}$.

2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 12$, $BC = 15$, $AC = 18$ проведена биссектриса BD . В треугольники ABD и BCD вписаны окружности с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно. Найдите площадь треугольника $O_1O_2O_3$, где O_3 - центр окружности, описанной около треугольника ABC . (10 баллов)

Решение. 1) Найдём длину биссектрисы BD по формуле $BD = \sqrt{AB \cdot BC - AD \cdot DC}$. По свойству биссектрисы $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$. Пусть $AD = x$. Тогда $\frac{12}{15} = \frac{x}{18 - x}$, $x = 8$.

$AD = 8, DC = 10, BD = \sqrt{12 \cdot 15 - 8 \cdot 10} = 10$. Треугольник BCD - равнобедренный, $BD = CD$.

2) Найдем радиусы r_1 и r_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD .

Для треугольника ABD имеем:

$p_1 = 15$, по формуле Герона

$$S_1 = \sqrt{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = 15\sqrt{7}, \quad r_1 = \frac{S_1}{p_1} = \sqrt{7}.$$

Для треугольника BCD имеем:

$p_2 = \frac{35}{2}$, по формуле Герона

$$S_2 = \sqrt{\frac{35}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{75}{4}\sqrt{7}, \quad r_2 = \frac{S_2}{p_2} = \frac{15}{14}\sqrt{7}.$$

3) Найдем радиус R окружности, описанной около треугольника ABC .

$$S_{ABC} = \frac{135}{4}\sqrt{7}, \quad R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{12 \cdot 15 \cdot 18}{135\sqrt{7}} = \frac{24\sqrt{7}}{7}.$$

4) Центр O_3 окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на прямой DK , где K -

середина отрезка BC , $DK \perp BC$. Найдем O_3K : $O_3K = \sqrt{R^2 - BK^2} = \sqrt{\frac{24^2}{7} - \frac{15^2}{4}} = \frac{27\sqrt{7}}{14}$.

$$5) O_2O_3 = O_3K - r_2 = \frac{27\sqrt{7}}{14} - \frac{15\sqrt{7}}{14} = \frac{6\sqrt{7}}{7}.$$

6) $O_1D \perp DK$, O_1D - высота треугольника $O_1O_2O_3$, $S_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}O_2O_3 \cdot O_1D$.

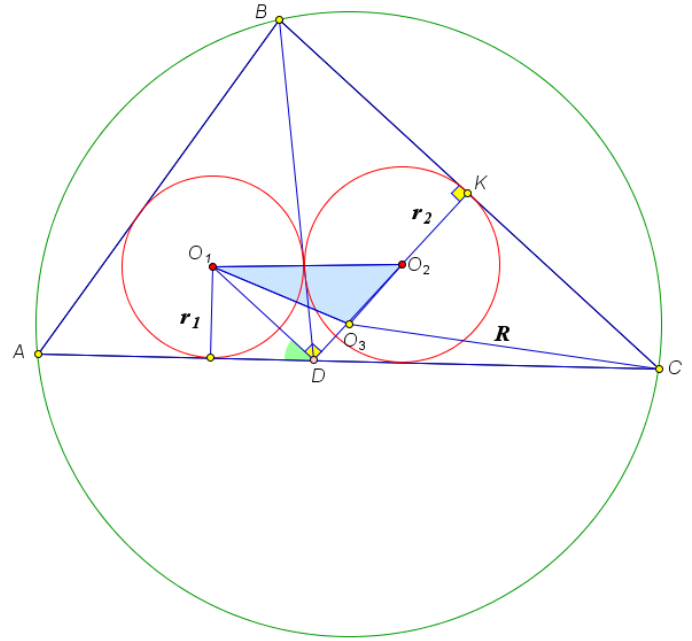
7) $O_1D = \frac{r_1}{\sin \alpha}$, $\alpha = \frac{\angle ADB}{2}$. По теореме косинусов найдем

$$\cos \angle ADB = \cos 2\alpha = \frac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2AD \cdot DB} = \frac{64 + 100 - 144}{160} = \frac{1}{8}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$O_1D = 4.$$

$$8) S_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}O_2O_3 \cdot O_1D = \frac{12\sqrt{7}}{7}.$$

Ответ: $\frac{12\sqrt{7}}{7}$



3. Найдите все значения x , при которых неравенство

$$(a + 2)x - (1 + 2a)\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + a^2 + 4a - 5 > 0 \text{ выполняется хотя бы для одного } a \in [-2; 1].$$

(10 баллов)

Решение:

Сделаем замену переменного $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда исходное неравенство равносильно следующему $(a + 2)t^3 - (1 + 2a)t^2 - 6t + a^2 + 4a - 5 > 0$, или $a^2 + a(t^3 - 2t^2 + 4) + 2t^3 - t^2 - 6t - 5 > 0$.

