Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 6

№2

$P(t)=t^3-3t-1$

x, y, z - корни

$x^7+y^7+z^7$ - ?

$t^3-3t-1=(t-x)(t-y)(t-z)$

$t^3-3t-1= t^3-(x+y+z)\cdot t^2+(x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z)\times$
$\times t-x\cdot y\cdot z$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=-3 \\ x\cdot y\cdot z=1 \end{cases}$$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2\cdot x\cdot y+2x\cdot z+2\cdot y\cdot z=0$

$x^2+y^2+z^2=6$

$(x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z)^2=(x\cdot y)^2+(x\cdot z)^2+(y\cdot z)^2+$
$+2\cdot x^2\cdot y\cdot z+2\cdot x\cdot y^2\cdot z+2x\cdot y\cdot z^2=9$

$(x\cdot y)^2+(x\cdot z)^2+(y\cdot z)^2=9-2\cdot x\cdot y\cdot z\cdot(x+y+z)$

$(x\cdot y)^2+(x\cdot z)^2+(y\cdot z)^2=9$

$(x^2+y^2+z^2)^2=x^4+y^4+z^4+2\cdot x^2\cdot y^2+2\cdot x^2\cdot z^2+2y^2\times$
$\times z^2=36$

$x^4+y^4+z^4=36-2\cdot(x^2\cdot y^2+x^2\cdot z^2+y^2\cdot z^2)$

$x^4+y^4+z^4=18$

$(x^2+y^2+z^2)\cdot(x+y+z)=x^3+y^3+z^3+x^2\cdot y+y^2\cdot x+x^2\cdot z+$
$+z^2\cdot x+y^2\cdot z+z^2\cdot y=0$

$x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=-3$

$x^2\cdot y+x^2\cdot z+x\cdot y\cdot z=-3\cdot x$

$x^2\cdot y+x^2\cdot z=-3\cdot x-1$

$y^2\cdot x+y^2\cdot z=-3\cdot y-1$

$z^2\cdot x+z^2\cdot y=-3\cdot z-1$

$x^3+y^3+z^3=3x+3y+3z+3$

$x^3+y^3+z^3=3$

$(x^4+y^4+z^4)\cdot(x^3+y^3+z^3)=18\cdot 3=54$

$(x^4+y^4+z^4)\cdot(x^3+y^3+z^3)=x^7+y^7+z^7+x^4\cdot y^3+y^4\cdot x^3+x^4\cdot z^3+$
$+z^4\cdot x^3+y^4\cdot z^3+z^4\cdot y^3$

$(x\cdot y)^2+(x\cdot z)^2+(y\cdot z)^2=9$

$(x^2\cdot y^2+x^2\cdot z^2+y^2\cdot z^2)\cdot(x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z)=-27=x^3\cdot y^3+$
$+x^3\cdot z^3+y^3\cdot z^3+x^3\cdot y^2\cdot z+x^3\cdot z^2\cdot y+y^3\cdot x^2\cdot z+y^3\cdot z^2\cdot x+$
$+z^3\cdot x^2\cdot y+z^3\cdot y^2\cdot x$

$x^3\cdot y^3+x^3\cdot z^3+y^3\cdot z^3+x^2\cdot y+x^2\cdot z+y^2\cdot x+y^2\cdot z+z^2\cdot x+$
$+z^2\cdot y=-27$

