Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

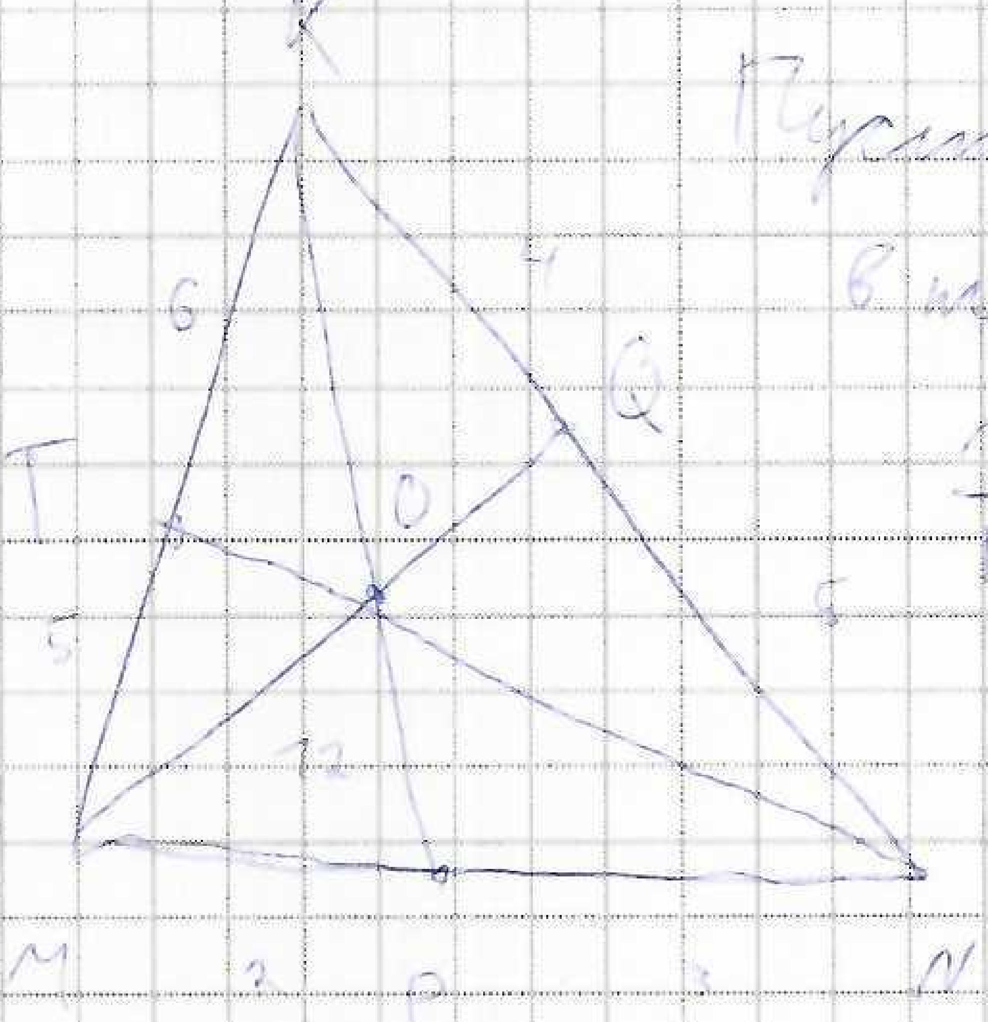
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Для билета

Вариант задания 2

Лист работы 1 из 2



№03.

Пусть прямая ON пересекает MK в точке T. Тогда по теореме Чевы,

$\frac{MP}{PN} \cdot \frac{NQ}{QK} \cdot \frac{KT}{TM} = 1 \Rightarrow \frac{KT}{TM} = \frac{6}{5}$.

