Схема заполнения

Для билета

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 9

№1 $\sqrt{3x+2} - \sqrt{2x^2+x-1} \geq 2x^2-2x-3$

пусть $3x+2 = a \geq 0$ по ОДЗ

и $2x^2+x-1 = b \geq 0$ по ОДЗ под корнем

Тогда

$2x^2-2x-3 = 2x^2+x-1-3x-2$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq b-a$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + a - b \geq 0$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \geq 0$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\underbrace{\sqrt{a}+\sqrt{b}+1}) \geq 0$

неотриц

всегда, даже положительное, ведь $\sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0$ да ещё $+1$.

$\Updownarrow$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$

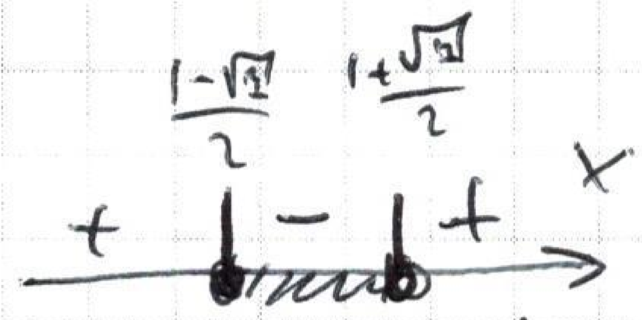
$\Updownarrow$

$a \geq b$ т.к a и b неотриц.

подставляем a и b из замены.

$3x+2 \geq 2x^2+x-1$

$2x^2-2x-3 \leq 0 \iff 2\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) \leq 0$



Можно использовать оборот листа для записи решений

Не забываем про ОДЗ $1+8$

$3x+2 \geq 0$

$x \geq -\frac{2}{3}$

$2x^2+x-1 \geq 0$

$\Updownarrow$

$2(x+1)(x-0{,}5) \geq 0$

$(x+1)(2x-1) \geq 0$

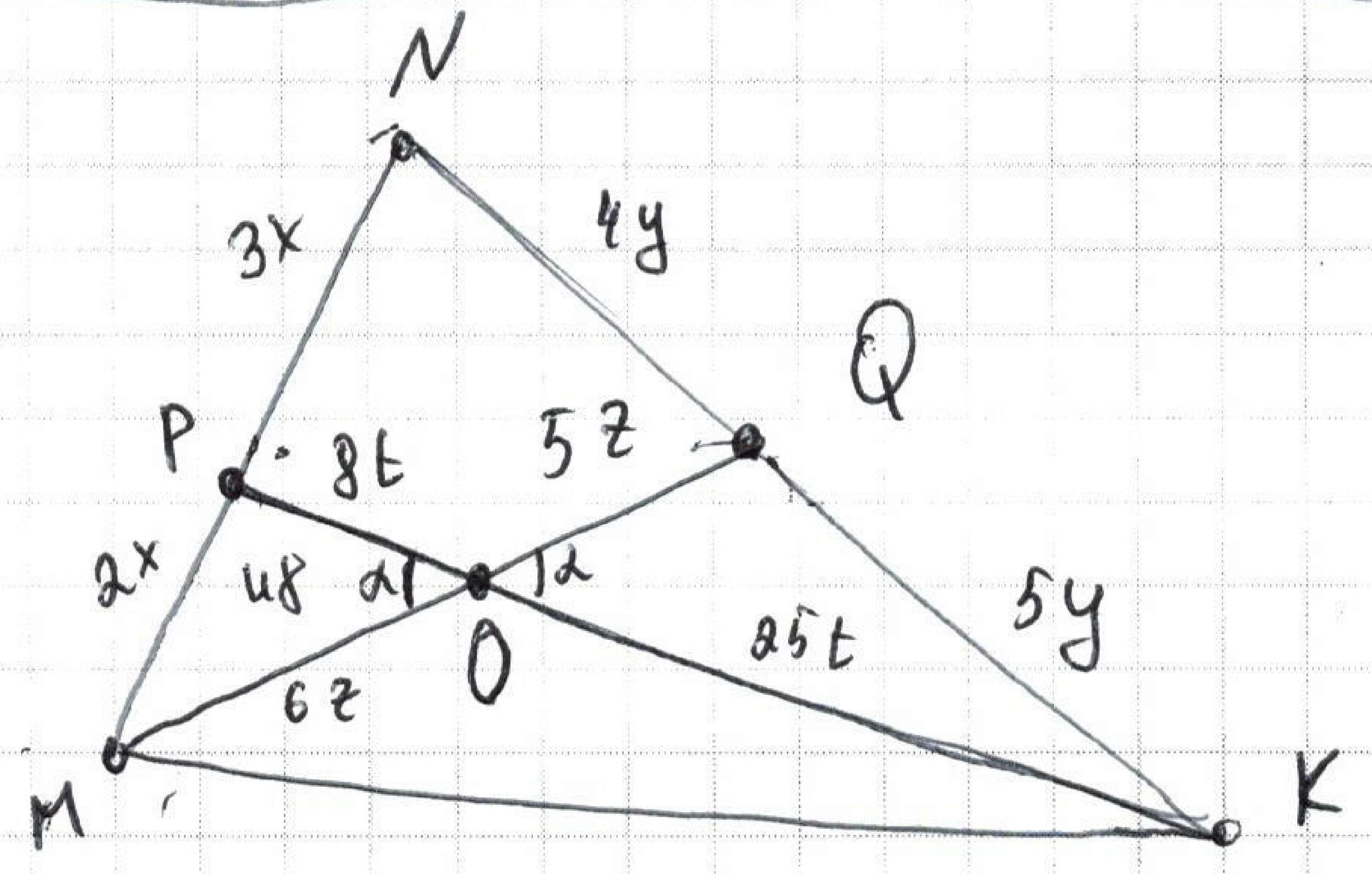
Заметим т.к $x \geq -\frac{2}{3} \Rightarrow$ за границу -1 он не попадает

