№2

$P(t) = t^3 - 4t + 2$

$P(0) = 2 > 0$

$P(1) = 1 - 4 + 2 < 0$

$P(10) = 1000 - 40 + 2 > 0$

$P(-10) = -1000 + 40 + 2 < 0$

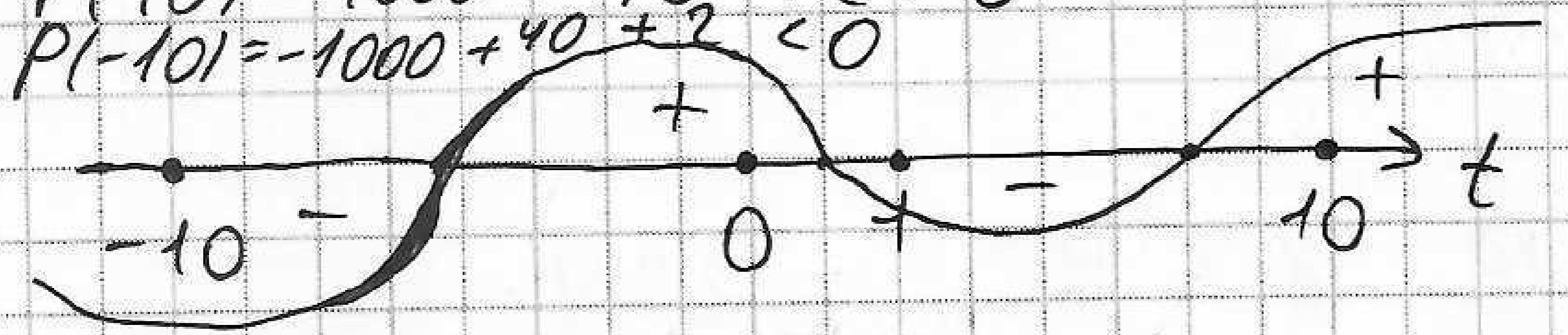


График ф-ции $P(t)$ пересекает ось t в трех точках. Сл-но, ур-е $P(t) = t^3 - 4t + 2 = 0$ имеет 3 различных решения.

Тогда x, y, z — 3 различных решения.

$x^3 - 4x + 2 = 0 \qquad x^3 = 4x - 2$

$y^3 - 4y + 2 = 0 \qquad y^3 = 4y - 2$

$z^3 - 4z + 2 = 0 \qquad z^3 = 4z - 2$

~~По т. Виета~~ По т. Виета для кубического многочлена:

$x + y + z = 0$

$xy + xz + yz = 4$

$xyz = 2$

$x^7 = x \cdot x^3 \cdot x^3 = x \cdot (4x-2)(4x-2) =$
$= x(4x-2)^2 = x(16x^2 - 16x + 4) =$
$= 16x^3 - 16x^2 + 4x = 16(4x-2) - 16x^2 + 4x =$
$= 64x - 32 - 16x^2 + 4x = -16x^2 + 68x - 32$

Аналогично, $y^7 = -16y^2 + 68y - 32$ и
$z^7 = -16z^2 + 68z - 32$.

Тогда, $x^7 + y^7 + z^7 = -16(y^2 + x^2 + z^2) +$
$+ 68\underbrace{(x+y+z)}_{0 \text{ (из т. Виета)}} - 32 \cdot 3 = -16(y^2 + x^2 + z^2) - 96$

Найдём $x^2 + y^2 + z^2$:

$(x+y+z)^2 = 0$
$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) = 0$
$x^2 + y^2 + z^2 = 2(\underbrace{xy + zx + yz}_{4}) = 8$

Получим, что
$x^7 + y^7 + z^7 = -16 \cdot 8 - 96 = -224$.

Ответ: -224.

№1.

~~Всего вариантов:~~

~~$7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 28 \cdot 30 \cdot 6 = 168 \cdot 30 = 5040$~~

~~Варианты, которые не подходят:~~

Варианты, которые подходят:

ССГСГСГ $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 126$ Г – гласные

СГССГСГ $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 126$ С – согласные

СГСГСГС $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 126$

СГСГССГ $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 126$

ГСССГСГ $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 126$

ГССГСГС $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 126$

ГСГСССГС $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 126$

ГСГСГСС $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 126$

Всего комбинаций $126 \cdot 8 = 1024$.

Ответ: 1024.

