Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

1830

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 2

Лист работы 1 из 7

№1

$\sqrt{18x-1} - \sqrt{4x^2+11x-3} \geq 4x^2-7x-2$

Заметим, что $4x^2+11x-3-(18x-1) = 4x^2-7x-2$

Пусть $18x-1=a$, $4x^2+11x-3=b$, тогда

$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq b-a$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + a - b \geq 0$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 0$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 \leq 0 \end{cases} \ominus \end{array}\right.$$

$\left.\begin{array}{l} \sqrt{a} \geq 0 \\ \sqrt{b} \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 \geq 1 > 0$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 \leq 0$ не имеет решений при действительных a и b

Значит, вторая система совокупности не имеет решений, т.к. её второе неравенство не имеет корней

Можно использовать оборот листа для записи решений

Итак,

$$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 \geq 0 \end{cases}$$ – верно при всех допустимых значениях $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$

$$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0 \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Вернемся к исходным переменным

$$\begin{cases} \sqrt{18x-1} - \sqrt{4x^2+11x-3} \geq 0 \quad (1) \\ 18x - 1 \geq 0 \quad (2) \\ 4x^2 + 11x - 3 \geq 0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) $\sqrt{18x-1} \geq \sqrt{4x^2+11x-3}$ | возводим в квадрат обе части, т.к. они неотрицательны по определению арифм. корня

$18x - 1 \geq 4x^2 + 11x - 3$

$4x^2 - 7x - 2 \leq 0$

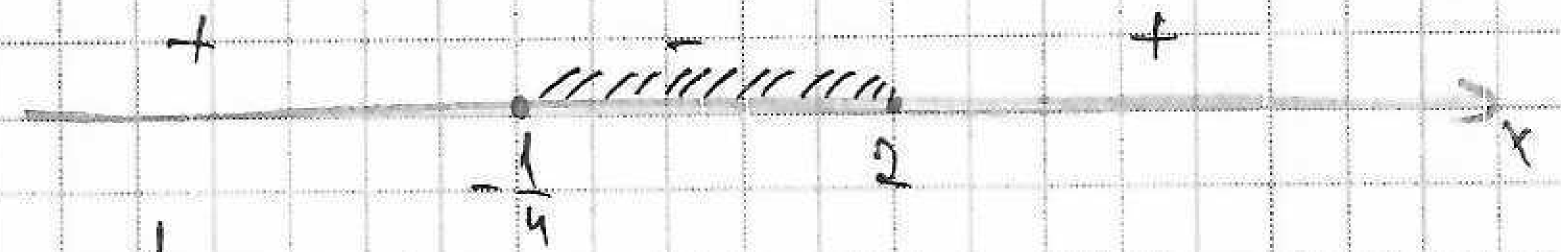
$D = 49 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 81 = 9^2$

$x_1 = \frac{7-9}{2 \cdot 4} = -\frac{2}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{7+9}{2 \cdot 4} = \frac{16}{8} = 2$

$4x^2 - 7x - 2 = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)(x-2) = (4x+1)(x-2)$

