№1.

$\sqrt{3x+2} - \sqrt{2x^2+x-1} \geq 2x^2 - 2x - 3.$

ОДЗ:

$3x+2 \geq 0$ $\quad$ $2x^2+x-1 \geq 0$

$3x \geq -2$ $\quad$ $f_1(x) = 2x^2+x-1$

$x \geq -\frac{2}{3}$ $\quad$ $\Downarrow$

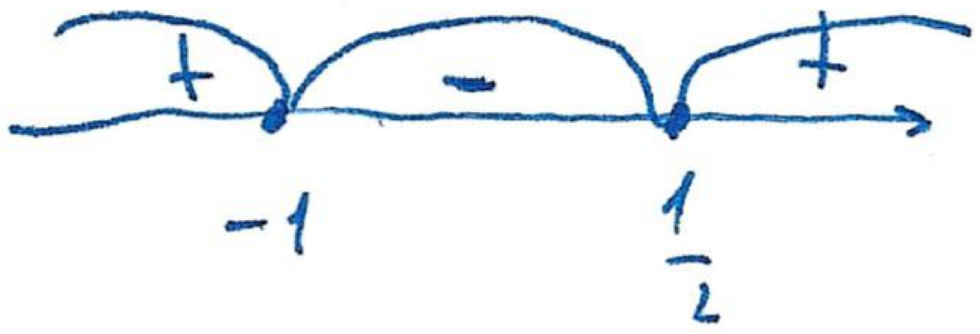
Нули ф-ции: $2x^2+x-1=0$

$D = 1+8 = 9$

$\Downarrow$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$

$x = -1$ или $x = \frac{1}{2}$



$f_1(-2) = 5 > 0$

$f_1(0) = -1 < 0$

$f_1(1) = 2 > 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -1]$ и $x \in [\frac{1}{2}; +\infty)$ и $x \geq -\frac{2}{3}$

$\Downarrow$

$x \in [\frac{1}{2}; +\infty).$

Пусть $a = 3x+2$; $b = 2x^2+x-1$

$\Downarrow$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq b - a$

~~$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq \sqrt{b}$~~

$(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) + (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \leq 0$

$(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1) \leq 0$ т.к. $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq 0. \Rightarrow \sqrt{b} \leq \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{2x^2+x-1} \leq \sqrt{3x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2+x-1 \leq 3x+2$ с учётом ОДЗ. $\Rightarrow$

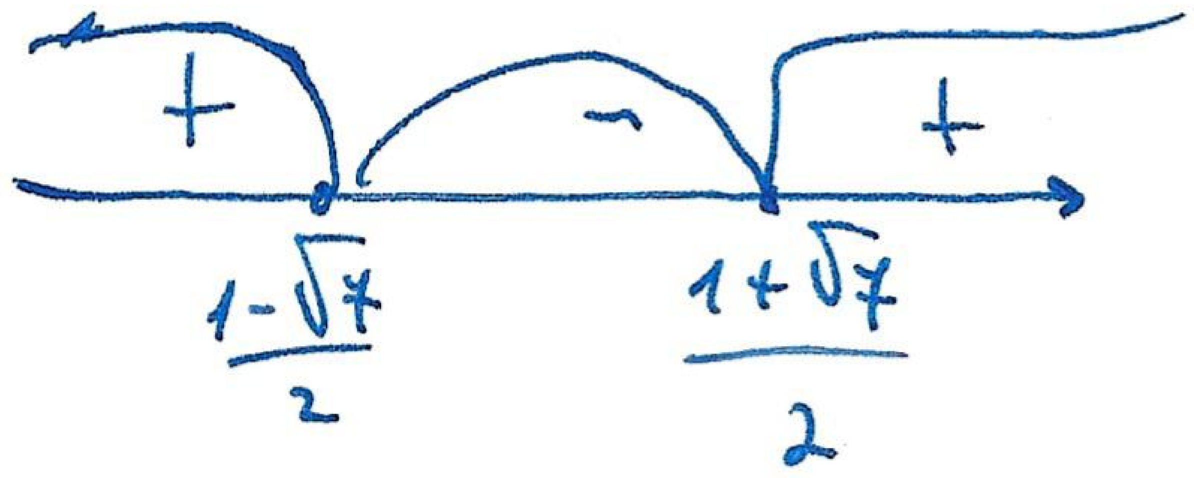
$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 \leq 0.$ $f_2(x) = 2x^2-2x-3.$

Нули ф-ции: $2x^2-2x-3=0 \Rightarrow D = 4+4\cdot 2\cdot 3 = 28 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \Rightarrow.$

$\Rightarrow.$ ~~$\frac{1-\sqrt{7}}{2}$~~

№1 (продолж-е).