№6

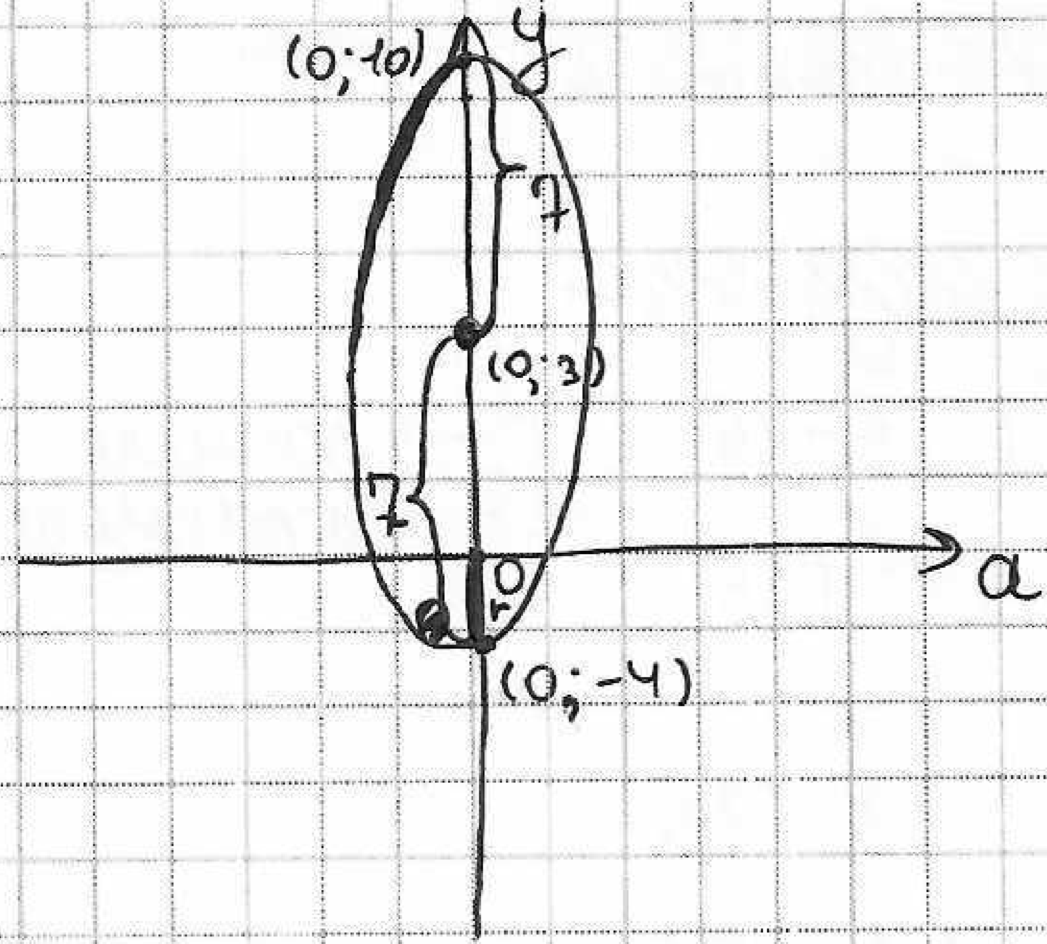
$$49x^2+40(y-3)^2=1960 \qquad |:1960$$

$$\frac{x^2}{40}+\frac{(y-3)^2}{49}=1$$

Ур-е эллипса:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$x_0=0 \qquad y_0=3 \Rightarrow$ центр орбиты в т. $(0;3)$



$a=\sqrt{40}$ (тыс. км)

$b=7$ (тыс. км)

$$V=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{b}\right)}$$

$r=4$ (тыс. км) (из графика)

$$V=\sqrt{3{,}9\cdot10^5\left(\frac{2}{4000}-\frac{1}{7000}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{39}{10}\cdot10^5\left(\frac{1}{2000}-\frac{1}{7000}\right)}=$$

$$=\sqrt{39\cdot10^4\cdot\frac{5}{14000}}=\sqrt{\frac{39\cdot50}{14}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3\cdot13\cdot5\cdot5\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot7}}=5\sqrt{\frac{39}{7}}$$

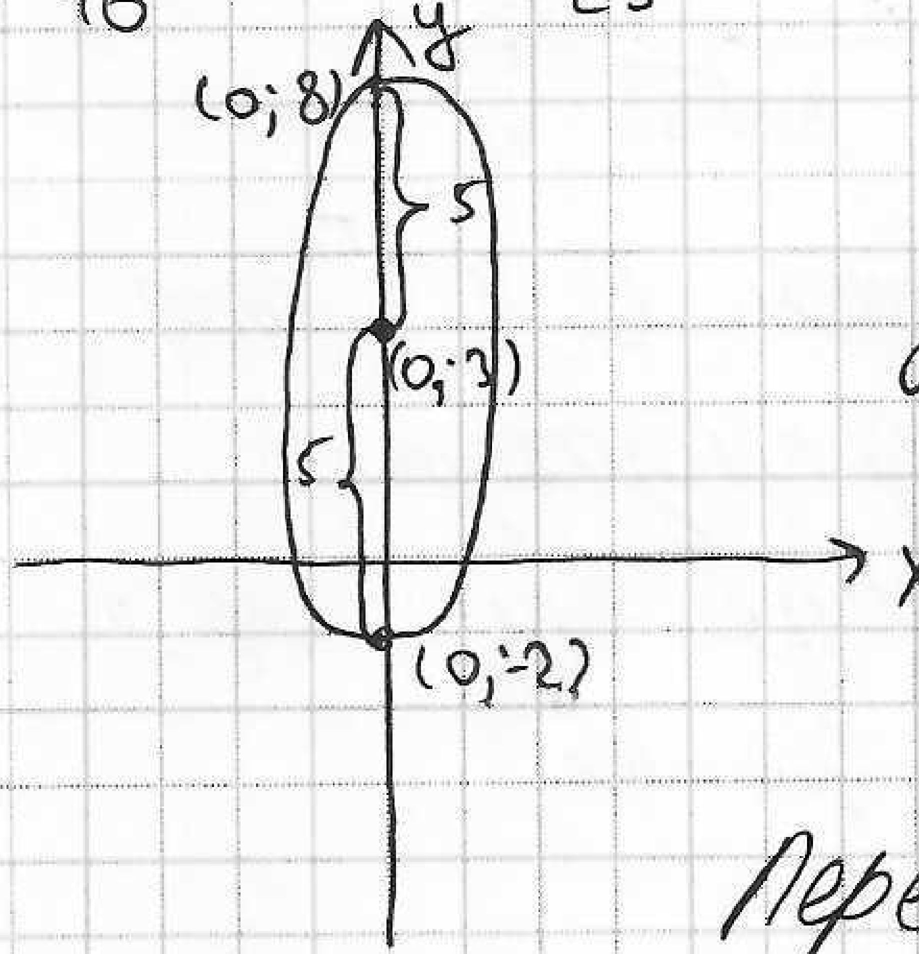
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

$$25x^2+16(y-3)^2=400 \quad |:400$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$$



центр орбиты, по которой движется научная станция (0; 3)

$a=4;\ b=5$

Переходная орбита должна проходить через т. (0; 8) (орбита с науч. станцией) и т. (0; −4) (орбита захоронения)

Тогда центр переходной орбиты в т. (0; 2), а $b=6$ (тыс. км)