$(4x+1)(x-2) \leq 0$

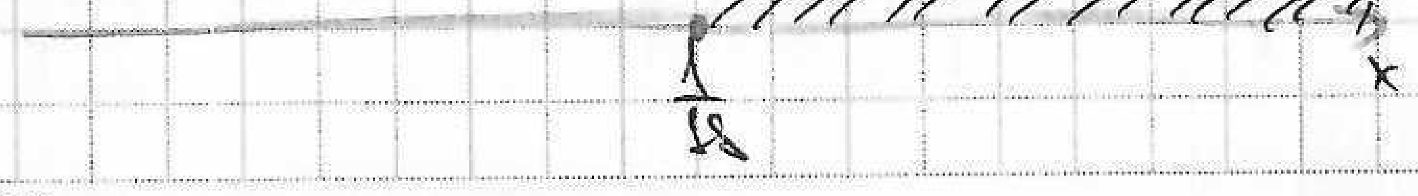


$-\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

(2) $18x - 1 \geq 0$

$18x \geq 1$

$x \geq \frac{1}{18}$



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

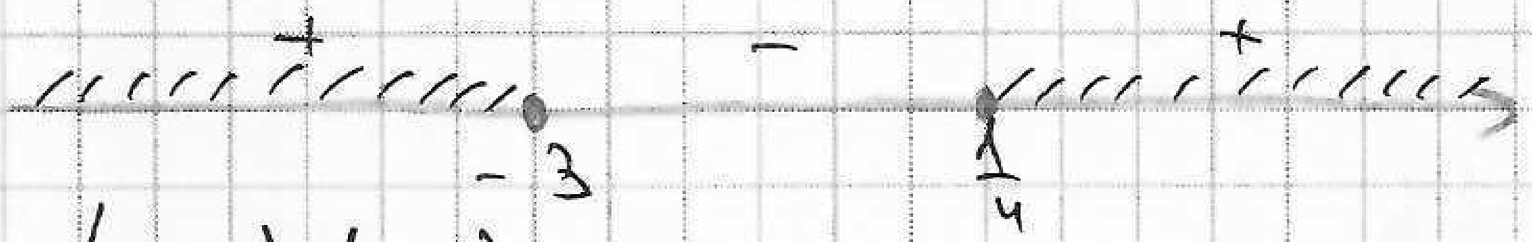
(3) $4x^2+11x-3 \geq 0$

$D = 121 + 4\cdot 4\cdot 3 = 169 = 13^2$

$x_1 = \frac{-11-13}{2\cdot 4} = -\frac{24}{8} = -3$

$x_2 = \frac{-11+13}{2\cdot 4} = \frac{2}{2\cdot 4} = \frac{1}{4}$

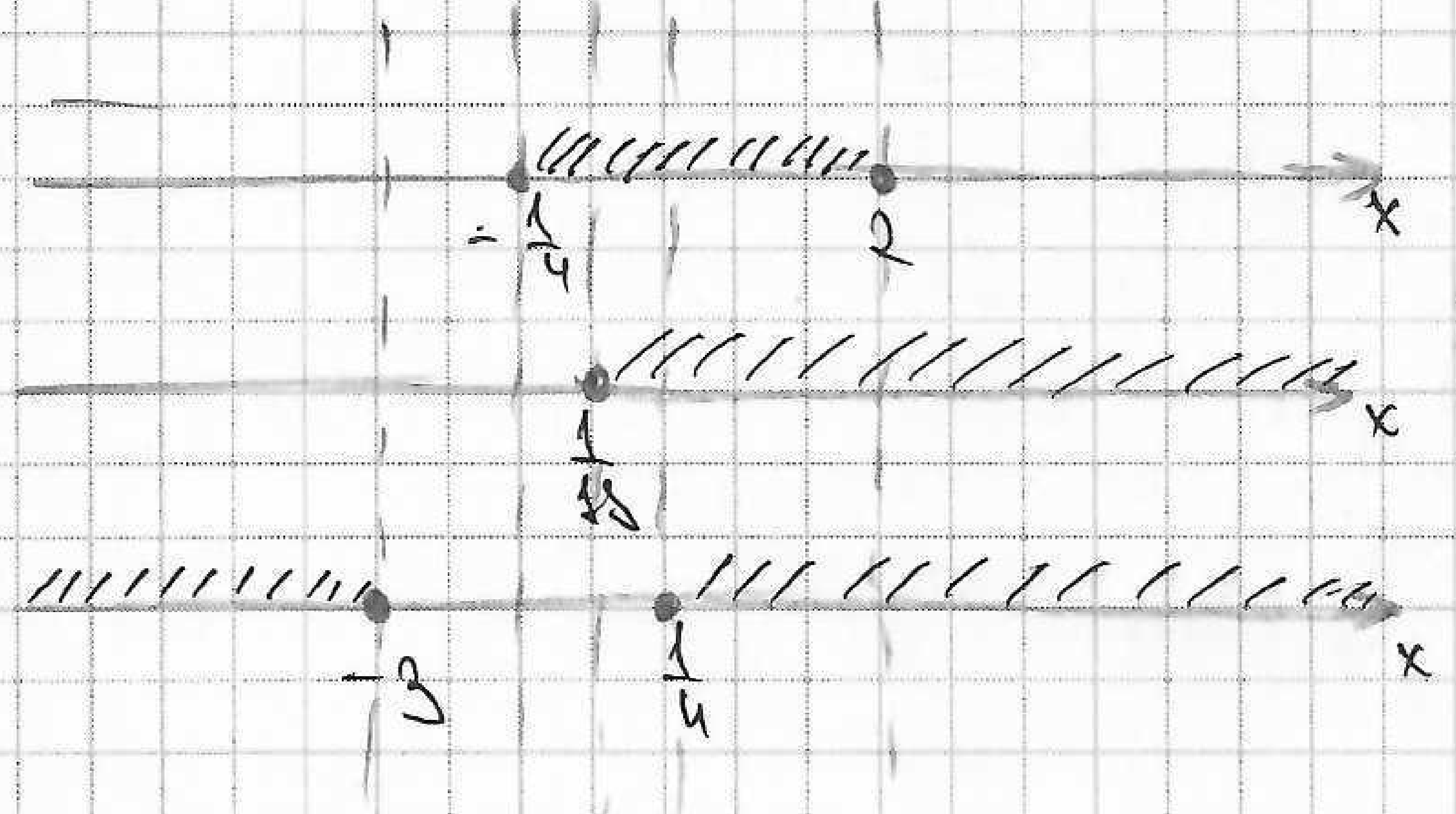
$4x^2+11x-3 = 4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+3) = (4x-1)(x+3)$