объединением ОДЗ есть промежуток $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

поскольку $\frac{1-\sqrt{7}}{2} < 0$; а $\frac{1+\sqrt{7}}{2} > \frac{1}{2}$ то ответом

будет промежуток: $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$

N2



Дано: $\frac{MP}{PN}=\frac{2}{3}$

$\frac{NQ}{QK}=\frac{4}{5}$

$S_{MOP}=48$

S_{OKQ} - ?

$\angle MOP = \angle QOK$ (вертикальный) Далее запишем Менелая для $\triangle MNQ$ и прямой PK: $\frac{MP}{PN} \cdot \frac{NK}{QK} \cdot \frac{OQ}{OM} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{3x} \cdot \frac{9y}{5y} \cdot \frac{OQ}{OM} = 1 \Rightarrow \frac{OQ}{OM} = \frac{5}{6} \Rightarrow OQ = 5z$

$OM = 6z$

Теперь запишем Менелая для $\triangle NPK$ и прямой MQ:

$\frac{KQ}{QN} \cdot \frac{NM}{MP} \cdot \frac{PO}{OK} = 1 \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{PO}{OK} = 1 \Rightarrow \frac{PO}{OK} = \frac{8}{25} \Rightarrow PO = 8t$

$OK = 25t$

(1) $S_{\triangle MOP} = 48 = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot 8t \cdot 6z$ (2) $S_{\triangle KOQ} = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot 25t \cdot 5z$.

Делим 1 на 2: $\frac{48}{S_{\triangle KOQ}} = \frac{8t\cdot 6z}{25t\cdot 5z} = \frac{48}{125} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S_{\triangle KOQ} = 125}$ Ответ: $125 = S_{\triangle KOQ}$.

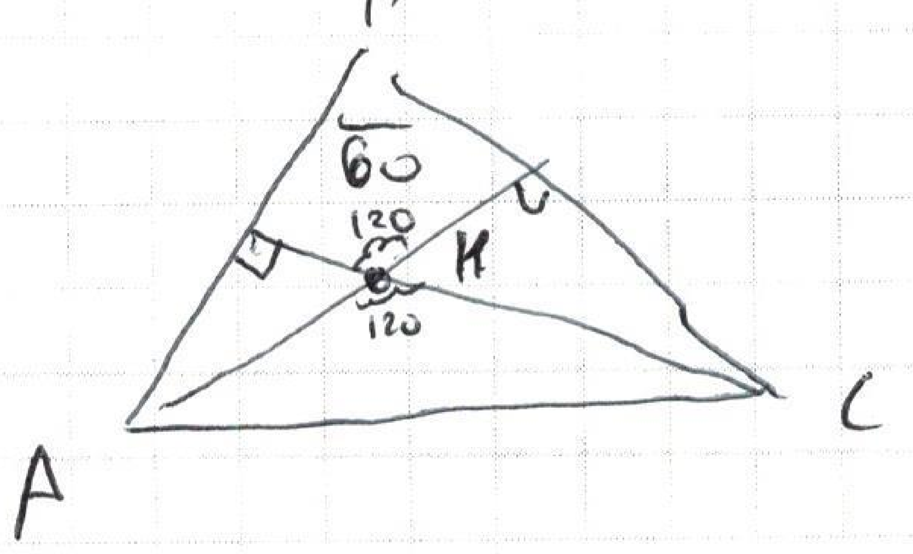
№5 если $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$ — ариф прогрессия, то $\angle B = x$