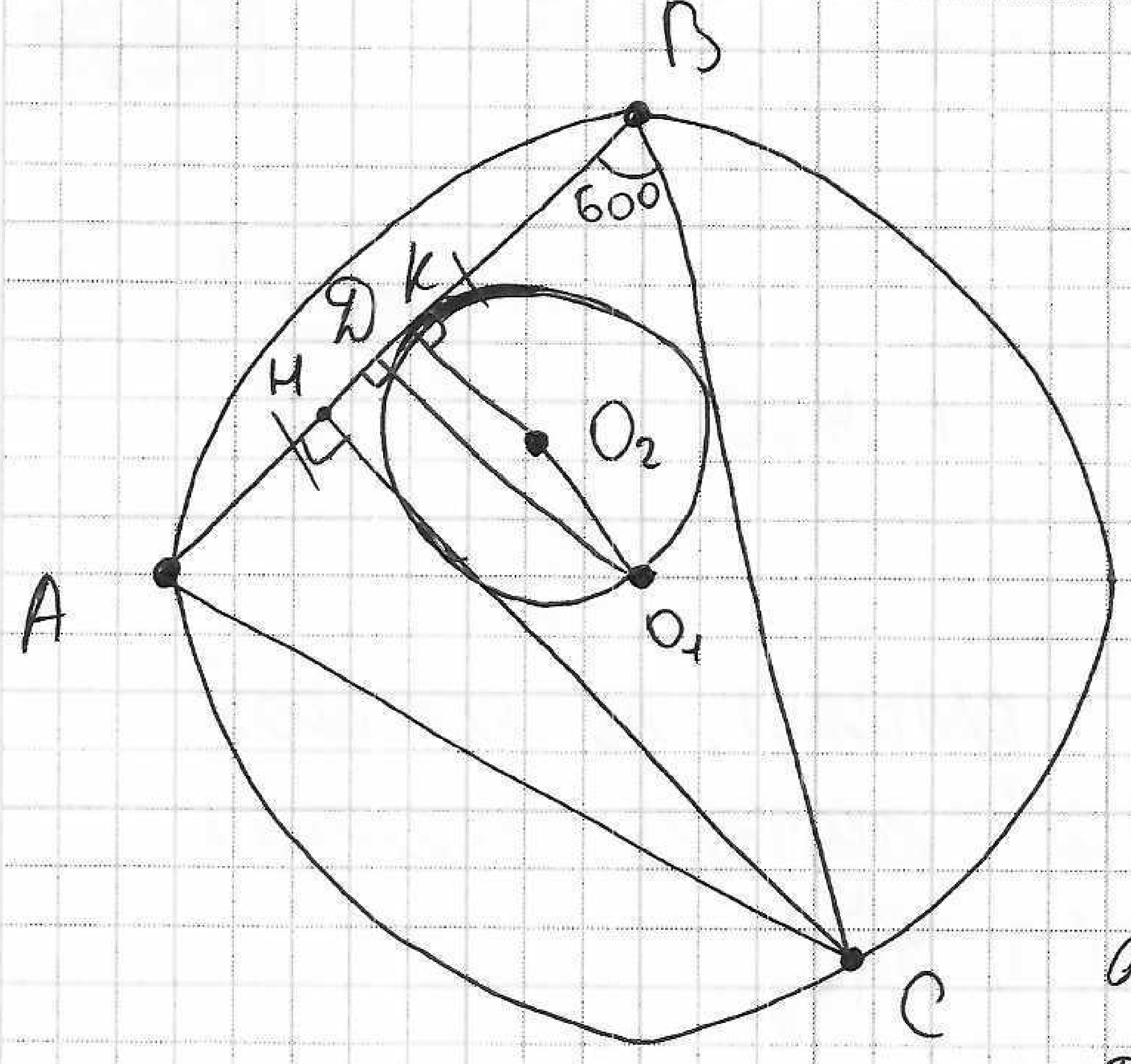
Получим ур-е переходной орбиты

$$\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

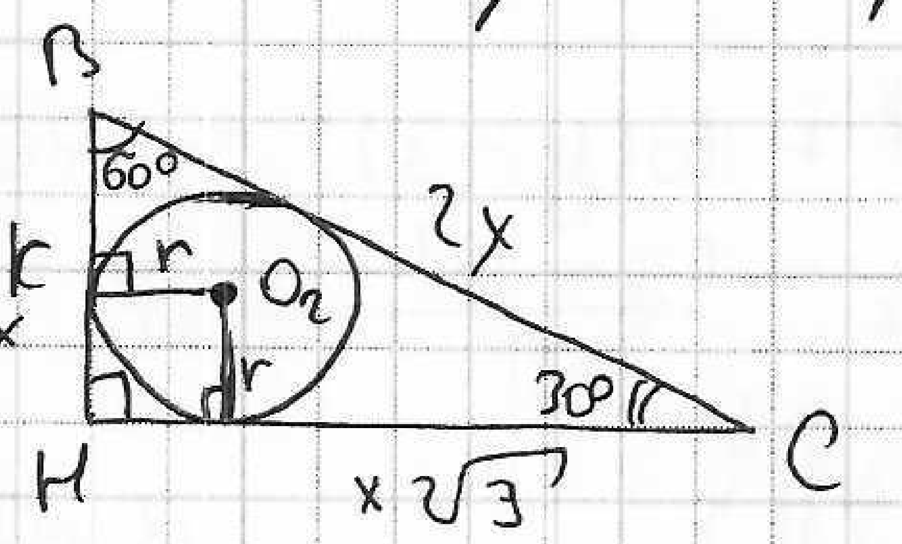
То есть, $y_0=2$; $r=6$.

Ответ: $V=5\sqrt{\frac{39}{7}}$; $y_0=2$; $r=6$.

№3.



Рассмотрим тре-к BHC:



Проведём O_2K "r", это будет перпендикуляр, т.к. радиус впис. окр. к стороне тре-ка.

$$r = \frac{BH + CH - BC}{2}$$

Пусть $BH = x$, тогда $BC = 2x$ (т.к. $\angle BCH = 30°$), тогда $BC = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$.
по т. Пифагора

$$r = \frac{x + x\sqrt{3} - 2x}{2} = 3 - \sqrt{3}$$

$$\frac{x(\sqrt{3} - 1)}{2} = 3 - \sqrt{3}$$

$$x = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Получили, что $BH = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$; $CH = \frac{6\sqrt{3} - 2 \cdot 3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{6\sqrt{3} - 6}{\sqrt{3} - 1} = \frac{6(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = 6$; $BC = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$.