$(4x-1)(x+3) \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geq -\frac{1}{4} \\ x \leq 2 \end{array}\right. \\ x \geq \frac{1}{18} \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq \frac{1}{4} \end{array}\right. \end{array}\right.$

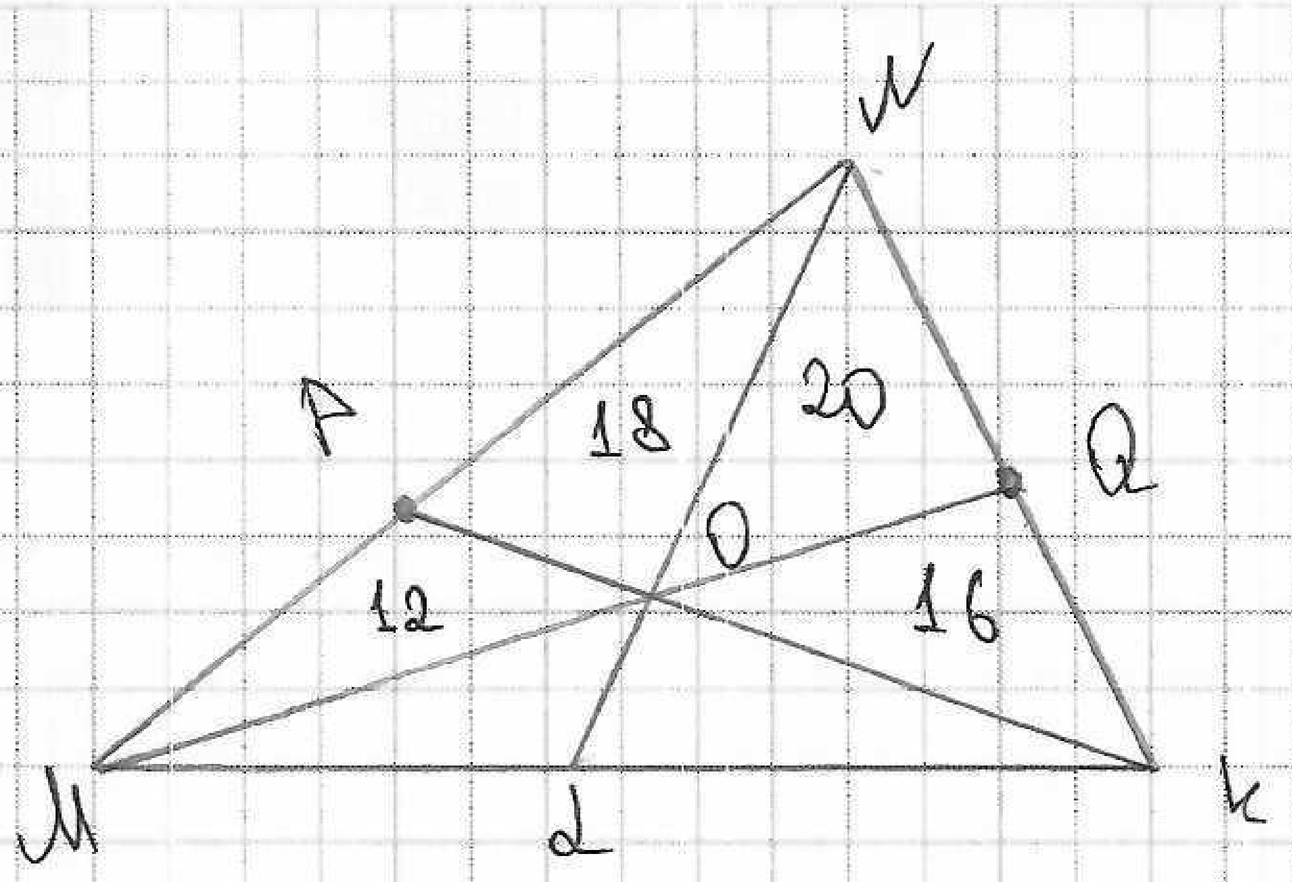


$\left\{\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 2 \end{array}\right.$

$x \in \left[\frac{1}{4}; 2\right]$

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$

№2



Дано:
$\triangle MNK$
$P \in MN$
$\frac{MP}{PN} = \frac{2}{3}$
$Q \in NK$ $\quad MQ \cap KP = O$
$\frac{NQ}{QK} = \frac{5}{4}$
$S_{MPO} = 12$

$S_{OQK} - ?$

Решение:

1. $\frac{S_{MPO}}{S_{NPO}} = \frac{MP}{NP}$

$\frac{12}{S_{NPO}} = \frac{2}{3}$

$S_{NPO} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 6 \cdot 3 = 18$

2. Д.п. $NO \cap KM = L$

3. По т. Чевы ($\triangle MNK$):