$x^3\cdot y^3+x^3\cdot z^3+y^3\cdot z^3=-27+3\cdot(x+y+z)+3$

$x^3\cdot y^3+x^3\cdot z^3+y^3\cdot z^3=-24$

$x^4\cdot y^3+x^4\cdot z^3=-24\cdot x-y^3\cdot z^3\cdot x$

$x^4\cdot y^3+x^4\cdot z^3=-24\cdot x-y^2\cdot z^2$

$y^4\cdot z^3+y^4\cdot x^3=-24\cdot y-x^2\cdot z^2$

$z^4\cdot x^3+z^4\cdot y^3=-24\cdot z-x^2\cdot y^2$

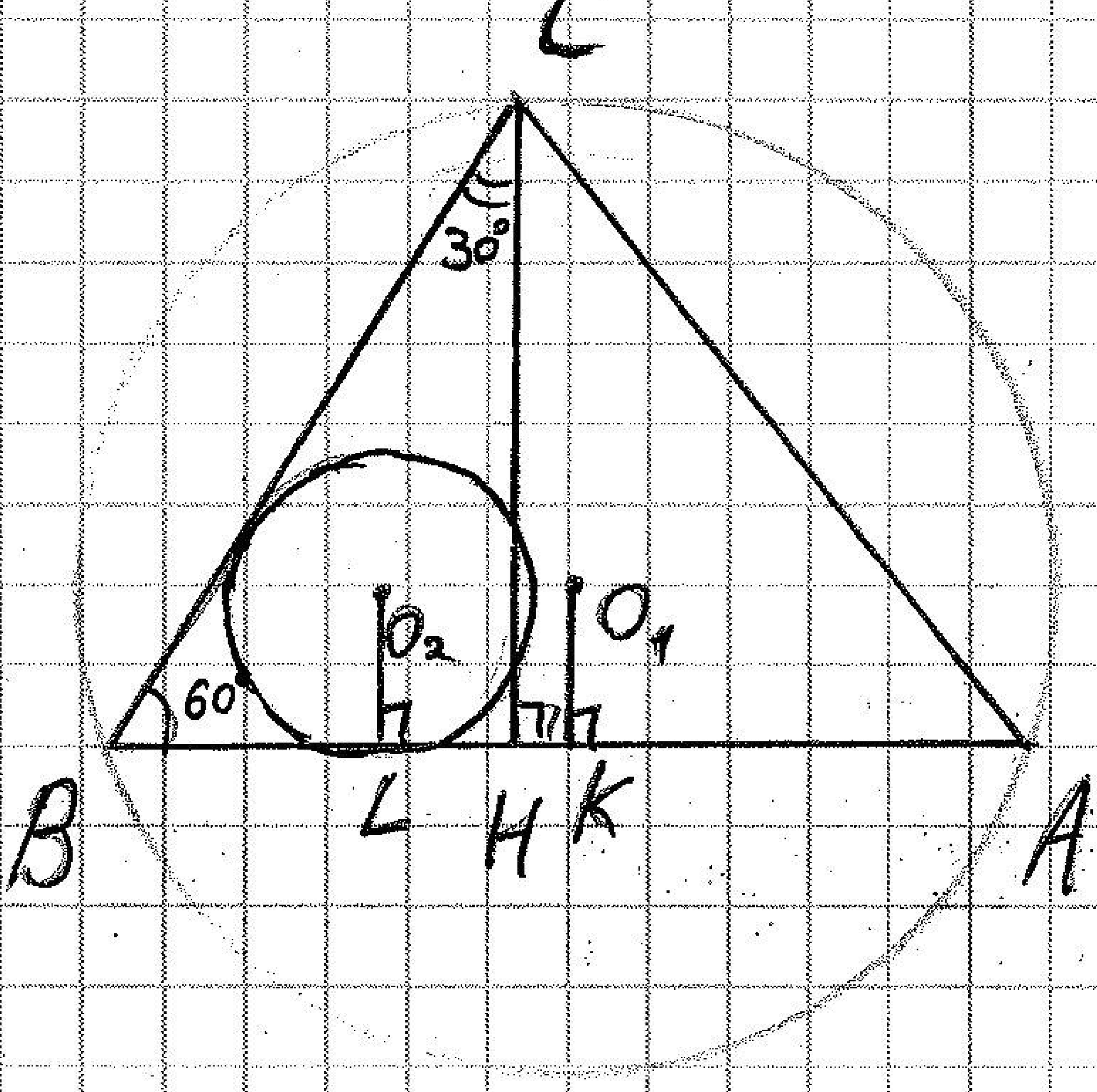
Лист 2 из 6

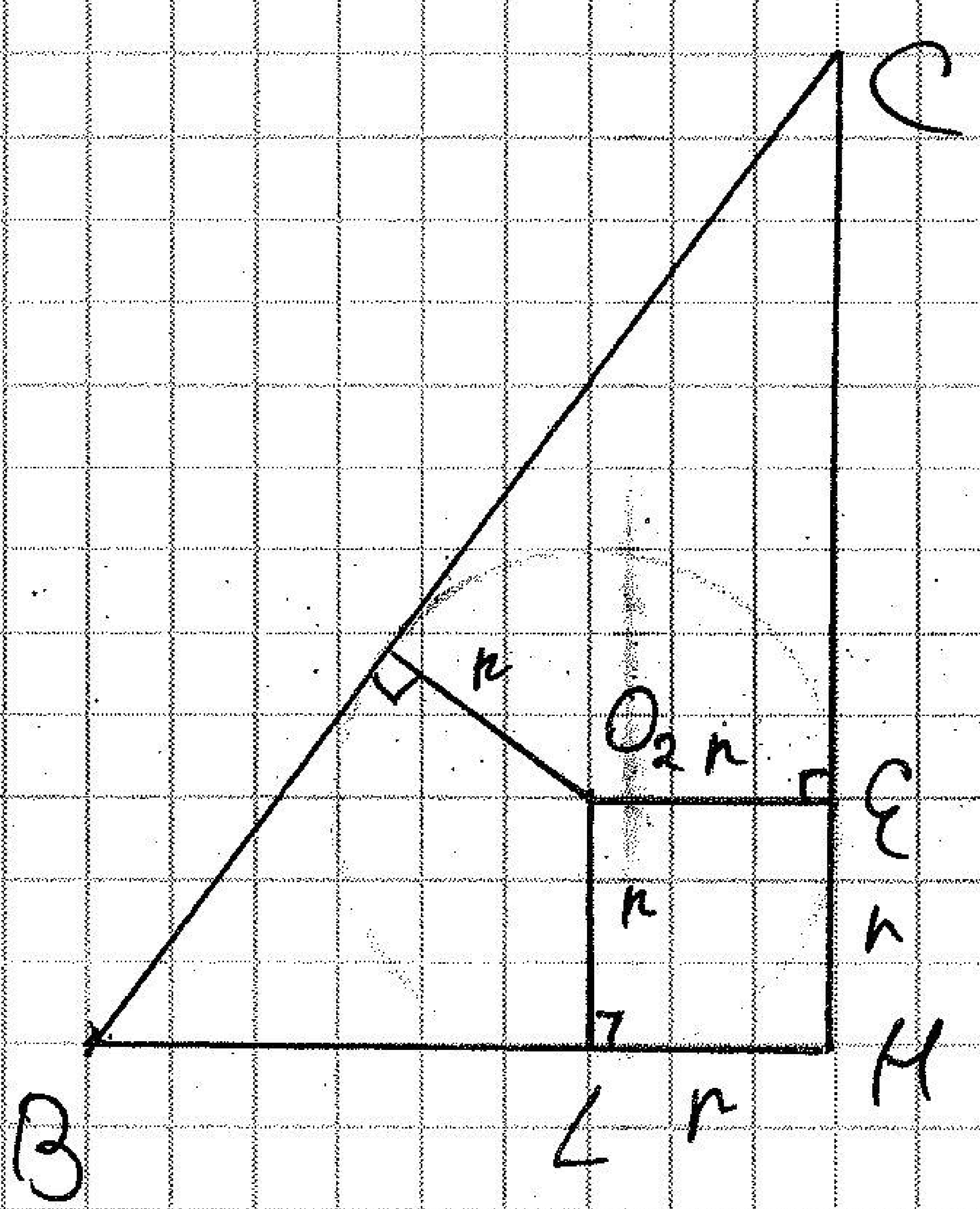
$$x^7+y^7+z^7 = 54 + 24\cdot(x+y+z) + y^2\cdot x^2 + y^2\cdot z^2 + x^2\cdot z^2$$