По т. синусов:

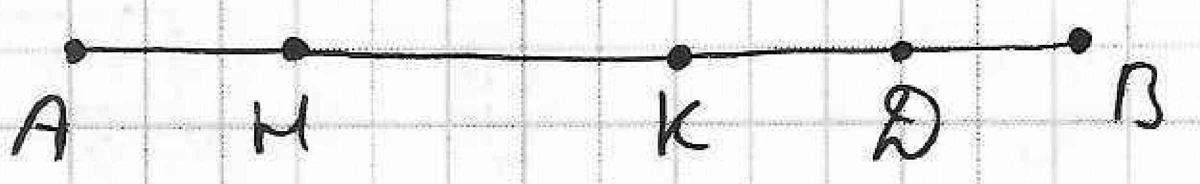
$$\frac{AC}{\sin \angle B} = 2R \qquad \frac{AC}{\sin 60°} = 2 \cdot \sqrt{13} \qquad AC = \sqrt{39}.$$

По т. Пифагора $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{39 - 36} = \sqrt{3}$.

$AB = AH + BH = \sqrt{3} + \frac{6 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3 - \sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$.

Центр описанной окр. лежит на пересечении сер. перп. Проведём O_1D, сер. перп. к стороне AB. O_1D делит AB пополам: $AD = BD = \frac{AB}{2} = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} - 1)}$.

Проверим расположение точек H, D, K на стороне AB

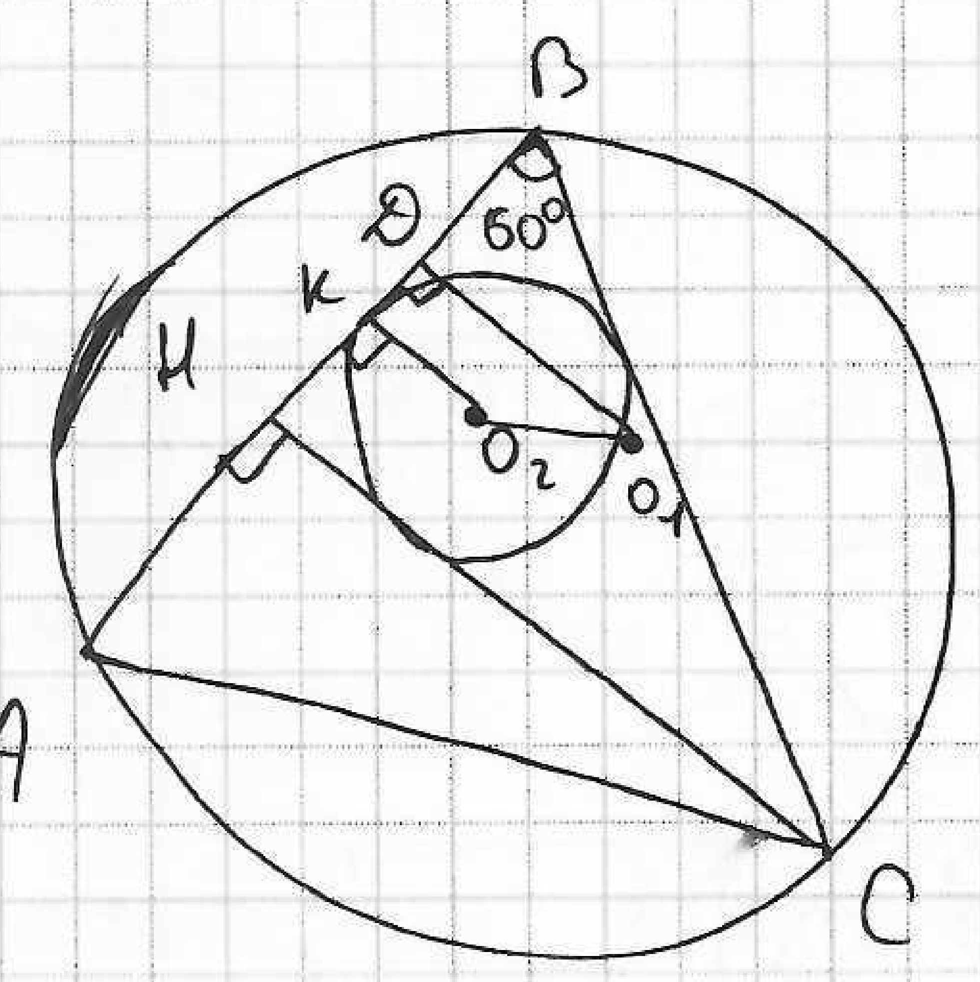


$BK = BH - KH = BH - r = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} - \sqrt{3} + 3 = \frac{6}{\sqrt{3} - 1}$

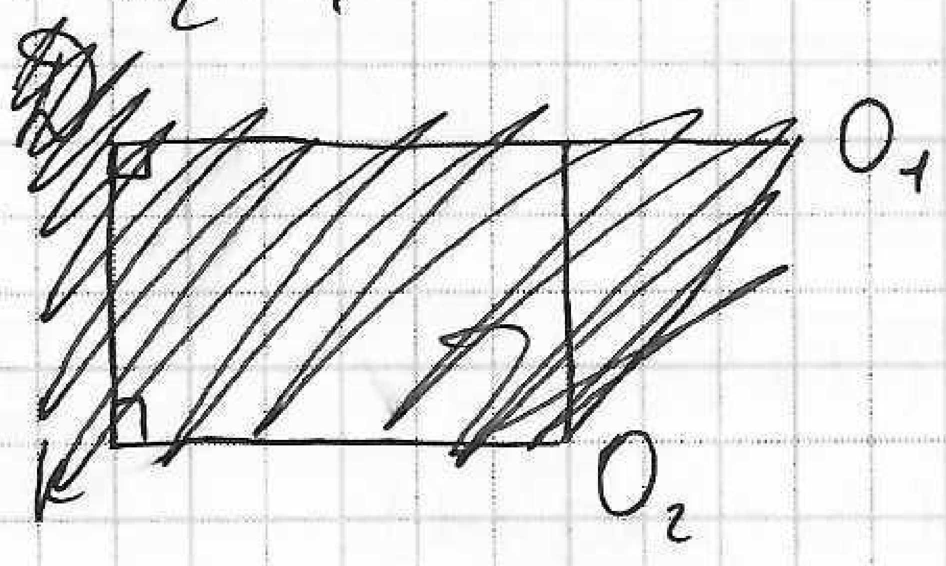
$BH > BK$

$BK > BD$

Тогда получим немного другой рисунок:

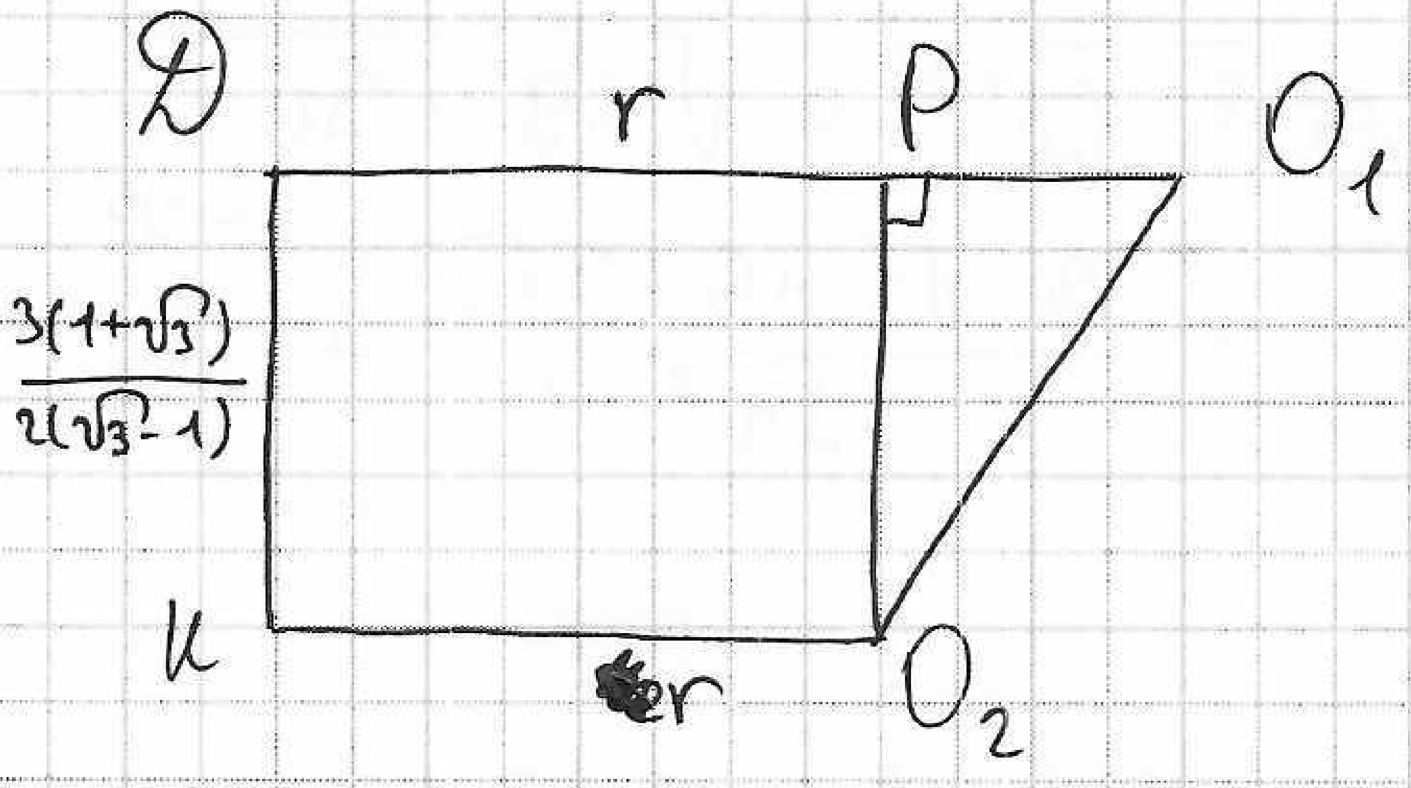


Рассмотрим многоуг. DKO_2O_1:

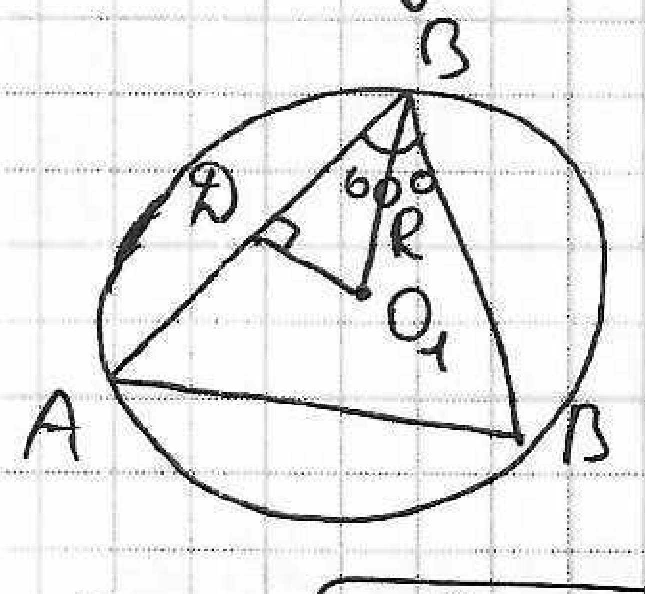


$$DK = BK - BD = \frac{6}{\sqrt{3}-1} - \frac{9-3\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)} =$$

$$= \frac{12-9+3\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}-1)}$$



Найдём O_1D:



$$O_1D = \sqrt{R^2 - BD^2} =$$
по т. Пифагора

$$= \sqrt{13 - \left(\frac{9-3\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{13 - \left(\frac{81-54\sqrt{3}+27}{4(3-2\sqrt{3}+1)}\right)} = \sqrt{13 - \left(\frac{108-54\sqrt{3}}{16-8\sqrt{3}}\right)} =$$

$$= \sqrt{13 - \frac{54(2-\sqrt{3})}{8(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{13 - \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