$\frac{MP}{PN} \cdot \frac{NQ}{QK} \cdot \frac{KL}{LM} = 1$

$\frac{\cancel{2} \cdot 5}{3 \cdot \cancel{4}_2} \cdot \frac{KL}{LM} = 1$

$\frac{5}{6} \cdot \frac{KL}{LM} = 1$

$\frac{KL}{LM} = \frac{6}{5}$

4. По т. Менелая ($\triangle MQK$):

$\frac{KL}{LM} \cdot \frac{MO}{OQ} \cdot \frac{QN}{NK} = 1$

$\frac{\cancel{5} \cdot \cancel{6}^2}{\cancel{9}_3 \cdot \cancel{5}} \cdot \frac{MO}{OQ} = 1$

$\frac{MO}{OQ} \cdot \frac{2}{3} = 1$

$\frac{MO}{OQ} = \frac{3}{2}$

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2 Лист работы 3 из 7

5. $\frac{S_{MON}}{S_{NOQ}} = \frac{MO}{OQ}$

$\frac{12+18}{S_{NOQ}} = \frac{3}{2}$

$S_{NOQ} = \frac{2\cdot 30}{3} = 2\cdot 10 = 20$

6. $\frac{S_{NOQ}}{S_{OQK}} = \frac{NQ}{QK}$

$\frac{20}{S_{OQK}} = \frac{5}{4}$

$S_{OQK} = \frac{20\cdot 4}{5} = 4\cdot 4 = 16$

Ответ. 16

№3 Ответ: 52

Оценка: Заметим, что нужно хотя бы 5 походов (1 - в одну сторону, 2 - в другую сторону и т.д.), т.к. в первый поход идут на противоположную сторону не более 2 человек во второй хотя бы один возвращается в третий не более 2 идут, в четвертый хотя бы один возвращается (т.к. на той стороне остался еще хотя бы один человек), в пятый хотя бы два идут и этого может хватить. ~~Заметим, что хотя бы два из этих походов занимают хотя бы 12 и 24 минуты, т.к. если их нет очевидно, что хотя бы 1 есть, т.к. Татьяна Олегова~~

~~нужно перейти на другую сторону, а если~~
~~Галон поход ≥ 18 минут только один~~
~~то Татьяна Олеговна и Игорь Константинович~~
~~ходили вместе и нужно~~

Заметим, что есть хотя бы один поход 24 минуты, т.к. Татьяна Олеговна должна перейти на противоположную сторону. И есть ещё хотя бы один поход ≥ 8 минут, т.к. у нас есть три человека, которые ходят дольше чем за 8 минут. Докажем, что есть хотя бы 3 похода ≥ 8 минут. Если есть ≤ 2 походов, занимающих ≥ 8 минут, то двое из Натальи, Игоря Константиновича и Татьяны Олеговны пошли вместе, до этого похода Юрий (поясн) должен был быть на противоположной стороне, чтобы им же пришлось возвращаться. Но у них должна быть опять палка, значит, кто-то из них троих должен был вернуться с палкой, а для того, чтобы вернуться нужно было пойти, значит, это уже 3 похода. (поясн:) Если они проходили последние, то кто-то из них должен был вернуться с палкой с противоположной стороны, соответственно, до этого он должен был туда пойти, тоже 3 похода. Также заметим, что каждый человек ходил нечетное количество раз, а, значит, если походов ≥ 8 минут 3, то Татьяна Олеговна, Игорь Константинович и Наталья

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2 Лист работы 4 из 7

~~ходили отдельно~~ прошли какой-то участок, где ~~...~~ считаешь их время, значит, ~~что~~ они потратили на эти 3 похода $\geq 8+18+24=26+24=50$ минут, а т.к. походов хотя бы 5, общее время хотя бы $50+4+4=58$ минут. Если походов ≥ 8 минут 4, то ~~есть пример на 52 минуты (ниже), а меньше быть не~~, т.к. ~~$\Rightarrow 24+$~~ кто-то из них ходил хотя бы 3 раза, а Татьяна Олеговна ходила хотя бы один $\Rightarrow$ общее время этих 4 походов $\geq 24+8+8+8=$ $=24+16+8=40+8=48$, ~~...~~ но т.к. походов 5, общее время хотя бы $48+4=52$ минуты. Если походов >4, то Татьяна Олеговна ходила хотя бы 4 раз, т.е. общее время $\geq 24+4\cdot 8=24+32=$ $=56$ минут. Итак, общее время ≥ 52 минут

Пример.