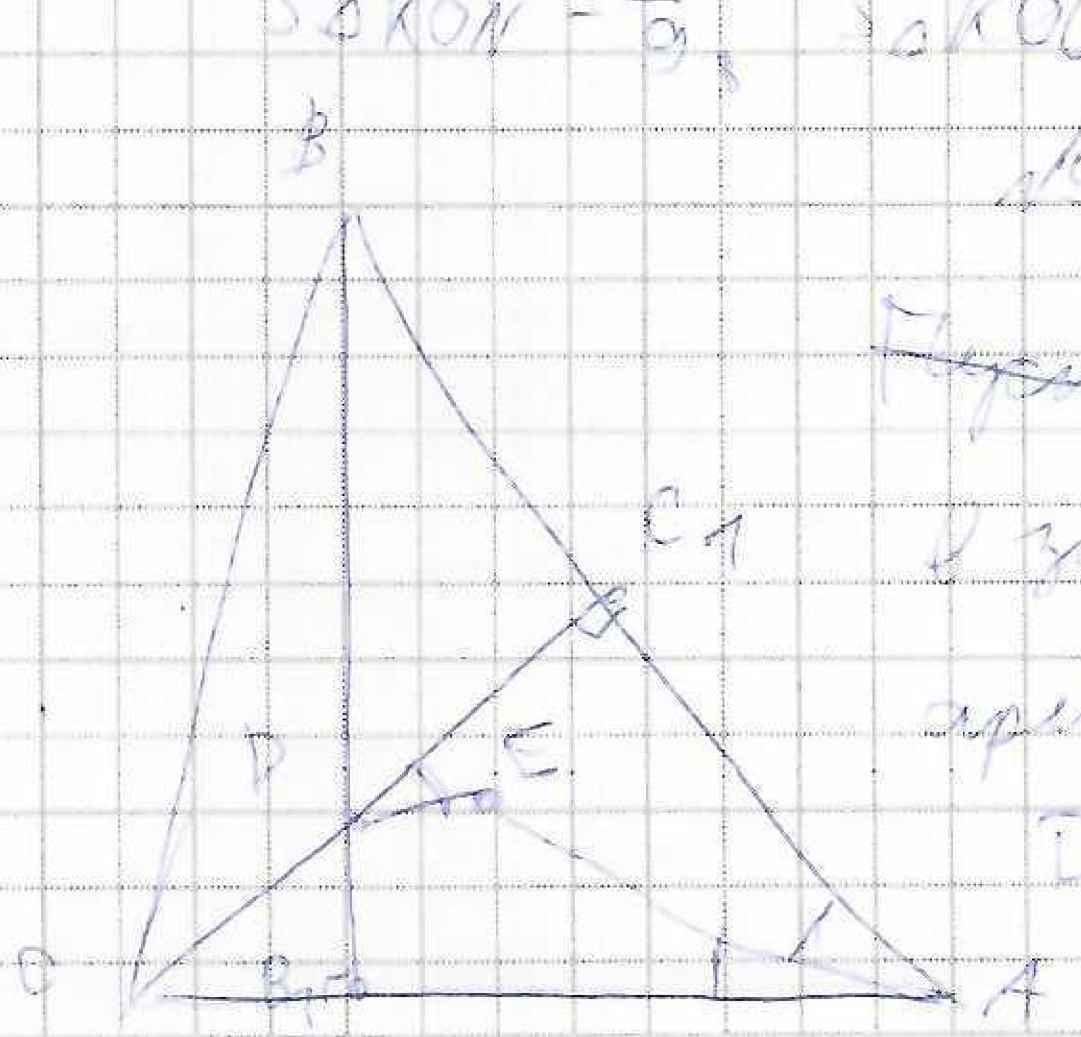
Теперь, поскольку $\frac{S_{\triangle MOP}}{S_{\triangle MON}} = \frac{MP}{MN} = \frac{2}{5}$,

$S_\triangle MON = 30$.

Также, $\frac{S_\triangle MON}{S_\triangle KON} = \frac{MT}{TK} \Rightarrow S_\triangle KON = 36$. Теперь, так как

~~к~~ $\frac{S_\triangle KOQ}{S_\triangle KON} = \frac{4}{9}$, $S_\triangle KOQ = 16$. Ответ: 16

№05



~~Пусть С~~ Пусть в $\triangle XYZ$ углы в заданном порядке образуют арифм. прогр. Пусть $\angle X = a$, $\angle Y = a+b$, Тогда $\angle Z = a+2b$. Мы знаем, что $\angle X + \angle Y + \angle Z = 180$, т.е. $3(a+b) = 180°$,

Можно использовать оборот листа для записи решений

$\alpha+\beta = \angle\gamma = 60^\circ$. ~~Т~~ Так ведь, из условия $\angle ABC$ и $\angle BDE = 60^\circ$

Пусть C_1 и B_1 — основания высот $\triangle ABC$ из вершин C и B соответственно.