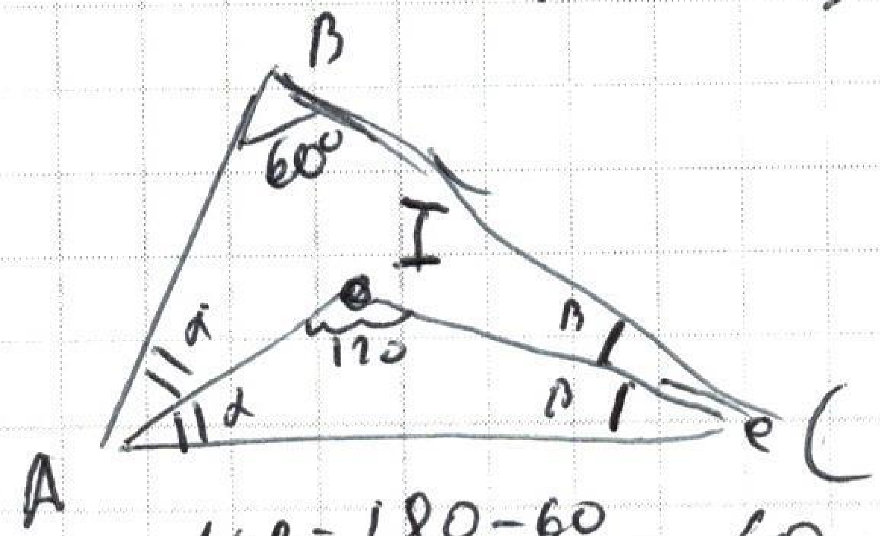
$\angle A = x-d$; $\angle C = x+d \Rightarrow$ $\angle A + \angle C + \angle B = 180 = 3x \Rightarrow$

$x = \angle B = 60^\circ$

$D = H$; $I = E$

Теперь докажем Лемму: ~~точки~~ если $\angle B = 60^\circ$, то точки $A\,C\,H\,I$ — лежат на одной окружности: ~~H~~ H — ортоцентр I — центр впис окр.





$\alpha + \beta = \frac{180-60}{2} = 60$

$\Downarrow$

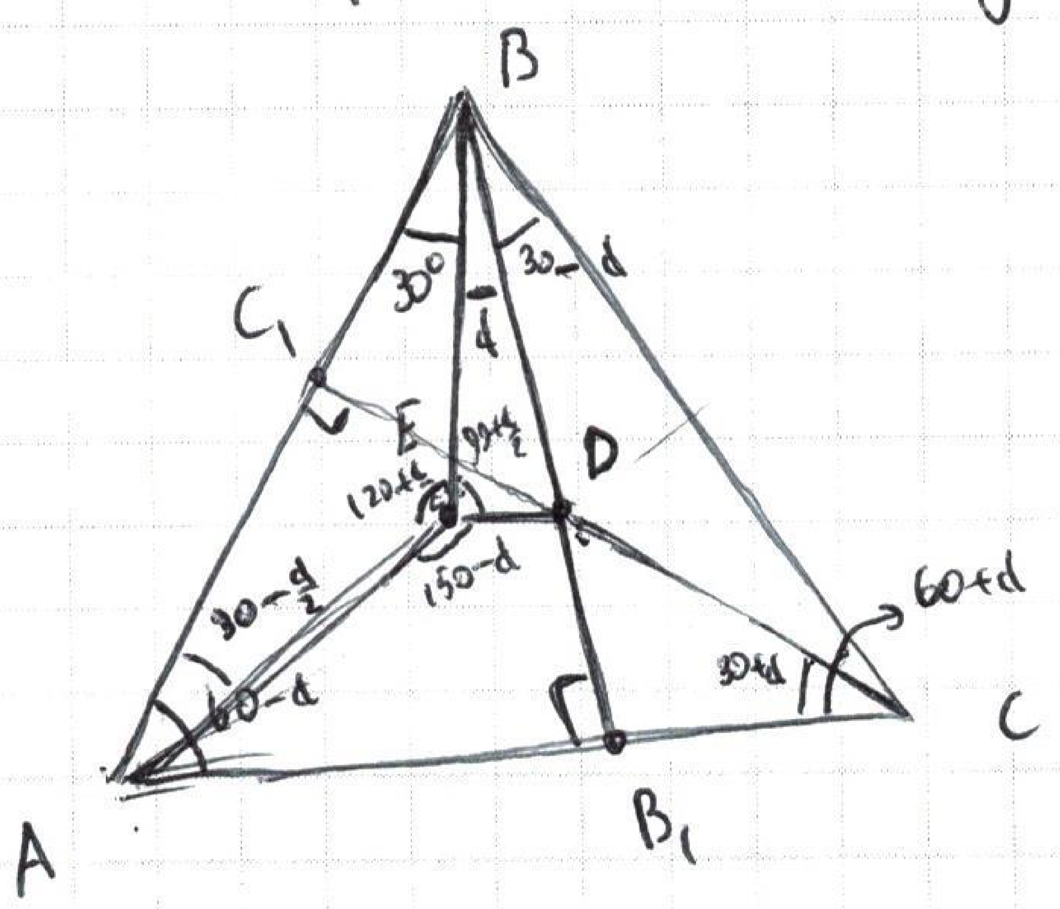
$\angle AIC = 180 - \alpha - \beta = 120$