1. Ю (4) $\rightarrow$, Н (8) $\rightarrow$ 8 мин Н
2. $\leftarrow$ (4) Ю 4 мин
3. ТО (24) $\rightarrow$, Ик (18) $\rightarrow$ 24 мин ТО, Ик
4. $\leftarrow$ Н (8) 8 мин
5. Н (8) $\rightarrow$, Ю (4) $\rightarrow$ 8 мин ТО, Ик, Н, Ю

№4

$$(x+1)(x+2)(x+8)(x+16)=ax^2$$

$$(x^2+17x+16)(x^2+10x+16)=ax^2 \quad |:x^2,\ x\neq 0$$

Если $x=0$, то $16\cdot 16=a\cdot 0$

$16\cdot 16=0$ — неверно $\Rightarrow x\neq 0$

$$\left(x+\frac{16}{x}+17\right)\left(x+\frac{16}{x}+10\right)=a$$

Пусть $t=x+\frac{16}{x}+10$, тогда

$(t+7)t=a$

$t^2+7t-a=0$

$D=49+4a$

- $D<0 \Rightarrow$ решений нет $\ominus$

- $D=0 \Rightarrow t=-\frac{7}{2}=-3{,}5$

$49+4a=0$ $\qquad x+\frac{16}{x}+10=-3{,}5 \;\Big|\cdot 2x$

$4a=-49$

$a=-\frac{49}{4}$ $\qquad 2x^2+32+20x=-7x$

$a=-12{,}25$ $\qquad 2x^2+27x+32=0$

$D=27^2-4\cdot2\cdot32=729-256>0 \Rightarrow$ 2 корня $\oplus$

- $D>0 \Rightarrow t_1=\frac{-7+\sqrt{49+4a}}{2}$

$t_2=\frac{-7-\sqrt{49+4a}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{16}{x}+10=\frac{-7+\sqrt{49+4a}}{2} \;\Big|\cdot 2x \\ x+\frac{16}{x}+10=\frac{-7-\sqrt{49+4a}}{2} \;\Big|\cdot 2x \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+32+20x=-7x+x\sqrt{49+4a} \\ 2x^2+32+20x=-7x-x\sqrt{49+4a} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+(27-\sqrt{49+4a})x+32=0 \\ 2x^2+(27+\sqrt{49+4a})x+32=0 \end{array}\right.$$

$D'=(27-\sqrt{49+4a})^2-4\cdot32\cdot2=4a+522+54\sqrt{4a+49}$

$D''=(27+\sqrt{49+4a})^2-4\cdot32\cdot2=4a+522-54\sqrt{4a+49}$

Совокупность имеет два корня, когда ~~$D'=0$~~

$\downarrow$ другой лист

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D'=0 \\ D''=0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} D'>0 \\ D''<0 \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} D'<0 \\ D''\geq 0 \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

(1) $\begin{cases} 4a+522+54\sqrt{4a+49}=0 \\ 4a+522-54\sqrt{4a+49}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (\sqrt{4a+49})^2+54\sqrt{4a+49}+473=0 \\ (\sqrt{4a+49})^2-54\sqrt{4a+49}+473=0 \end{cases}$

Пусть $t=\sqrt{4a+49}$, $t\geq 0$

$\begin{cases} t^2+54t+473=0 \\ t^2-54t+473=0 \end{cases} \ominus$

$108t=0$

$t=0$

$\sqrt{4a+49}=0$

$4a+49=0$

$a=-\frac{49}{4}$

$a=-12,25$

(2) $\begin{cases} 4a+522+54\sqrt{4a+49}>0 \\ 4a+522-54\sqrt{4a+49}<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (\sqrt{4a+49})^2+54\sqrt{4a+49}+473>0 \\ (\sqrt{4a+49})^2-54\sqrt{4a+49}+473<0 \end{cases}$