г)



$\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

$3>\sqrt{7}>2$ (т.к. $\sqrt{9}>\sqrt{7}>\sqrt{4}$).

$\Downarrow$

$\frac{1-\sqrt{7}}{2}<\frac{1-2}{2}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{7}}{2}>\frac{1-3}{2}=-1$

$f_2(-2)=9>0$

$f_2(1)=-3<0$

$f_2(2)=1>0$

$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$

$3>\sqrt{7}>2 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{7}}{2}>\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$.

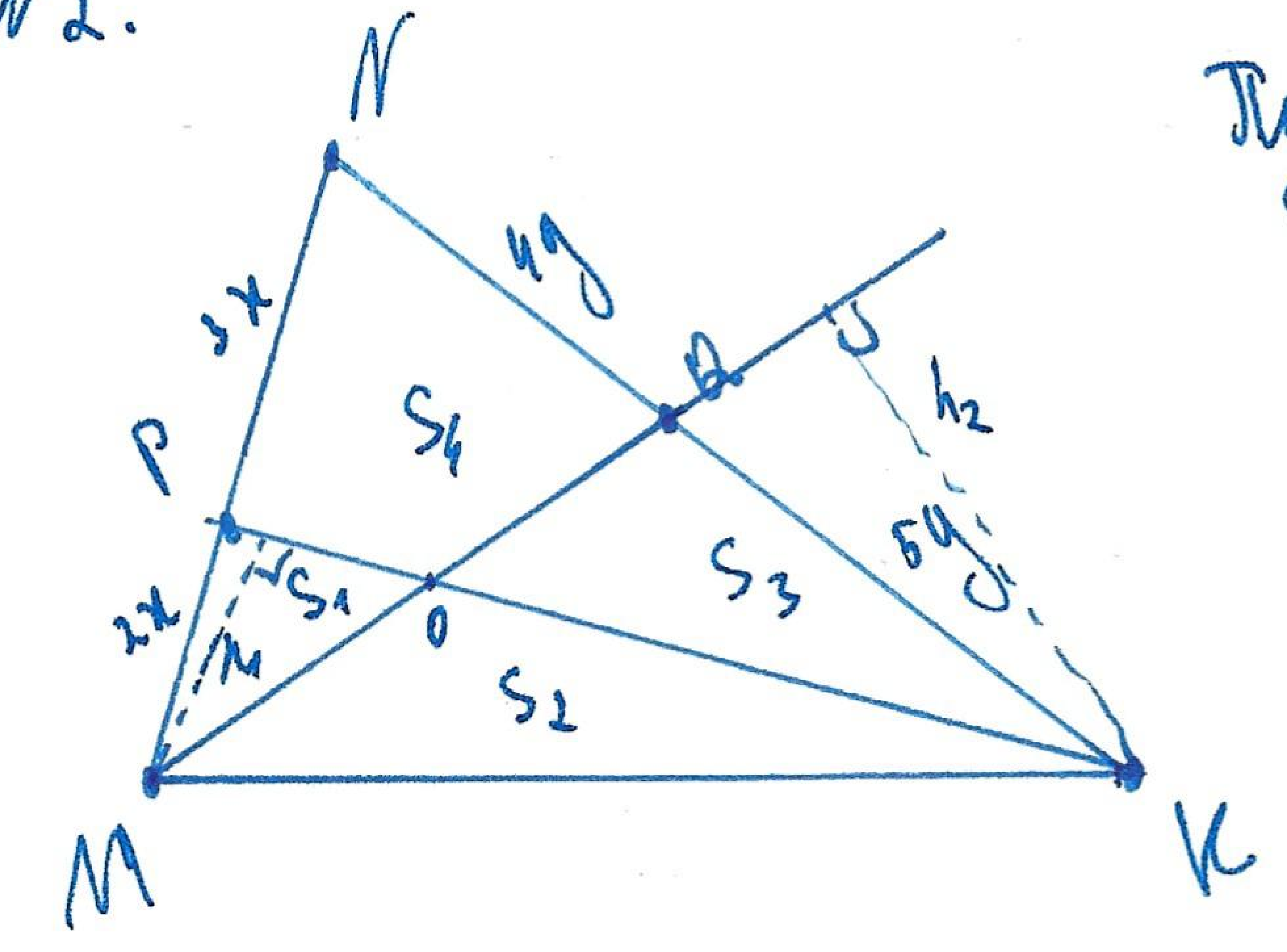
$\Downarrow$

$x\in\left[\frac{1-\sqrt{7}}{2};\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$, а т.к. $\frac{1-\sqrt{7}}{2}<-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. из ОДЗ $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$.