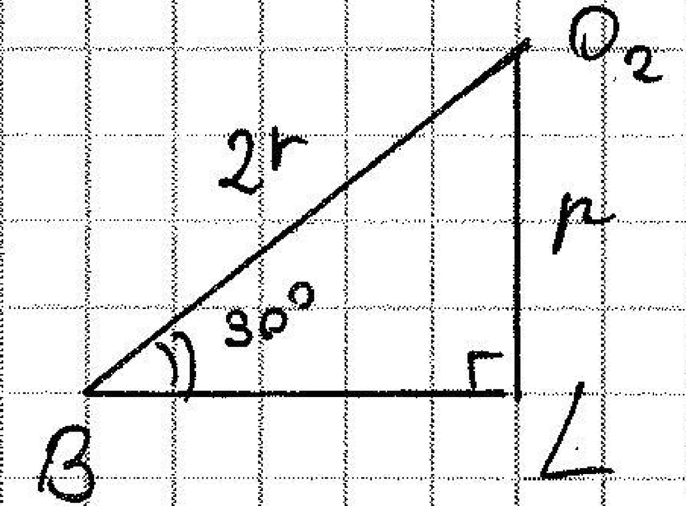
$$x^7+y^7+z^7 = 54+9 = 63$$

Ответ: $x^7+y^7+z^7=63$

№3







Легко понять, что $O_2L = EH = LH = r$ (т.к $\angle BHC = 90°$)

$\Rightarrow \left[BL = \sqrt{3}\cdot r\right]$ - по т. Пифагора

$$tg\,30° = \frac{BH}{CH} = \frac{(1+\sqrt{3})\cdot r}{r+CE} \Rightarrow CE = \frac{(1+\sqrt{3})\cdot r}{\frac{1}{\sqrt{3}}} - r =$$

$$= \left[(\sqrt{3}+2)\cdot r = CE\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BH = (1+\sqrt{3})\cdot r \\ CH = (\sqrt{3}+3)\cdot r \end{cases} \Rightarrow \left[BC = 2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot r\right]$$

по т. Пифагора

$$\left[\begin{array}{l} BC = 2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-1) = 2\cdot 2 = 4 \\ BH = 2 \\ CH = 2\cdot\sqrt{3} \end{array}\right]$$

по т. синусов: $\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R \Rightarrow \sin\angle A = \frac{BC}{2}\cdot R = \frac{2}{\sqrt{39}}\cdot 3 =$

$= \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{12}{13}}$; $\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow AC = \frac{2\cdot\sqrt{39}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{13}$;

$\Rightarrow \cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\frac{12}{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = AC\cdot\cos\angle A = \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\sqrt{13} = 1$

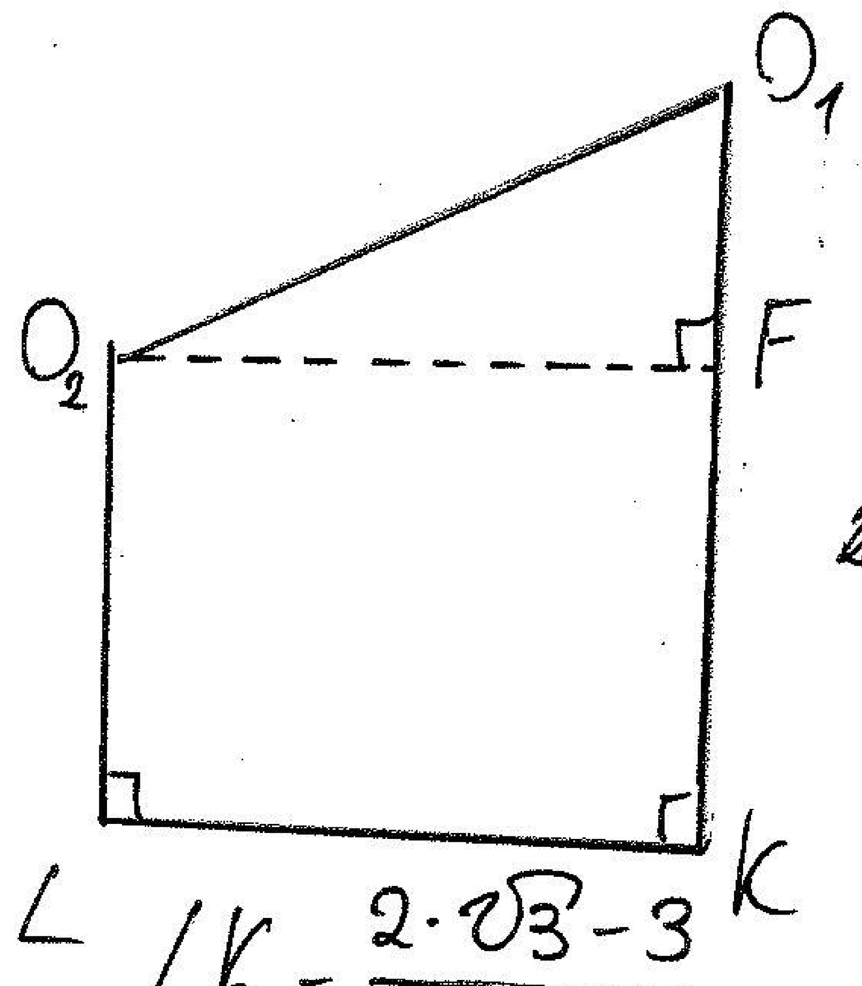
$AB = 1+2 = 3$, т.к K - середина AB (очев.), то