Пусть $t=\sqrt{4a+49}$, $t \geqslant 0$

$$\begin{cases} t^2+54t+473>0 & (1) \\ t^2-54t+473<0 & (2) \end{cases}$$

$$D_1 = 27^2 - 473 = 729 - 473 = 256 = 2^8 = \left(2^4\right)^2 = 16^2$$

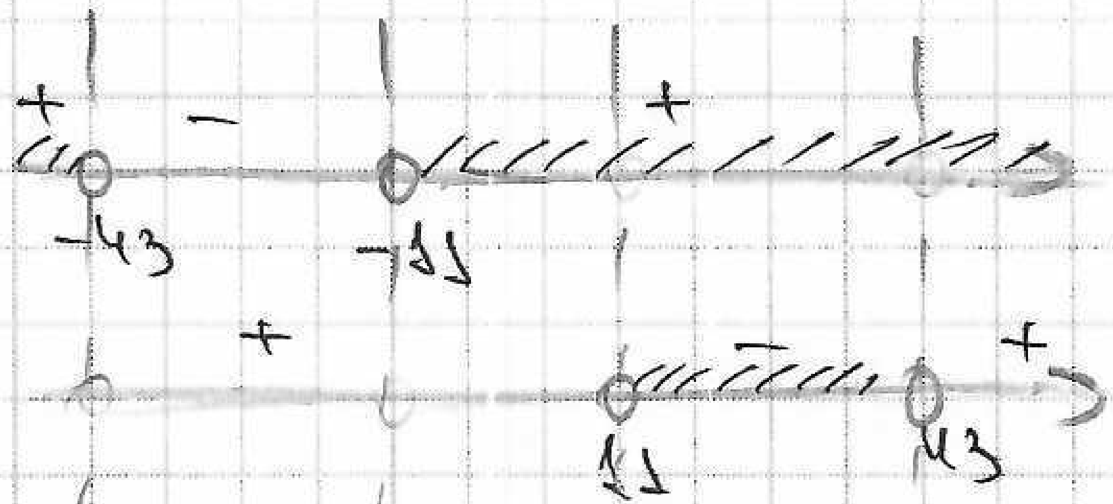
(1) $t_1 = \dfrac{-27-16}{1} = -43$

$t_2 = \dfrac{-27+16}{1} = -11$

(2) $t_1 = \dfrac{27-16}{1} = 11$

$t_2 = \dfrac{27+16}{1} = 43$

$$\begin{cases} (t+43)(t+11)>0 \\ (t-43)(t-11)<0 \end{cases}$$

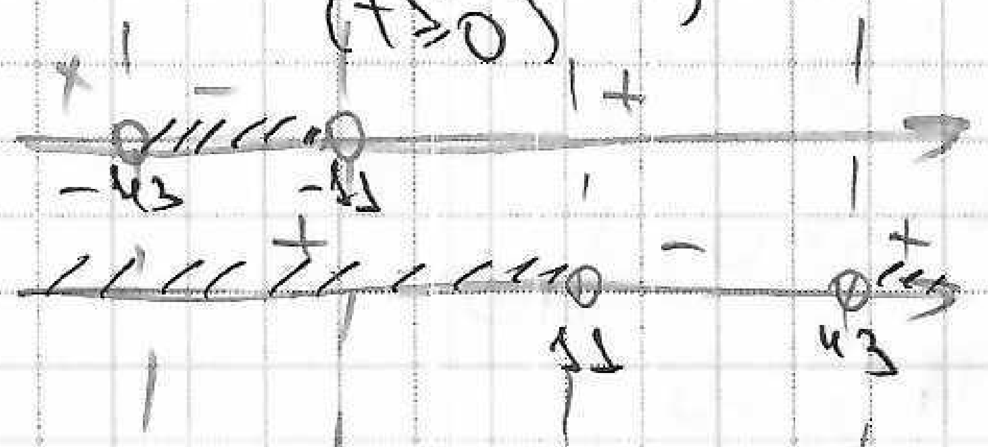


$t \in (11; 43)$ (*)

(3) $\begin{cases} 4a+522+54\sqrt{4a+49}<0 \\ 4a+522-54\sqrt{4a+49}>0 \end{cases}$