Найдем те значения t , при которых для всех $a \in [-2; 1]$ выполняется неравенство

$$a^2 + a(t^3 - 2t^2 + 4) + 2t^3 - t^2 - 6t - 5 \leq 0.$$

Обозначим $f(a) = a^2 + a(t^3 - 2t^2 + 4) + 2t^3 - t^2 - 6t - 5$. Графиком квадратичной функции $f(a)$ является парабола с ветвями, направленными вверх. Тогда неравенство $f(a) \leq 0$

будет выполняться для всех $a \in [-2; 1]$ в том случае, если

$$\begin{cases} f(-2) \leq 0, \\ f(1) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2(t^3 - 2t^2 + 4) + 2t^3 - t^2 - 6t - 5 \leq 0, \\ 1 + t^3 - 2t^2 + 4 + 2t^3 - t^2 - 6t - 5 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 6t - 9 \leq 0, \\ 3t^3 - 3t^2 - 6t \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t - 3 \leq 0, \\ t(t^2 - t - 2) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$t \in \{-1\} \cup [0; 2] \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [0; 8].$$

Тогда исходное неравенство выполняется хотя бы для одного $a \in [-2; 1]$, если

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (8; +\infty). \quad \text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (8; +\infty).$$

4. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ с углом A , равным 60° , и диагоналями, равными 7 и $\sqrt{91}$. Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO , где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной диагонали основания BD и проходящей через точку M , лежащую на ребре SC , $MC = 3SM$, и точку P , лежащую на высоте пирамиды SO , причем $SP : PO = 2 : 3$, если расстояние от точки S до плоскости сечения равно $\sqrt{3}/2$. (10 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. Пусть $P \in SO$, $SP : PO = 2 : 3$, а $M \in SC$, $MC = 3SM$.

В плоскости ASC проведем прямую MP . Пусть прямая MP пересекает прямую AC в точке A_1 .

$$\text{Тогда по теореме Менелая } \frac{SM}{MC} \cdot \frac{CA_1}{A_1O} \cdot \frac{OP}{PS} = 1, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{CA_1}{A_1O} \cdot \frac{3}{2} = 1, \quad CA_1 = 2A_1O, \quad CO = A_1O, \quad A_1 = A.$$

Следовательно, сечение проходит через точку A . В плоскости BSD через точку P проведем