Тогда, поскольку $\angle AOC = 180^\circ - \angle B = 120^\circ$, и $\angle AEC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2} = 120^\circ$, четырехугольник $AEOC$ вписанный.

~~Поэтому~~ Обозначим $\angle A$ как 2α. Тогда $\angle EAC = \angle EOC_1$ (из вписанности) $= \alpha$, а $\angle BOC_1 = 60^\circ - \alpha$. Теперь $\angle B_1BC_1 = 90^\circ - \angle BOC_1 = 30^\circ + \alpha$. Заметим, что в $\triangle BB_1A$: $90^\circ + 2\alpha + (30^\circ + \alpha) = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \cancel{40}\ 20^\circ$, и $\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 80^\circ$. Заметим, что также возможен аналогичный случай $\angle C = 40^\circ$, $\angle A = 80^\circ$, но поскольку из условия прорисования в порядке ABC, то $\angle C > \angle A$.

Ответ: 80°.

№2.

Пусть $\sqrt{18x-7} = a$, $\sqrt{4x^2+11x-3} = b$

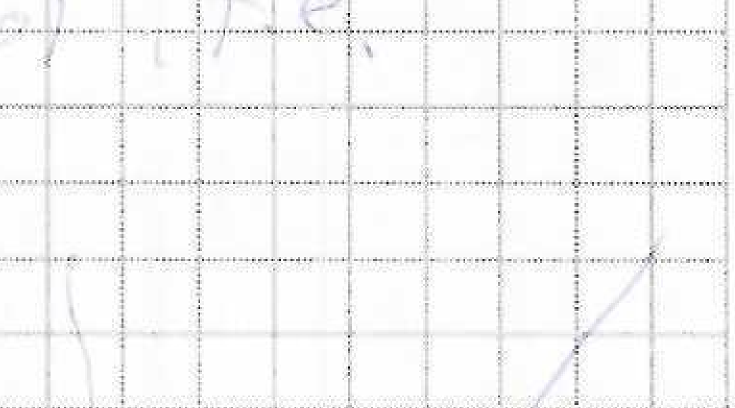
Тогда $a - b \geq b^2 - a^2$; $(a-b)+(a-b)(a+b) \geq 0$; $(a-b)(a+b+1) \geq 0$.

Поскольку $a \geq 0$ и $b \geq 0$, $a+b+1 > 0$. Значит надо чтобы $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ (т.к. $a, b \geq 0$), т.е.

$18x-7 \geq 4x^2+11x-3$; $4x^2-7x-2 \leq 0$

$D = 49+32 = 81$

$x = \frac{7 \pm 9}{8} = 2; -0{,}25$.

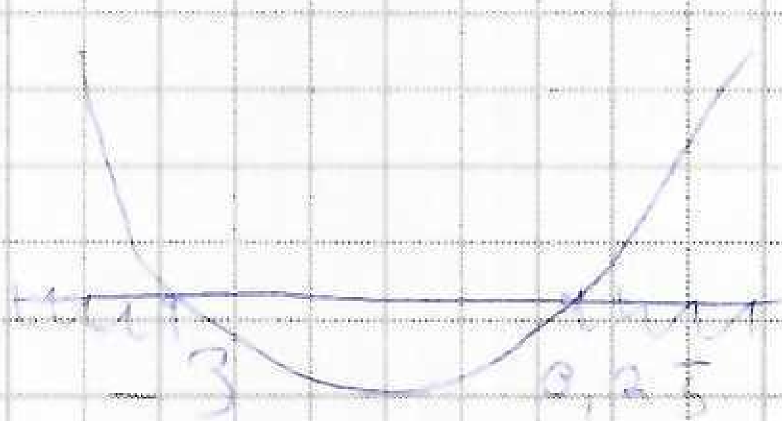


$x \in [-0{,}25; 2]$.

Теперь проверим ОДЗ.

$18x-7 \geq 0$; $x \in [\frac{7}{18}; +\infty)$.

$4x^2+11x-3 \geq 0$; $D = 121+48 = 169$; $x = \frac{-11 \pm 13}{8} = 0{,}25; -3$.