$\Downarrow$

$\angle AHC = \angle AIC = 120^\circ \Rightarrow$ чет-ник $AHIC$ — вписанный.

Также заметим т.к $\triangle ABC$ — остроугольный $\Rightarrow \angle C = 60 + d < 90$

$\Rightarrow d < 30^\circ$ Нарисуем чертёж к задаче:



т.к $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle ABE = \angle EBC = 30^\circ$

$\angle ABD = 90 - 60 + d = 30 + d \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBD = 30 + d - 30 = d$

$\Downarrow$

$\angle DBC = 30 - d$

$\angle ACD = 90 - 60 + d = 30 + d$

$\angle BAE = \frac{\angle A}{2} = 30 - \frac{d}{2}$

$\angle AED = 180 - \angle ACD$ из вписанности 4чет-ника AEDC получаем

$\angle AED = 180 - 30 - d = 150 - d$

$\angle AEB = 180 - 30 + \frac{d}{2} - 30 = 120 + \frac{d}{2}$

$\Downarrow$

Вокруг точки E 360° $\Rightarrow$ $\angle BED = 360^\circ - 120 - \frac{d}{2} - 150 + d = 90 + \frac{d}{2}$

$\Downarrow$

$\angle BDE = 180 - d - 90 - \frac{d}{2}$ (из $\triangle BDE$ сумма углов 180°)

$\angle BDE = 90 - 1{,}5d$

Выпишем углы $\triangle BDE$:

$\underbrace{90 + \frac{d}{2}}_{\text{наибольший т.к } > 90}$; d ; $\underset{\angle BDE}{\underset{\shortparallel}{90 - 1{,}5d}}$; т.к $d < 30$ $\Rightarrow$ $\angle BDE \geq 90 - 45 = 45 > d$

Значит арифм прогрессия в $\triangle BDE$ по условию выглядит так:

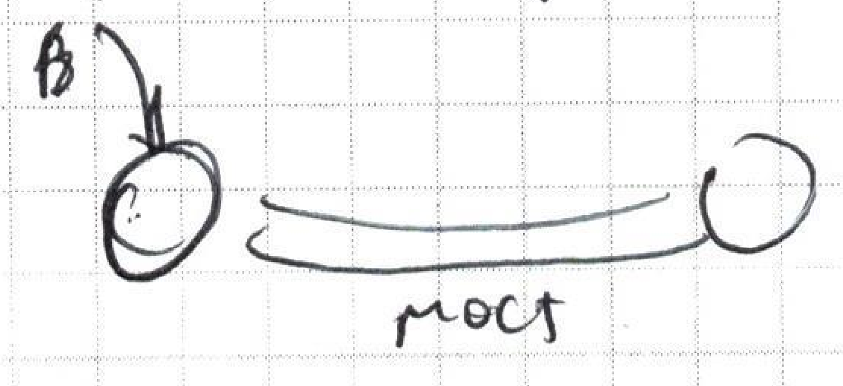
d ① $\quad 90 - 1{,}5d$ ② $\quad 90 + \frac{d}{2}$ ③ $\Rightarrow$ $\underbrace{(90 - 1{,}5d) \cdot 2}_{\text{средний член есть среднее арифметическое его соседей}} = d + 90 + \frac{d}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $180 - 3d = 90 + 1{,}5d$ $\Rightarrow$ $d = \frac{90}{4{,}5} = 20^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle A = 60 - 20 = 40^\circ$