Опустим в нашем пр-ке перп. PO_2:

$$PO_2 = DK = \frac{3(1+\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}-1)}; \quad O_1P = O_1D - r =$$

$$= \sqrt{\frac{13}{2}} - 3 + \sqrt{3}$$

Тогда по т. Пифагора $O_1O_2 = \sqrt{O_2P^2 + O_1P^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{3(1+\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}-1)}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{13}{2}} - 3 + \sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9(1+2\sqrt{3}+3)}{4(3-2\sqrt{3}+1)} + \left(\frac{\sqrt{13}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}} - 3\right)^2} =$$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2 Лист работы 5 из 7

$$= \sqrt{\frac{36+18\sqrt{3}}{16-8\sqrt{3}} + \frac{(\sqrt{13}+\sqrt{6})^2}{2} + 9 - 6\frac{\sqrt{13}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(18+9\sqrt{3})}{2(8-4\sqrt{3})} + \frac{13+6+2\sqrt{78}}{2} + 9 - 6\frac{\sqrt{2}(\sqrt{13}+\sqrt{6})}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{18+9\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}} + 9 + \frac{19+2\sqrt{78}-6(\sqrt{26}+\sqrt{12})}{2}} =$$

$$= \sqrt{9 + \frac{18+9\sqrt{3}}{2(4-2\sqrt{3})} + \frac{19+2\sqrt{78}-6\sqrt{26}-6\sqrt{12}}{2}} =$$

$$= \sqrt{9 + \frac{18+9\sqrt{3}+(4-2\sqrt{3})(19+2\sqrt{78}-6\sqrt{26}-6\sqrt{12})}{2(4-2\sqrt{3})}} =$$

$$= \sqrt{9 + \frac{18+9\sqrt{3}+76+8\sqrt{78}-24\sqrt{26}-24\sqrt{12}-18\sqrt{3} - 4\sqrt{3\cdot 78}+12\sqrt{3\cdot 26}+12\sqrt{3\cdot 12}}{2(4-2\sqrt{3})}} =$$

$$= \sqrt{9 + \frac{94-9\sqrt{3}+8\sqrt{78}-24\sqrt{26}-24\sqrt{12}-12\sqrt{26}+ +12\sqrt{78}+72}{2(4-2\sqrt{3})}} =$$

$$= \sqrt{9 + \frac{166-9\sqrt{3}+20\sqrt{78}-36\sqrt{26}-24\sqrt{12}}{2(4-2\sqrt{3})}} =$$

$$= \sqrt{9 + \frac{166-\sqrt{3}(9+24\sqrt{4})-\sqrt{26}(20\sqrt{3}-36)}{4(2-\sqrt{3})}}$$

Ответ: $\sqrt{9 + \frac{166-\sqrt{3}(9+24\sqrt{4})-\sqrt{26}(20\sqrt{3}-36)}{4(2-\sqrt{3})}}$

№4.

Зададим ф-ции:

$f(a) = \sqrt{2(x+2)^2 + 8x + a - 7}$

$f(a) = \sqrt{2x^2 + 8x + 8 + 8x + a - 7}$

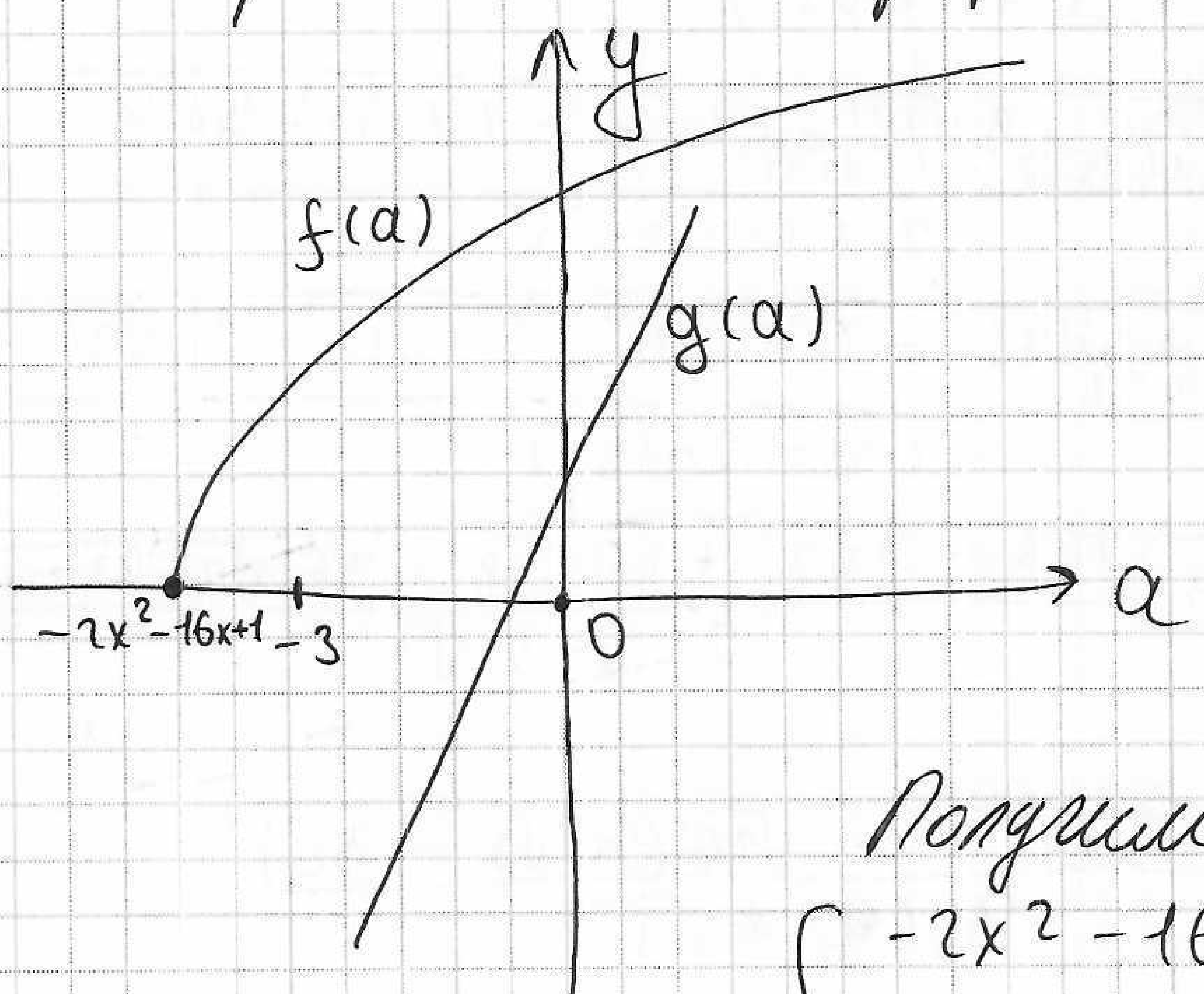
$f(a) = \sqrt{2x^2 + 16x + a - 1}$

$g(a) = (a+1)x^2 + a(2x-1) - 15$

$g(a) = ax^2 + x^2 + 2ax - a - 15$

$g(a) = a(x^2 + 2x - 1) + x^2 - 15$

Построим их графики:



$g(-3) = -3x^2 - 6x + 3 + x^2 - 15 = -2x^2 - 6x - 12$

$D = 36 - 8\cdot 12 < 0$

$\Rightarrow g(-3) < 0$

Получим систему:

$$\begin{cases} -2x^2 - 16x + 1 \le -3 \\ f(-1) > g(-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 16x - 4 \ge 0 \\ \sqrt{2x^2 + 16x - 1 - 1} > -x^2 - 2x + 1 + x^2 - 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x-2 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2+16x-2} > -2x-14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2x-14 \geq 0 \\ 2x^2+16x-2 > 4x^2+56x+196 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x-14 < 0 \\ 2x^2+16x-2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x^2+8x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 7 \\ x \in (-\infty; -11) \cup (-9; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x > 7 \\ x \in (-\infty; -4-\sqrt{68}] \cup [-4+\sqrt{68}; +\infty) \end{cases} \end{array}\right. \\ x \in (-\infty; -4-3\sqrt{2}] \cup [-4+3\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

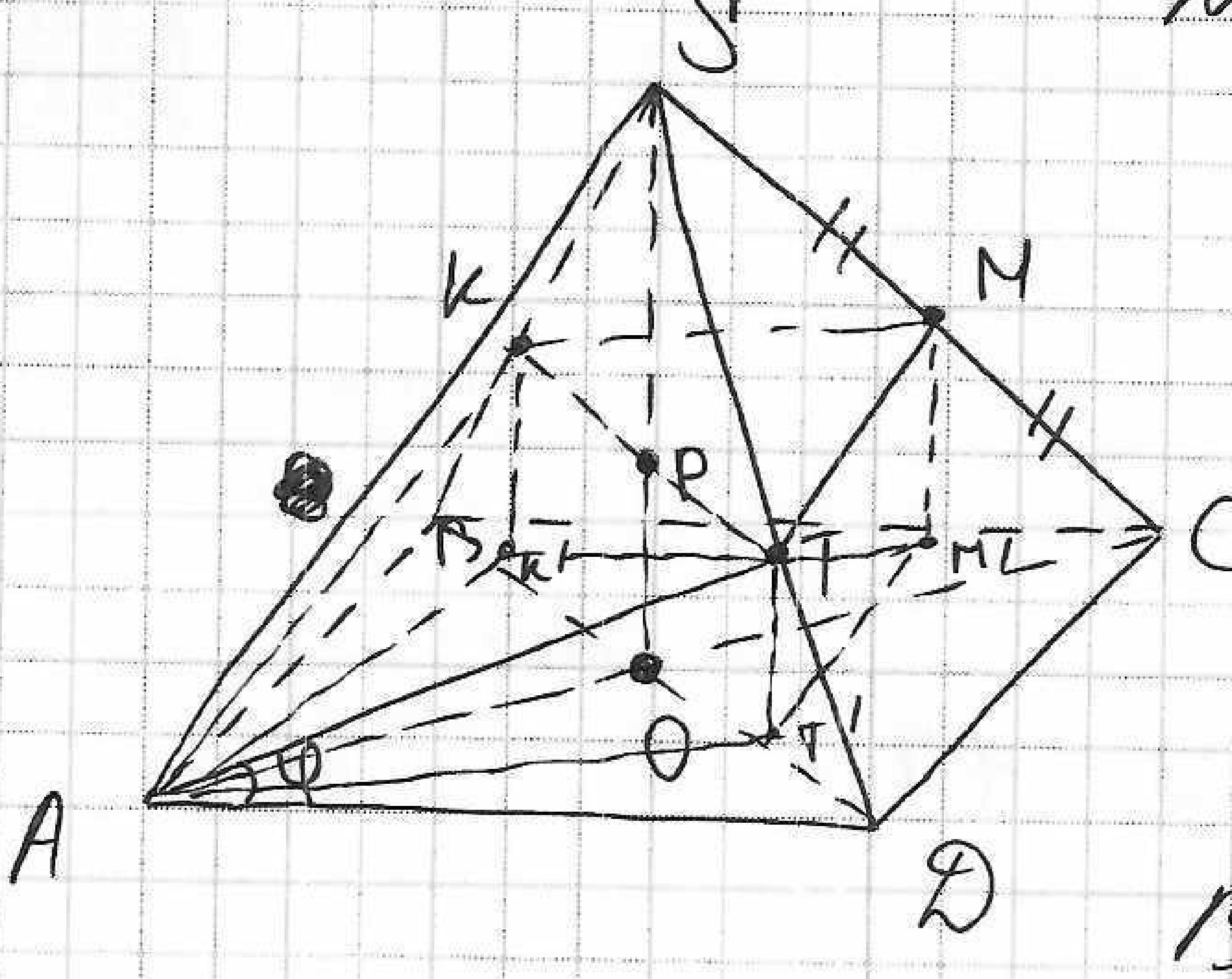
$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -11) \cup (-9; 7] \\ x \in (7; +\infty) \end{array}\right. \\ x \in (-\infty; -4-3\sqrt{2}] \cup [-4+3\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -11) \cup (-9; +\infty) \\ x \in (-\infty; -4-3\sqrt{2}] \cup [-4+3\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -11) \cup [-4+3\sqrt{2}; +\infty) \cup \{-4-3\sqrt{2}\}.$$

Ответ: $(-\infty; -11) \cup [-4+3\sqrt{2}; +\infty) \cup \{-4-3\sqrt{2}\}$.