Аналогично (2), если $t=\sqrt{4a+49}$, $(t \geqslant 0)$, то

$$\begin{cases} (t+43)(t+11)<0 \\ (t-43)(t-11)>0 \end{cases}$$



$t \in (-43; -11)$ Но $t \geqslant 0 \Rightarrow$ нет таких t

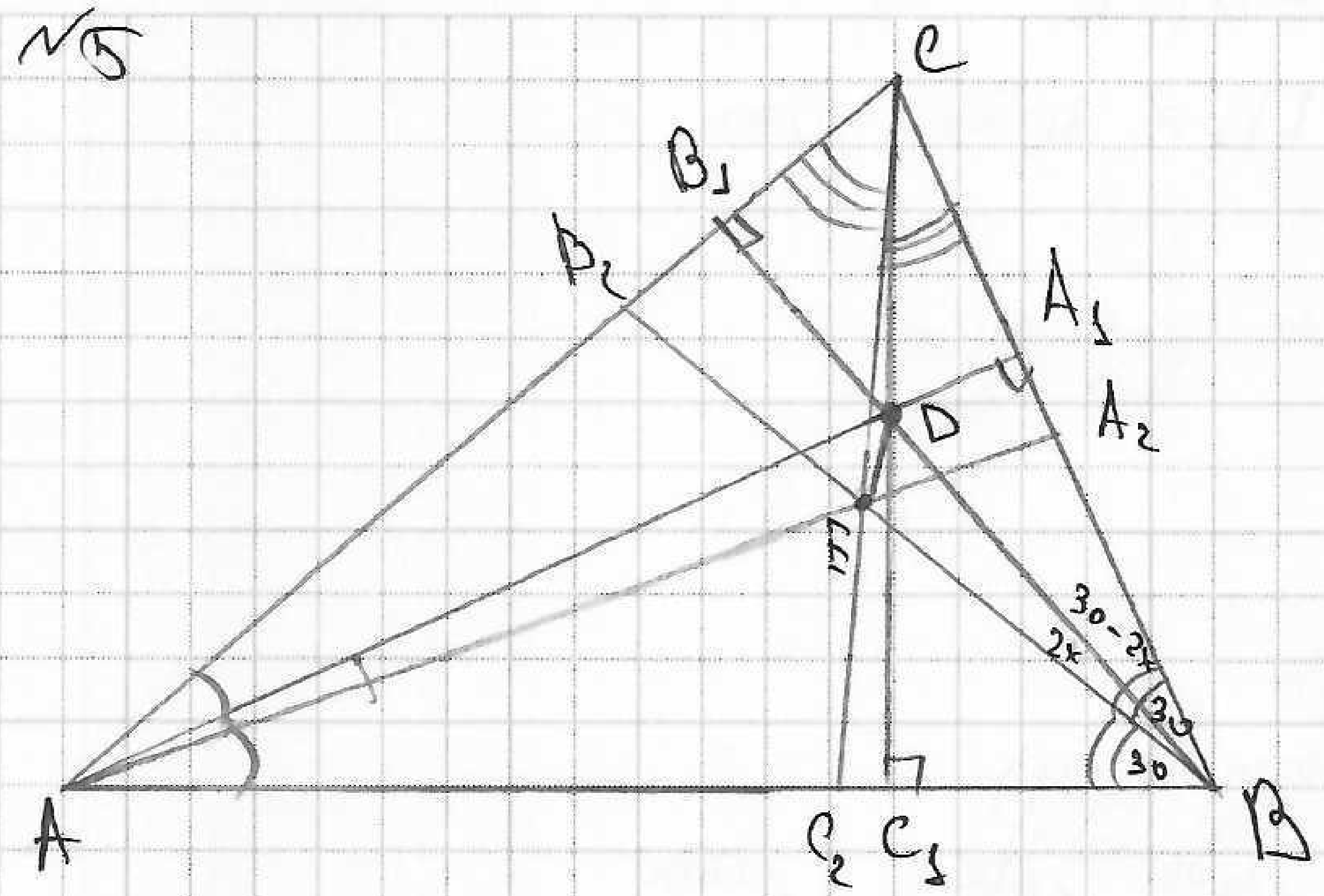
(*) $\begin{cases} \underset{\geqslant 0}{\sqrt{4a+49}} > \underset{\geqslant 0}{11} \\ \underset{\geqslant 0}{\sqrt{4a+49}} < \underset{\geqslant 0}{43} \end{cases}$ | возводим в квадрат, т.к. все неотрицательно

$$\begin{cases} 4a+49>121 \\ 4a+49<1849 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a>72 \\ 4a<1800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>18 \\ a<450 \end{cases}$$

Ответ: $\{-12{,}25\} \cup (18; 450)$

№5



Дано:
$\triangle ABC$:
$\angle A, \angle B, \angle C$ – арифм. посл.
CC_2, BB_2, AA_2 – бис-сы
CC_1, BB_1, AA_1 – высоты
$CC_1 \cap BB_1 \cap AA_1 = D$
$CC_2 \cap BB_2 \cap AA_2 = E$
$\triangle BDE$:
$\angle B, \angle D, \angle E$ – арифм. посл.

$\angle ACD$ – ?

1. Пусть $\angle A = x$, $\angle B = x + a$, тогда $\angle C = x + 2a$

По сумме углов треугольника:

$x + x + a + x + 2a = 180$

$3x + 3a = 180 \quad | :3$

$x + a = 60 \Rightarrow \angle B = 60^\circ$

2. $\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle BCA = \angle EAC + \angle ECA = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

По сумме углов треугольника:

$\angle AEC = 180^\circ - (\angle EAC + \angle ECA) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

По сумме углов четырехугольника:

$\angle A_1DC_1 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$; $\angle A_1DC_1 = \angle ADC = 120^\circ$ (верти.)

3. $ACDE$ – четырехугольник, $\angle AEC = 120^\circ = \angle ADC$ $\Big| \Rightarrow$ $ACDE$ – вписанный по признаку

4. Пусть $\angle EBD = 2x$, тогда

$\angle DBC = 30 - 2x$

$\angle BDA_1 = 90^\circ - (30^\circ - 2x) = 60^\circ + 2x$

$\angle C_1CB = 30^\circ$

$\angle B_1CB = 90^\circ - (30^\circ - 2x) = 60^\circ + 2x$

$\angle B_1CE = \angle ECB = \frac{1}{2}\angle B_1CB = 30^\circ + x$

$\angle ECD = \angle ECB - \angle C_1CB = 30^\circ + x - 30^\circ = x$

$\angle EAD = \angle ECD = x$
(вписанные, опирающиеся на одну дугу)

$\angle CDA_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\angle ADC = 120^\circ$

$\angle ADE = \angle ACE = 30^\circ + x$
(вписанные опир. на одну дугу)