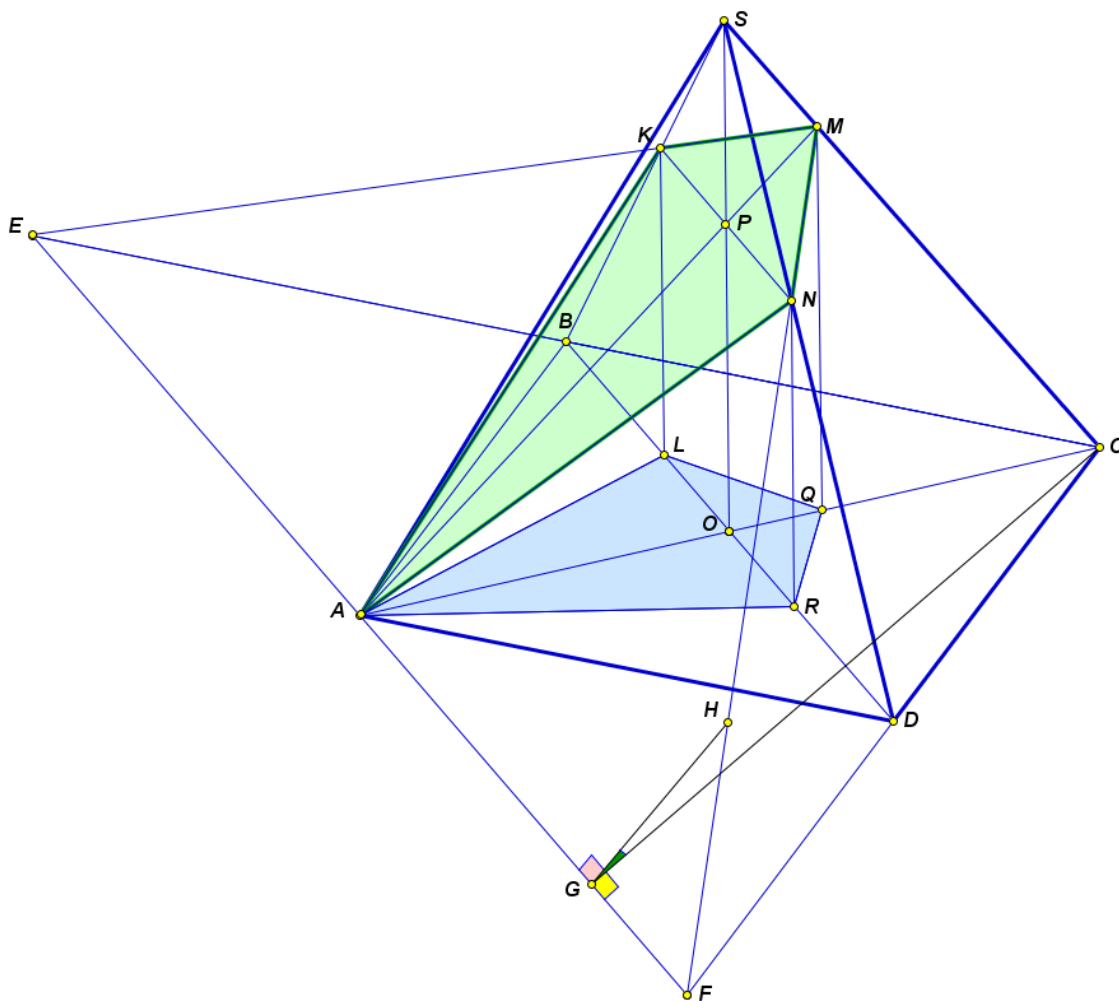
$$\text{прямую } KN, \text{ параллельную } BD, \quad K \in BS, \quad N \in SD, \quad \frac{SK}{KB} = \frac{SN}{ND} = \frac{2}{3}. \text{ Искомое сечение –}$$

четырёхугольник $AKMN$.

Найдем стороны параллелограмма $ABCD$. Обозначим $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$, $\alpha = 60^\circ$. Пусть для определенности $a < b$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 49, \\ a^2 + b^2 + ab = 91, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 3b^2 - 10ab = 0, \\ a^2 + b^2 + ab = 91, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a, \\ a = \sqrt{7}. \end{cases}$$

Площадь сечения $AKMN$ будем вычислять по формуле $S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi}$, где S_{np} - площадь проекции сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания. Проекцией является четырехугольник $ALQR$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = AB \cdot AD \sin \alpha = 3a^2 \sin \alpha$, $S = 21\sqrt{3}/2$.



Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

$$S_{np} = 2(S_{AOR} + S_{ROQ}) = \frac{S}{2} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \right) = \frac{S}{4} = \frac{21\sqrt{3}}{8}.$$

Плоскость сечения и плоскость основания пересекаются по прямой EF , параллельной BD и проходящей через точку A . Пусть CG – перпендикуляр к прямой EF , $H \in MF$, $HG \perp EF$. Угол CGH – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, он равен φ .

Расстояние от точки S до плоскости сечения равно трети расстояния от точки C до плоскости сечения и равно $d = \sqrt{3}/2$. Расстояние от точки C до плоскости сечения равно $3d = 3\sqrt{3}/2$.

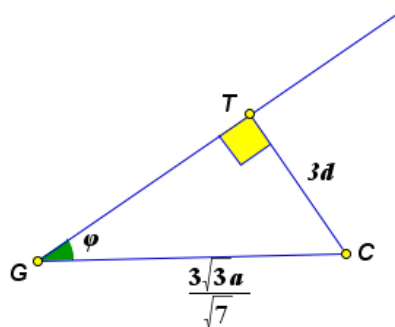
Отрезок CG – высота треугольника ECF , $EF \cdot CG = EC \cdot CF \sin \alpha$,

$$CG = \frac{EC \cdot CF \sin \alpha}{EF} = \frac{2BC \cdot 2CD \sin 60^\circ}{\sqrt{4BC^2 + 4CD^2 - 2 \cdot 4BC \cdot CD \cos 60^\circ}} = \frac{BC \cdot CD \sqrt{3}}{\sqrt{BC^2 + CD^2 - BC \cdot CD}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} a.$$

Проведем перпендикуляр CT к прямой GH , длина этого перпендикуляра равна $3d$. Тогда

$$\sin \varphi = \frac{CT}{CG} = \frac{3d\sqrt{7}}{3\sqrt{3}a} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 30^\circ, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi} = \frac{21}{4} = 5,25.$$



Ответ: 5,25.