Отв: $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$.

№2.



Пусть $MP = 2x$; $PN = 3x$

$NQ = 4y$; $QK = 5y$, где x, y – числа > 0.

$\Downarrow$

Пусть $S_{MOP} = S_1 = 48$

$S_{MOK} = S_2$

$S_{OQK} = S_3$

$S_{OPNQ} = S_4$

Тогда по теореме Менелая для $\triangle NMQ$:

$$\frac{NP}{PM} \cdot \frac{MO}{OQ} \cdot \frac{QK}{NK} = 1$$

$$\frac{3x}{2x} \cdot \frac{5y}{9y} = \cancel{\frac{QQ}{MQ}}\ \frac{OQ}{MO}$$

$$\frac{OQ}{MO} = \frac{5}{6}.$$

И по теор. Менелая для $\triangle NKP$:

$$\frac{NQ}{QK} \cdot \frac{KO}{OP} \cdot \frac{PM}{MN} = 1$$

$$\frac{4y}{5y} \cdot \frac{KO}{OP} \cdot \frac{2x}{5x} = 1$$

$$\frac{OP}{KO} = \frac{4 \cdot 2}{25} = \frac{8}{25}. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Пусть h_1 – ~~высота~~ перпендикуляр к PK из т. M и h_2 – перпендикуляр из т. K на MQ $\Rightarrow S_1 = \frac{h_1 \cdot PO}{2}$; $S_2 = \frac{h_1 \cdot OK}{2} = \frac{h_2 \cdot MO}{2}$; $S_3 = \frac{h_2 \cdot OQ}{2}$

$\Downarrow$

$S_2 = S_1 \cdot \frac{OK}{PO}$ и $S_3 = S_2 \cdot \frac{OQ}{MO} \Rightarrow S_3 = S_1 \cdot \frac{OK}{PO} \cdot \frac{OQ}{MO} =$

$= S_1 \cdot \frac{25}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{48} S_1$, а по усл. $S_1 = 48 \Rightarrow S_3 = 125 = S_{KOQ}$

Ответ: 125.

№3

Ответ: 33 мин

I) Алгоритм на 33 мин

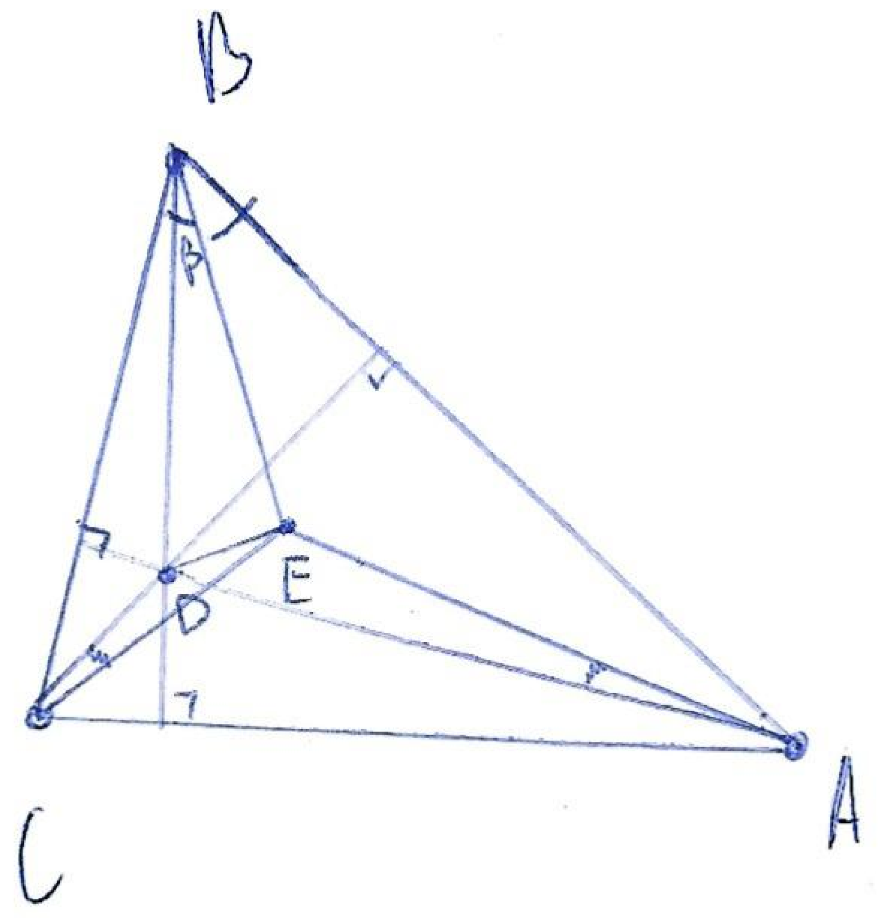
~~1 перепра~~ № переправы	
1	Виктор и Рита за 5 мин на др. берег
2	Рита за 5 мин обратно
3	Валерий и Ангелина за 15 мин на др. берег
4	Виктор за 3 мин обратно
5	Виктор и Рита на др. берег за 5 мин.