Ответ: $\angle A = 40^\circ$

№3 Приведём пример на 33 мин



Виктор Рита Анг. Валер

3 мин 5 мин 15 мин 10 мин

$\underbrace{\text{3 мин 5 мин}}_{\text{быстр}}$ $\underbrace{\text{15 мин 10 мин}}_{\text{медленные}}$

Сначала Вик + Рит на право едут за 5 мин В+Р

и Виктор едёт обратно за 3 мин. с двумя касками В

теперь переправляются Ангелина + Валер за 15 мин Анг+Вал

обратно каски Виктору несёт Рита за 5 мин Рита

Они переправляются направо за 5 минут вместе (Рита + Виктор) Рита+Викт.

Итого: $5+3+15+5+5=33$ мин.

Чтобы это обосновать докажем, что Ангелина и Валерий должны ходить только 1 раз и только вместе, в противном случае если они не вместе, то точно будет переправа за 10 мин и за 15 мин, что уже 25 мин поезде нужно переправится 2им двоим людям, что добовляет ещё хотябы 3 поездку за минимальное время 3 мин $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимальное время в этом случае точно не меньше, чем $25+3\cdot3=34>33$, ну А если Ангелина и Валерий вместе, то оптимальный вариант очевидно как у меня, ведь чтобы переправиться Виктору и Рите необходимо было оставить человека на другой стороне моста, чтобы не заставлять ходить медленного 2-раза (иначе время было больше чем 33)

№4 $x=0$ – очевидно не корень $\Rightarrow$ $x\neq 0$ считаем

$$(x+2)(x+4)(x+9)(x+18)=ax^2$$

$$(x^2+20x+36)(x^2+13x+36)=ax^2 \quad \Big|:x^2$$ (в каждую скобку по $\frac{1}{x}$ умножаем справа)

$$\Big(\underbrace{x+\frac{36}{x}}_{t}+20\Big)\Big(\underbrace{x+\frac{36}{x}}_{t}+13\Big)=a$$

$\Rightarrow$ $x+\frac{36}{x}=t \quad |\cdot x$

$x^2-tx+36=0$

$D=t^2-(12)^2$

$D=(t-12)(t+12)\geq 0$

$\Downarrow$

t принимает значения $(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$

$$(t+20)(t+13)=a$$

$$t^2+33t+260-a=0$$

$\Downarrow$

$$D=33^2-260\cdot4+4a=1089-1040+4a=49+4a$$

$$t_{1,2}=\frac{-33\pm\sqrt{49+4a}}{2}$$

$$x+\frac{36}{x}=\frac{\pm\sqrt{49+4a}-33}{2} \quad |\cdot x$$

$$x^2+x\cdot\left(\frac{33\pm\sqrt{49+4a}}{2}\right)+36=0$$

$\Downarrow$

$$D_{1;2}=\left(\frac{33\pm\sqrt{49+4a}}{2}\right)^2-\underbrace{4\cdot36}_{12^2}$$ ~~чтобы уравнение имело 2 корня~~

~~есть 3 варианта~~ $\cancel{\begin{cases}D_1>0\\D_2<0\end{cases}}$ 1 ; $\cancel{\begin{cases}D_1<0\\D_2>0\end{cases}}$ 2 ; $\cancel{\begin{cases}D_1=D_2=0\end{cases}}$ 3

~~Рассмотрим 1 вар-т~~

$$D_{1;2}=\left(\frac{33\pm\sqrt{49+4a}}{2}+12\right)\left(\frac{33\pm\sqrt{49+4a}}{2}-12\right) \text{ vs } 0 \quad |\cdot 2 \text{ домножаем}$$

$$\left(57\pm\sqrt{49+4a}\right)\left(9\pm\sqrt{49+4a}\right) \text{ vs } 0$$

~~если с + обе скобки, то первая не может равняться нулю, значит вторая ноль~~
~~ведь 33 каждое слагаемое ≥ 0~~