5. По просьбе мамы Вася купил в магазине пачку кускового (прессованного) быстрорастворимого сахара и увидел надпись: «336 кусочков сахара» (см. рис). Вася любит математику и головоломки, и поэтому решил, не вскрывая пачку, выяснить, во сколько рядов (слоев) уложены кусочки сахара в пачке по высоте, по ширине и по длине. Для этого Вася линейкой измерил внешние размеры пачки, сделанной из тонкой плотной бумаги (оказалось 60 мм, 120 мм и 180 мм), а по изображению на пачке уверенно смог установить лишь то, что кусочки сахара имеют форму одинаковых параллелепипедов, неизвестные длины сторон x , y и z которых находятся в соотношениях



$1 < \frac{y}{x} < \frac{3}{2}$, $1 < \frac{z}{y} < \frac{3}{2}$. Кроме того, Вася вспомнил, как папа удивлялся тому, что кусочки сахара

расположены в пачке «как бы наоборот»: вдоль короткой стороны пачки кусочки сахара уложены своей длинной стороной, а вдоль длинной стороны пачки — своей короткой стороной. Помогите Васе решить его задачу.

Решение:

Пусть $X = 60$ мм, $Y = 120$ мм и $Z = 180$ мм — известные длины сторон пачки сахара. Тогда, пренебрегая толщиной бумаги и учитывая наблюдение папы, имеем:

$$x = \frac{Z}{n_3} = \frac{180}{n_3}, \quad y = \frac{Y}{n_2} = \frac{120}{n_2}, \quad z = \frac{X}{n_1} = \frac{60}{n_1},$$

где n_1 , n_2 и n_3 — искомые количества рядов (слоев), в которые уложены кусочки сахара в пачке по, соответственно, высоте (короткой стороне пачки), ширине (средней стороне пачки) и длине (длинной стороне пачки). Тогда из условия задачи получаем исходную систему:

$$\begin{cases} 1 < \frac{120}{180} \cdot \frac{n_3}{n_2} < \frac{3}{2}, \\ 1 < \frac{60}{120} \cdot \frac{n_2}{n_1} < \frac{3}{2}, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3, \end{cases}$$

из которой получаем:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} < \frac{n_3}{n_2} < \frac{9}{4}, \\ 2 < \frac{n_2}{n_1} < 3, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{2} < \frac{n_3}{n_2} < \frac{9}{4}, \\ \frac{1}{3} < \frac{n_1}{n_2} < \frac{1}{2}, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{2}n_2 < n_3 < \frac{9}{4}n_2, \\ \frac{1}{3}n_2 < n_1 < \frac{1}{2}n_2, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3. \end{cases} \quad (*)$$

И следовательно:

$$\begin{cases} 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 < \frac{1}{2}n_2 \cdot n_2 \cdot \frac{9}{4}n_2 = \frac{9}{8}n_2^3, \\ 336 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 > \frac{1}{3}n_2 \cdot n_2 \cdot \frac{3}{2}n_2 = \frac{1}{2}n_2^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_2^3 > 336 \cdot \frac{8}{9} = 298\frac{2}{3} > 298 > 216 = 6^3, \\ n_2^3 < 336 \cdot 2 = 672 < 729 = 9^3, \end{cases} \quad 6 < n_2 < 9. \text{ Следовательно, } n_2 = 7 \text{ или } n_2 = 8.$$

1) $n_2 = 7$ Подставим в систему (*):

$$\begin{cases} 10,5 < n_3 < 15,75, \\ 2\frac{1}{3} < n_1 < 3,5, & \text{Целых решений нет.} \\ n_1 n_3 = 48. \end{cases}$$

2) $n_2 = 8$ Подставим в систему (*):

$$\begin{cases} 12 < n_3 < 18, \\ 2\frac{2}{3} < n_1 < 4, \Rightarrow n_1 = 3, n_3 = 14. \\ n_1 n_3 = 42. \end{cases}$$

Ответ: 3; 8; 14.