Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 2

№1 $\sqrt{18x-1}-\sqrt{4x^2+11x-3}\geq 4x^2-7x-2 \quad (1)$

ОДЗ: $\begin{cases}18x-1\geq 0\\ 4x^2+11x-3\geq 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x\geq\frac{1}{18}\\ (x+3)(4x-1)\geq 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x\geq\frac{1}{18}\\ \left[\begin{array}{l}x\leq -3\\ x\geq\frac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases} \Longleftrightarrow x\geq\frac{1}{4}$

умножим обе части неравенства 1 на $(\sqrt{18x-1}+\sqrt{4x^2+11x-3})>0$ при $x\in\mathbb{R}$, получим

$\sqrt{18x-1}^2-\sqrt{4x^2+11x-3}^2\geq(4x^2-7x-2)(\sqrt{18x-1}+\sqrt{4x^2+11x-3})$

$\sqrt{18x-1}^2-\sqrt{4x^2+11x-3}^2=(18x-1)-(4x^2+11x-3)=-4x^2+7x+2$

$-4x^2+7x+2\geq(4x^2-7x-2)(\sqrt{18x-1}+\sqrt{4x^2+11x-3})$

$(4x^2-7x-2)\underbrace{(\sqrt{18x-1}+\sqrt{4x^2+11x-3}+1)}_{>0}\leq 0$

значит, $4x^2-7x-2\leq 0$

$4x^2-7x-2=4(x-2)(x+\frac{1}{4})=(x-2)(4x+1)$

$D=(-7)^2+4\cdot 2\cdot 4=81$

$x_1=\frac{7+9}{8}=2,\quad x_2=\frac{7-9}{8}=-\frac{1}{4}$

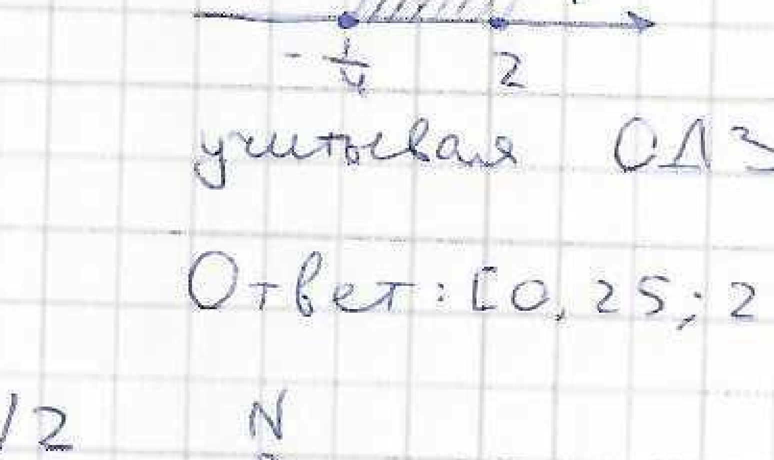
$(x-2)(4x+1)\leq 0$

$+\quad -\frac{1}{4}\quad 2\quad +$ $\qquad x\in[-\frac{1}{4};2]$

учитывая ОДЗ, $x\in[0,25;2]$

Ответ: $[0,25;2]$

№2



$MP:PN=2:3$

$NQ:QK=5:4$

$S_{\Delta MOP}=12$

$S_{\Delta KOQ}-?$

1. ΔNKP, сек. MQ, по теореме Менелая: $\frac{NQ}{QK}\cdot\frac{KO}{OP}\cdot\frac{PM}{MN}=1$

$\frac{5}{4}\cdot\frac{KO}{OP}\cdot\frac{2}{5}=1$

$\frac{KO}{OP}=2$

Можно использовать оборот листа для записи решений

2. $\triangle NMQ$, сек. KP, по теореме Менелая: $\frac{NP}{PM}\cdot\frac{MO}{OQ}\cdot\frac{QK}{KN}=1$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{MO}{QO}\cdot\frac{4}{9}=1$

$\frac{MO}{QO}=\frac{3}{2}$, $\frac{QO}{MO}=\frac{2}{3}$

3. $\angle POM=\angle QOK$ (вертикальные), значит $\frac{S_{\triangle KOQ}}{S_{\triangle MOP}}=\frac{QO\cdot OK}{OP\cdot OM}=\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}$

$S_{\triangle KOQ}=\frac{4}{3}S_{\triangle MOP}=\frac{4}{3}\cdot 12=16$

Ответ: 16

№4 $(x+1)(x+2)(x+8)(x+16)=ax^2$ имеет 2 решения

$(x^2+3x+2)(x^2+24x+128)=ax^2$

$x^4+24x^3+128x^2+3x^3+72x^2+384x+2x^2+48x+256=ax^2$

$x^4+27x^3+202x^2+432x+256-ax^2=0$

$x^4+27x^3+(202-a)x^2+432x+256=0$

пусть этот многочлен вида $(x^2+bx+c)(x^2+dx+e)$

ур-е ~~имеет~~ $(x^2+bx+c)(x^2+dx+e)=a$ имеет 2 решения, если:

1. $x^2+bx+c=x^2+dx+e$, т.е. левая часть представляет полный квадрат, тогда

$(x^2+bx+c)^2=0$

~~$x^2+bx+c=0$~~

$(x^2+bx+c)^2=x^4+b^2x^2+c^2+2bx^3+2cx^2+2bcx=x^4+2bx^3+(b^2+2c)x^2+$
$+2bcx+c^2$