$\angle EDB = 360^\circ - \overset{\angle BDA_1}{(60^\circ + 2x)} - \overset{\angle A_1DC}{60^\circ} - \overset{\angle ADC}{120^\circ} - \overset{\angle ADE}{(x + 30^\circ)} =$

$= \underbrace{360^\circ - 60^\circ - 60^\circ}_{240} \underbrace{- 120^\circ}_{120} \underbrace{- 30^\circ}_{90} - 2x - x = 90^\circ - 3x$

$\angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 2(30^\circ + x) = 120^\circ - 60^\circ - 2x = 60^\circ - 2x$

$\angle EAB = \angle EAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ - x$

$\angle AEB = 180^\circ - (30^\circ - x) - 30^\circ = 150^\circ - 30^\circ + x = 120^\circ + x$

$\angle AEC = 120^\circ$

$\angle CAD = \angle CAE - \angle DAE = 30^\circ - x - x = 30^\circ - 2x$

$\angle CED = \angle CAD = 30^\circ - 2x$
(как вписанные опир. на одну дугу)

$\angle DEB = 360^\circ - (120^\circ + x) - 120^\circ - (30^\circ - 2x) = \overset{90^\circ}{\overset{120^\circ}{240^\circ - 120^\circ} - x - 30^\circ} + 2x =$

$= 90^\circ + x$

5. Т.к. $\triangle BDE$: $\angle B, \angle D, \angle E$ – арифметическая последовательность, $\angle D = \frac{\angle B + \angle E}{2}$ (по св-ву)

Значит, $90^\circ - 3x = \frac{30^\circ + x + 2x}{2} \quad | \cdot 2$

$180^\circ - 6x = 90^\circ + 3x$

$9x = 90^\circ$

$x = 10^\circ$

6. Итак, $\angle ACB = 60^\circ + 2x$, $x = 10^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ + 2\cdot 10^\circ = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$

Ответ: 80°

№6

Общее количество набранных всеми командами очков:

$$\frac{12\cdot 13}{2}\cdot(M+1) = 6\cdot 13(M+1) = 78(M+1)$$

Команда, набравшая наименьшее число очков, набрала менее, чем $\frac{6\cdot 13(M+1)}{12} = \frac{13}{2}(M+1)$

Если $M+1$ (M - чётно) нечётно, тогда команда-победитель набрала не больше, чем $\frac{13(M+1)-1}{2} = \frac{13M+13-1}{2} = \frac{13M+12}{2} = \frac{13M}{2}+6$ очков, ~~т.к. $\frac{13M}{2}+6$ - макс наибольшая из возможных сумм очков команды-победителя~~. Но ~~если она набрала $\frac{13(M+1)-1}{2}$ очков, то остальные набрали не менее $\frac{13(M+1)+1}{2}$ очков каждая, т.е. общее число очков $11\cdot\frac{13(M+1)+1}{2} + \frac{13(M+1)-1}{2} = \frac{13\cdot 11M+13\cdot 11+11+13M+13-1}{2} = \frac{156M+156}{2} = 78(M+1)$~~

Тогда, если она набрала $\frac{13(M+1)-1}{2}$ очков, а остальные команды $\geq \frac{13(M+1)+1}{2}$, сумма очков $\geq 11\cdot\frac{13(M+1)+1}{2} + \frac{13(M+1)-1}{2} =$

$$= \frac{143M+143+11+13M+13-1}{2} = \frac{156M+156+10}{2} = 78(M+1)+5$$

Но сумма очков $78(M+1)$. Противоречие.

Значит, она набрала $\leq \frac{13(M+1)-3}{2}$ очков

Если она набрала $\frac{13(M+1)-3}{2}$ очков, ~~10~~ 15 команд набрали

$\frac{13(M+1)-1}{2}$, 5 команд — $\frac{13(M+1)+1}{2}$ и 1 команда $\frac{13(M+1)+3}{2}$, то сумма очков $\frac{13(M+1)-3+13(M+1)+3}{2}+$

$+5\cdot\frac{13(M+1)-1+13(M+1)+1}{2}=13(M+1)+5\cdot13(M+1)=6\cdot13(M+1)$

Т.е. такое возможно

Если $M+1$ - четно, то команда-победитель набрала $\frac{13(M+1)-2}{2}$ (M - нечетно) меньше, чем $\frac{13(M+1)}{2}$, т.к. $\leq \frac{13(M+1)-2}{2}$

Если она набрала $\frac{13(M+1)-2}{2}$, ~~то а~~ ~~10 команд~~ 10 команд набрали $\frac{13(M+1)}{2}$ а 1 команда набрала $\frac{13(M+1)+2}{2}$, то сумма очков $\frac{13(M+1)-2+10\cdot13(M+1)+13(M+1)+2}{2}=$

$=\frac{(10+1+1)\cdot13(M+1)}{2}=6\cdot13(M+1)$ — такое возможно