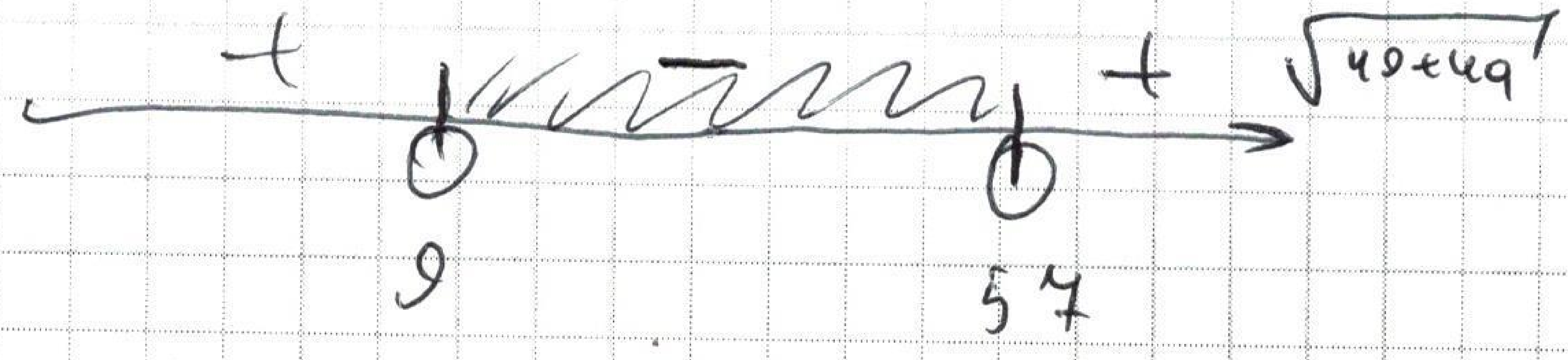
~~$2u = 33 + \sqrt{49+4a} \Rightarrow \sqrt{49+4a} < 0$ противоречие~~

Видим: если брать с + обе скобки, то мы всегда получаем два решения ⇒ чтобы было ровно 2 реш нужно потребовать, т.к $D > 0$

чтобы дискриминант, когда обе скобки с − был отрицательный чтобы не было еще корней:

$$\left(57 - \sqrt{49+4a}\right)\left(9 - \sqrt{49+4a}\right) < 0$$

$\Downarrow$



$\Downarrow$

$$\sqrt{49+4a} \in (9; 57)$$

$\Downarrow$

$$a \in \left(\frac{81-49}{4}; \frac{57^2-49}{4}\right)$$

$$a \in (16; 800)$$

Не забываем ОДЗ $49+4a \geq 0$ $a \geq -\frac{49}{4}$, что точно выполнено

Итого Ответ: $a \in (16; 800)$

№6 Приведём пример на 19 :

какая угодно перестановка, так очки ≥ 5·8=40 у каждого

Пред					
1	1	2	3	4	5 6 7 8 9 10
2	4	~~3~~ 1 2	1	3	
3	3	4	1	2	
4	2	3	4	1	
5	1	2	3	4	
6	4	1	2	3	
7	3	4	1	2	
8	2	3	4	1	

$\Sigma 1 = 2+2+9+8 = 21$

$\Sigma 3 = \Sigma 4 = 20$

$\Sigma 2 = 19$

Докем, что при 20≥ однозначно определить победителя не сможем:
если на 1-ом месте были все 4 команды =>
~~на~~ команды 1 2 3 4 нет на местах 5 6 7 8 9 10

⇓

сумма всех очков на ~~местах~~ 1-4 равна (4+2+3+4) 8 = 80

⇓

$\frac{80}{4} = 20$ ~~...~~ => по Дирихле либо у всех по 20

либо есть человек с ≤ 19 очками

не подходит ведь однозначно определить не может

Теперь если на месте 1 - было не более 3-ёх проектов

т.к мест было 8, а проектов не более 3-ёх есть 2 - варианта

либо по Дирихле $\exists$ проект, что был на 1-ом месте 4 раза

либо $\exists$ 2 проекта, которые были по ≥ 3 раза

① вар-т тогда сумма очков у этой команды не больше чем ~~20~~ $1+1+1+1+4\cdot4=20$

~~② вариант тогда~~