$\overset{10}{5+5}+\overset{25}{15}+\overset{28}{3}+5=33$ мин

Оценка: Заметим, что за 1 переправу на др. берег мы переводим max 2 человек и ещё 1 человек должен вернуться к остальным => за ~~1 переправ~~ 2 переправы на др. берег и обратно, мы ~~переправим~~ увеличим кол-во человек на др. берегу на 1. Но в последней переправе на др. берег мы увеличим кол-во людей на др. берегу max на 2, т.к. возвращ. не надо => минимум переправ 5, т.к. $4=1+1+2$ => всего переправ $2+2+1=\boxed{5}$. => 3 переправы на др. берег и 2 переправы обратно => заметим, что если 2 переправы обратно были по 3 мин, то Виктор просто перевёл всех людей по отдельности и затратил 15 мин + 10 мин + 5 мин + 3 мин + 3 мин = 36 мин > 33 мин => Если же как минимум 1 из переправ обратно ≥ 5 мин, то 2 переправы обратно тратят $\geq 3+5=8$ мин. Теперь рассм. переправы на др. берег, 1 из них - переправа с Ангелиной => по времени заняла 15 мин, а 2 другие тратят ≥ 5 мин каждая, т.к. в ней участвовал не только Виктор => всего будет затрачено $\geq$ $\geq \overset{20}{15+5}\overset{25}{+5}+8$ мин = 33 мин (если было больше 5 переправ => и время становилось больше). => затрач. время ≥ 33 мин

Ответ: 33 мин

№5.



(т.к. арифм. прогрессия)

Пусть $\angle A = \alpha$; $\angle B = \alpha+\beta$; $\angle C = \alpha + 2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 3(\alpha+\beta) = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle B = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBE = \angle ABE = 30^\circ$

$\angle CBD = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \alpha - 2\beta = 90^\circ - 60^\circ - \beta =$

$= 30^\circ - \beta = \cancel{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DBE = 30^\circ - \angle CBD = 30^\circ - 30^\circ + \beta = \beta$

$\angle DCE = \angle C - \angle BCD - \angle ECA =$

$= (\alpha + 2\beta) - (90 - 60^\circ) - \frac{\alpha+2\beta}{2} =$

$= 60 + \beta - 30 \cancel{\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{60+\beta}{2} =$

$= 60 - 30 - 30 + \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$

$\angle EAD = \angle A - \angle BAE - \angle CAD = \alpha - \frac{\alpha}{2} - (90 - \alpha - 2\beta) = \frac{\alpha}{2} - 90 + \alpha + 2\beta =$

$= 1{,}5\alpha + 2\beta - 90 = 1{,}5 \cdot 60^\circ + \frac{\beta}{2} - 90^\circ = \frac{\beta}{2} = \angle DCE \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle DCE = \angle DAE$ и опир. на $DE \Rightarrow CDEA$ – впис. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ECA = \angle EDA$, а т.к. $\angle ECA = \frac{\angle C}{2} = \frac{\alpha+2\beta}{2} = \frac{60+\beta}{2} = 30 + \frac{\beta}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EDA = 30 + \frac{\beta}{2}$, а т.к. $\angle BDA = 180^\circ - \angle DBA - \angle DAB =$