$x \in (-\infty; -3] \cup [0{,}25; +\infty)$.

Надо решить систему из 2-х пунктов ОДЗ и самой задачи:

$$\begin{cases} x\in[0{,}25;2] \\ x\in[\frac{1}{10};+\infty) \\ x\in(-\infty;-3]\cup[0{,}25;2] \end{cases} \Leftrightarrow x\in \cancel{[0{,}25;2]}\ [0{,}25;2].$$

Ответ: $x\in[0{,}25;2]$.

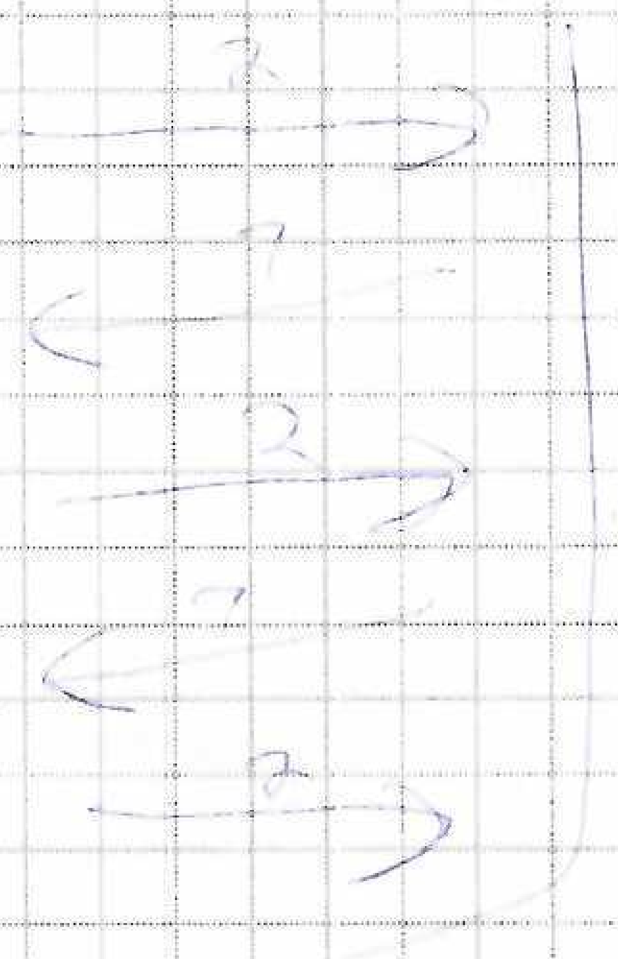
№3.

Ответ: $\cancel{48}$ 52 минуты

Пусть сначала за 8 минут проедут Юрий с Натальей. Потом Юрий за 4 минуты вернется с 2 касками. Потом ГО и ИК за 24 минуты переправятся. Наталья за 8 минут вернется, Юра с Натальей переправятся за 8 минут. $8+4+24+8+8=52$.

Оценка. Пусть сначала вдвоем ~~кт~~ кто-то переправился (одному нет смысла т.к. придется кому-то идти после него и время ~~уже~~ будет не меньше, если сразу двум пешим вдвоем). Потом кому-то надо вернуться с 2 касками. Теперь 2 каски в начале пути, но человек трое. Применяя аналогичные рассуждения,

понимаем, что всего будет 15 перехо-
дов (передвижений между деревнями).



~~Так~~ Поскольку 15 надо перед-
вигаться, один из маршрутов
займет 24 минуты. Если его
будет ходить 2 раза, то
всего времени = 24·2+4·3=60.
Аналогично доказывается, что
они должны идти с ИК, Т, Л.

Итого всего времени = 24+18+4·3=54.
Если они ходили первыми или последними
маршрутами на этих днях (по схеме) не
единственные, и [illegible] на [illegible].
Значит они не правильны.
В оставшихся маршрутах ходили только
Юрий и Николай. Поскольку у них 2 общих
тех маршрута, времени на них ~~на~~ потра-
чено 3·2=6 минут. Тогда без одинаковых
маршрутов (кроме Юрий) иначе всего времени
= 24+18+3+4 = 57.) Но тогда он ходил на третьем
маршруте (т.к. иначе вернулся на
[illegible]), а так ТО и ИК. Противоречие.
Значит всего времени = 24+18+3·4 = 52. [illegible]