№5.



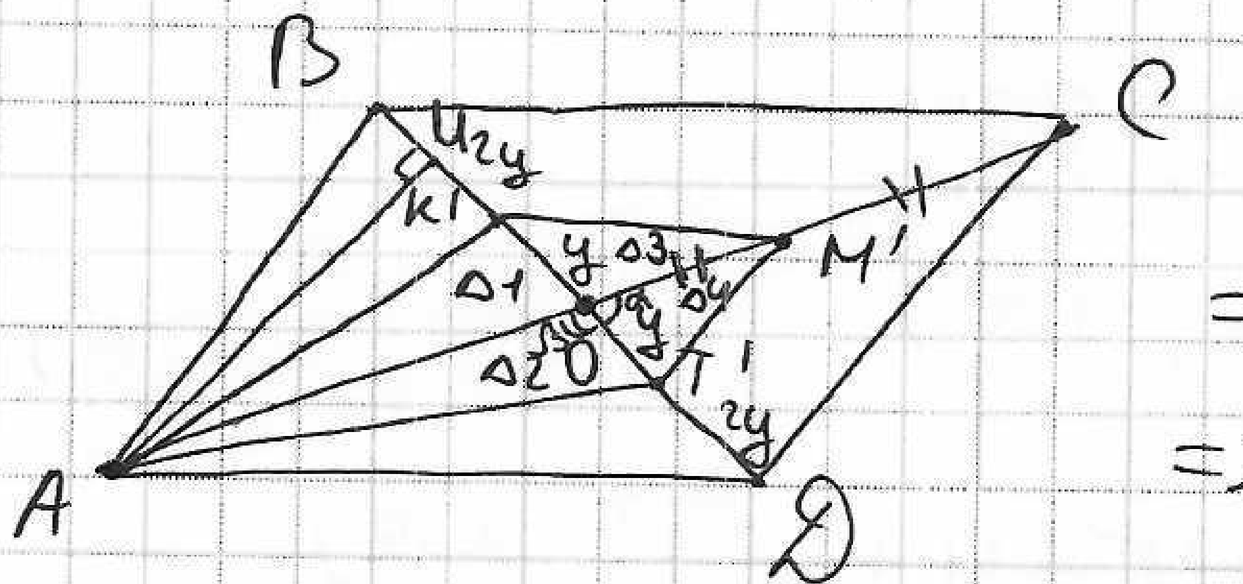
Через т. P проведём прямую, параллельную BD до пересечения с рёбрами BS и DS в точках K и T соотв.

В пл-ти BCS проведём прямую KM, в пл-ти CSD — MT, в пл-ти ASB — AK и в пл-ти ASD — AT.

Получим сечение AKMT, пл-тью, параллельной диагонали BD, и проходящей через т. M, середину SC.

Найдём его площадь через проекцию на (ABCD).

Рассмотрим данную пл-ть:



$SP = 2PO \Rightarrow$

$\Rightarrow SK = 2BK$ и $ST = 2DT \Rightarrow$

$\Rightarrow BK' = 2K'O$ и

$DT' = 2OT'$, причём

$$\frac{OK'}{BK'} = \frac{OT'}{DT'} = \frac{1}{2}$$

Из т. A опустим перпендикуляр AU на BD:

$S_{\Delta 1} = \frac{1}{2} AU \cdot K'O = \frac{1}{2} AU \cdot y$

$S_{\Delta 2} = \frac{1}{2} AU \cdot T'O = \frac{1}{2} \cdot AU \cdot y$

Т.к. диагонали пар-ма т. O делятся пополам (т. их пер.), то

$BO = DO = 3y$

Получили, что $S_{\Delta 1} = S_{\Delta 2}$.

Аналогично, $S_{\Delta 3} = S_{\Delta 4}$.

$S_{\Delta 4} = \frac{1}{2} \cdot OM' \cdot OT' \cdot \sin\alpha$

$S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD \cdot \sin\alpha$

$\frac{OM'}{OC} = \frac{1}{2}$

$\frac{OT'}{OD} = \frac{1}{3}$

$\frac{S_{\Delta 4}}{S_{\Delta COD}} = \frac{OM'}{OC} \cdot \frac{OT'}{OD} = \frac{1}{6}$

$S_{\Delta 4} = \frac{S_{\Delta COD}}{6} = S_{\Delta 3}$

$S_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OT' \cdot \sin\beta$

$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OD \cdot \sin\beta$

$\frac{S_{\Delta 2}}{S_{\Delta AOD}} = \frac{OT'}{OD} = \frac{1}{3}$

$S_{\Delta 2} = \frac{S_{\Delta AOD}}{3} = S_{\Delta 1}$

$S_{сеч} = \frac{S_{пр.}}{\cos\varphi}$

$S_{сеч} = \frac{\frac{13}{2}\sqrt{3}}{\cos\varphi}$

$\varphi = 30^\circ$
(не успела док-ть)

S сечения $= 13$.

$S_{\Delta AOD} = \frac{S_{ABCD}}{4}$
$\parallel$
$S_{\Delta COD}$

$S_{пр.} = 2(S_{\Delta 1} + S_{\Delta 3}) = 2\left(\frac{S_{\Delta AOD}}{3} + \frac{S_{\Delta COD}}{6}\right) = 2\left(\frac{S_{ABCD}}{12} + \frac{S_{ABCD}}{24}\right) = \frac{S_{ABCD}}{6} + \frac{S_{ABCD}}{12} = \frac{S_{ABCD}}{4}$

$S_{ABCD} = AB \cdot \overset{\parallel BC}{AD} \cdot \sin\angle A = \sqrt{13} \cdot 4\sqrt{13} \cdot \sin 60^\circ = 26\sqrt{3}$

$S_{пр.} = \frac{26\sqrt{3}}{4} = \frac{13}{2}\sqrt{3}$

Ответ: 13.