$= 180^\circ - (\beta + \angle EBA) - (90^\circ - \angle B) = 180^\circ - (\beta + 30^\circ) - (90^\circ - 60^\circ) =$

$= 120^\circ - \beta \Rightarrow \angle BDE = 120^\circ - \beta - 30^\circ - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - 1{,}5\beta = 1{,}5(\alpha+\beta) - 1{,}5\beta = 1{,}5\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BED = 180^\circ - \beta - 1{,}5\alpha = 180^\circ - \alpha - \beta - 0{,}5\alpha = 120^\circ - 0{,}5\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Заметим, что т.к. в тр-ке BDE величины углов образ. арифм. прогрессию, то есть угол равный 60°. Т.к. можно есть угол γ, который

№5 (продолж.).

меньше наибольшего угла (в тр-ке BDE) на $x°$ и больше наименьшего угла на $x°$ =>

=> а т.к. BDE – тр-к => $y + y - x + y + x = 180°$

$3y = 180°$

$y = 60°$ ч.т.д. =>

=> Рассм. случаи (какой из углов $\triangle BDE$ 60°).

1. $\beta = 60°$ т.к. $\alpha + \beta = 60°$ и $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ => $\alpha < 60°$ и $\beta < 60°$ – противоречие, $\beta \neq 60°$.

(если $\beta = 0$, то BDE – не тр-к, т.к. $\angle PBE = 0°$ в таком случае)

2. $120 - 0{,}5\alpha = 60°$

$\Updownarrow$

$0{,}5\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 120°$, но т.к. из доказанного $\alpha < 60°$ – противоречие,

$120° > 60° \Rightarrow 120 - 0{,}5\alpha \neq 60°$.

3. $1{,}5\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = \dfrac{60°}{1{,}5} = \dfrac{60°}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2 \cdot 60°}{3} = 40°$ – единственный возможный

и оставшийся случай => $\alpha = 40°$, а т.к. $\angle A = \alpha = 40°$.

Ответ: $\angle A = 40°$.

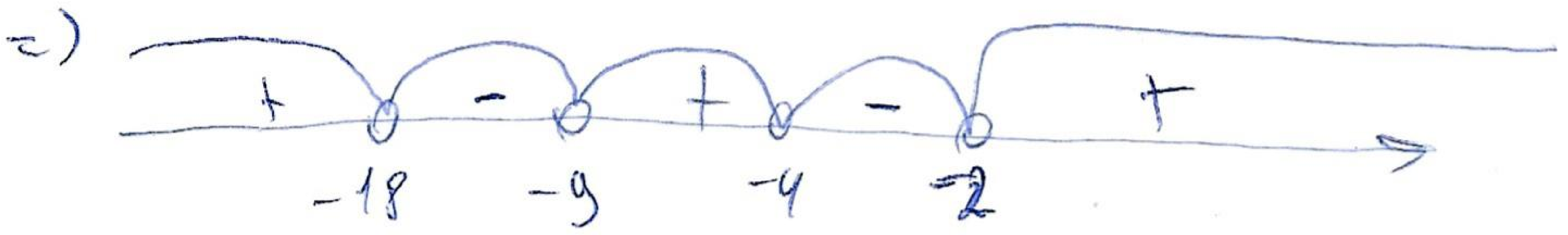
№4.

$(x+2)(x+4)(x+9)(x+18)=a\cdot x^2$

$f(x)=(x+2)(x+4)(x+9)(x+18)$

нули ф-ии: $(x+2)(x+4)(x+9)(x+18)=0$.

$x=-2$ или $x=-4$ или $x=-9$ или $x=-18$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 

$a\neq 0$, т.к. тогда есть и решения.