$\begin{cases}2b=27\\ b^2+2c=202-a\\ 2bc=432\\ c^2=256\end{cases}$ $\begin{cases}b=13,5\\ \left[\begin{array}{l}c=-16\\ c=16\end{array}\right.\\ 2\cdot 13,5\cdot c=432\\ \underset{189}{\cancel{256}}+2c=202-a\end{cases}$ $\begin{cases}b=13,5\\ c=16\\ a=\cancel{202-388}\ -19\end{cases}$

$(x^2+13,5x+16)^2=0$

$x^2+13,5x+16=0$

$D=13,5^2-4\cdot 16=\cancel{258}\ 189-64=125>0$, т.е. ур-е имеет 2 корня при $a=-19$

2. одна из частей имеет 2 корня, а вторая не имеет корней

~~пусть ур-е $x^2+bx+c=$~~

$\left[\begin{array}{l}x^2+bx+c=0\\ x^2+dx+e=0\end{array}\right.$ пусть ур-е $x^2+bx+c=0$ имеет 2 корня, а ур-е $x^2+dx+e=0$ не имеет корней

дискриминант первого ур-я равен $b^2-4c>0$, второго ур-е $d^2-4e<0$

3. обе части имеют по одному корню

т.е. $D=b^2-4c=d^2-4e=0$

Ответ: при $a=-19$

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

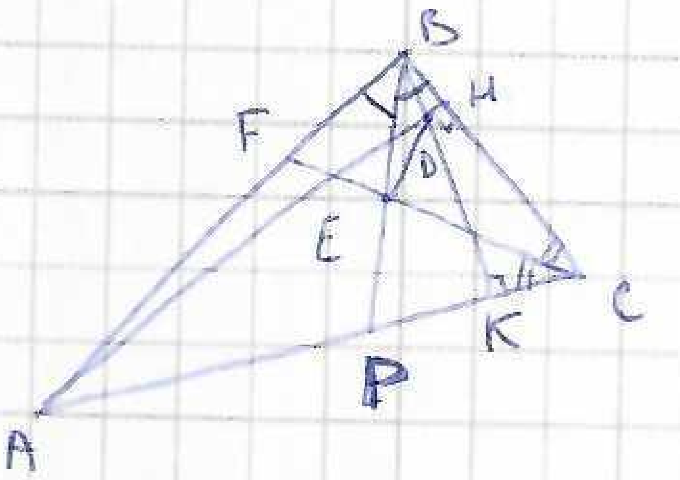
Лист работы 2 из 2

№3 Кому-то после перехода нужно возвращаться обратно. Чтобы вся группа преодолела участок за наим. время, обратно должен идти самый быстрый человек, т.е. Юрий. Т.к. он должен возвращаться, то ему каждый раз нужно преодолевать участок с кем-то. (порядок не важен)
2 человека идут со скоростью того, кто медленнее, т.е. если Юрий сначала будет идти с Натальей, потом — с Игорем К, потом — с Татьяной О., то это займёт $8 + 4 + 18 + 4 + 24 = 58$ мин

(т.е. переход выглядит так: Юрий идёт с Натальей за 8 мин, возвращается за 4 мин, идет с Игорем К за 18 мин, возвращается за 4 мин, идет с Татьяной О за 24 мин)

Ответ: 58 мин

№5



1. пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \alpha + a$, $\angle ACB = \alpha + 2a$ (т.к. эти углы образ. арифм. прогрессию)
по теореме о сумме углов тр-ка $\alpha + \alpha + a + \alpha + 2a = 180°$
$3\alpha + 3a = 180°$
$\alpha + a = 60°$, значит, $\angle ABC = 60°$, $\alpha + 2a < 90°$ (т.к. тр-к ABC — остроуг.), т.е. $a < 30°$
2. пусть $\angle EBD = \beta$, $\angle EDB = \beta + b$, $\angle DEB = \beta + 2b$
аналогично п.1 получаем, $\cancel{\beta + b = 60°}$ $\angle EDB = 60°$, $b < 30°$
3. ~~∠BD~~ BP — биссектриса $\angle ABC$, т.е. $\angle ABP = \angle CBP = 30°$
$\triangle ABC$ — остроуг, значит высоты пересекаются внутри тр-ка, т.е. точки E и H пересек-ся внутри тр-ка, значит, ~~∠EBD~~ $\angle EBD < \angle EBC$, ~~∠EBD~~ $\beta < 30°$
4. $\triangle ABK$, $\angle AKB = 90°$, по теореме о сумме углов тр-ка
$\angle BAK + \angle ABK = 90°$
$\alpha + \angle ABP + \angle PBK = 90°$
$\alpha + 30° + \beta = 90°$
$\alpha = 60° - \beta$, $\beta = 60 - \alpha$
5. $\triangle CBK$, $\angle CKB = 90°$, по теореме о сумме углов тр-ка
$\angle BCK + \angle KBC = 90°$
$\alpha + 2a + \angle PBC - \angle PBK = 90°$
$\alpha + 2a + 30° - \beta = 90$
$90 - 2\beta + 2a = 90$
$a = \beta$
6. $\beta + b = 60°$, $\beta = 60° - b = 60° - \alpha$, т.е. $b = \alpha$

Ответ: 80°

№6 пусть n - место, которое присудил председатель, тогда у номера могли быть оценки от $n-3$ до $n+3$