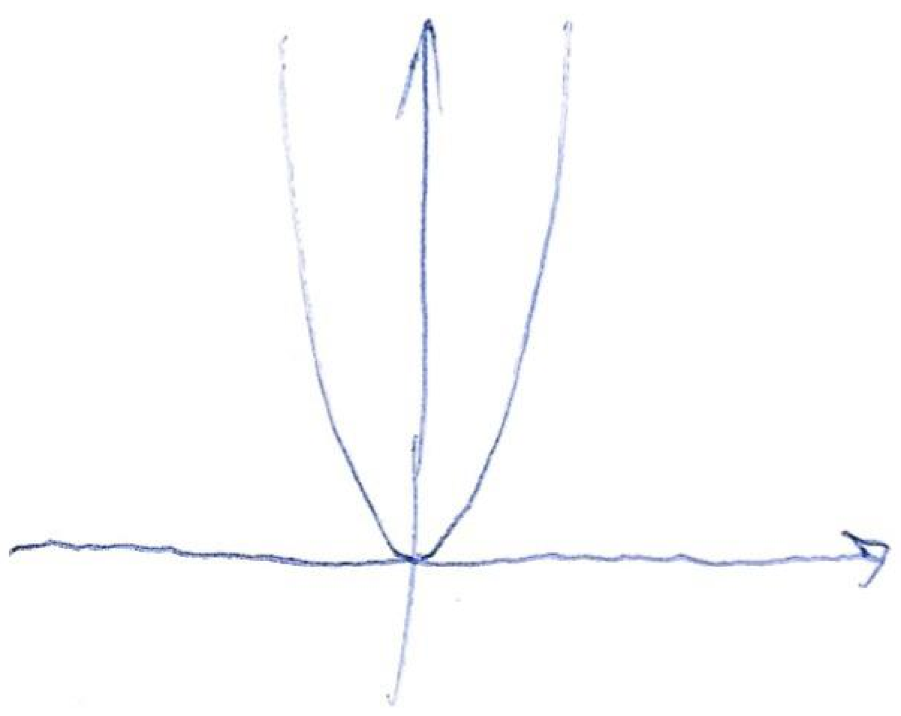
$f(-19)>0$; $f(-10)<0$; $f(-5)>0$; $f(-3)<0$; $f(0)>0$

Если $a>0 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow ax^2>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(-9;-4)\cup(-2;+\infty)$. (чтобы $f(x)>0$).

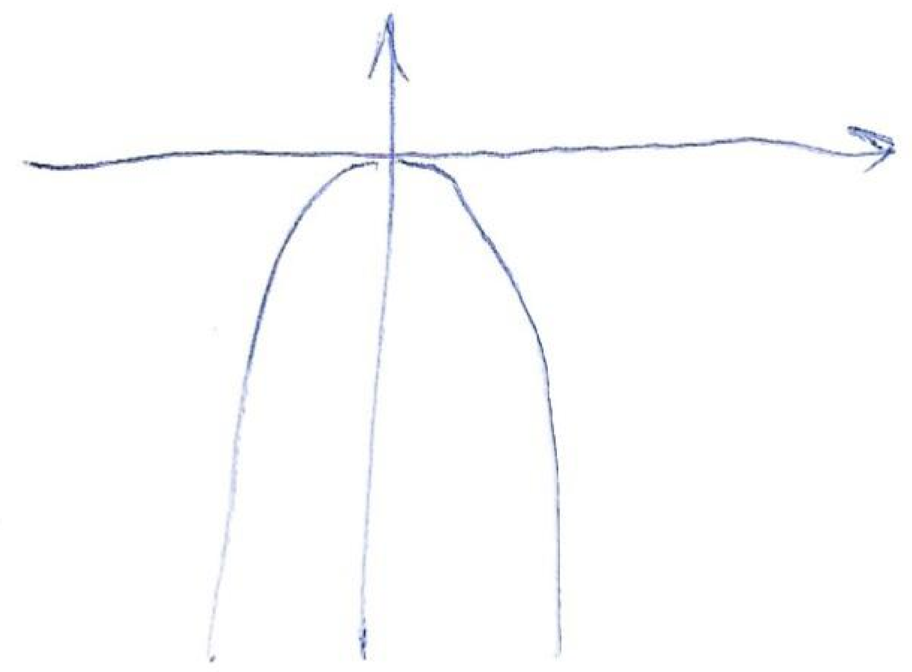
Если $a<0 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow ax^2<0 \Rightarrow x\in(-18;-9)\cup(-4;-2)$. (чтобы $f(x)<0$).

Заметим, что график $f_1(x)=ax^2$ (где a-const) - парабола с вершиной в т. 0.

1. $a>0 \Rightarrow$ ветви вверх



2. $a<0 \Rightarrow$ ветви вниз



т.к. при $a<0$ возможные $x\in(-18;-9)\cup(-4;2)$ и у нас ровно 2 решения