$KA = \frac{3}{2} \Rightarrow$ по. т. Пифагора: $KO_1^2 = R^2 - KA^2 = \frac{39}{9} - \frac{9}{4} = \frac{13}{3} - \frac{9}{4} =$

$= \frac{52-27}{12} = \frac{25}{12} \Rightarrow \left[KO_1 = \frac{5}{2\sqrt{3}}\right]$

легко понять, что $\left[LK = BK - BL = \frac{3}{2} - \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) =\right.$

$\left.= \frac{3}{2} - 3 + \sqrt{3} = \frac{2\cdot\sqrt{3}-3}{2}\right]$



$LO_2 = \sqrt{3}-1$

$LK = \frac{2\cdot\sqrt{3}-3}{2}$

$FO_1 = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{6}$

$FO_1 = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{6} - \sqrt{3} + 1 = \frac{-\sqrt{3}+6}{6}$

по т. Пифагора:

$O_1O_2^2 = O_2F^2 + O_1F^2 = \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{6-\sqrt{3}}{6}\right)^2 =$

$= \frac{12+9-12\cdot\sqrt{3}}{4} + \frac{36+3-12\sqrt{3}}{36} =$

$= \frac{21-12\sqrt{3}}{4} + \frac{13-4\sqrt{3}}{12} = \frac{63+13-36\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{12} =$

$= \frac{76-40\sqrt{3}}{12} = \frac{19-10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{\frac{19-10\sqrt{3}}{3}}$

Ответ: $O_1O_2 = \sqrt{\frac{19-10\sqrt{3}}{3}}$

№1

С, О, Б, А, К, И

Найдем кол-во всевозможных слов

$n_0 = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$

Найдем кол-во слов, в которых 3 согл. стоят ~~пр.~~ подряд, для этого 3 согл подряд будем считать за 1 длинную букву.

Тогда $n_1 = 4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3! = 144$

Умножаем на 3! т.к. в ряду из 3-х согл. буквы можно переставлять местами

Для 3-х гласн. подряд размышления аналогичные

$n_2 = 4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3! = 144$

$n_0 - n_1 - n_2 = 720 - 144 - 144 = 432$

Ответ: 432

№4

$\sqrt{2x^2+8x+a} > ax^2 + (1-a)(2x-1) - 15 \quad a \in [-2; 0]$

1) $a = 0$

$\sqrt{2x^2+8x} > 2x - 16$

ОДЗ: $2\cdot x^2 + 8x \geq 0$

$x(x+4) \geq 0$

$x \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$

$2x - 16 < 0$

$x < 8$

I $\quad x \in (-\infty; -4] \cup [0; 8)$

II $2\cdot x^2+8x>(2x-16)^2$

$2x^2+8x>4x^2-64x+256$

$2x^2-72x+256<0$

$x^2-36x+128<0$

$(x-32)(x-4)<0$

$x\in(4;32)$

$x\in(-\infty;-4]\cup[0;32)$

2) $a<0$

Значения x ограничены лишь ОДЗ, т.к. правая часть уменьшается быстрее с уменьшением a

$\sqrt{2x^2+8x+a}>a\cdot(x-1)^2+2x-16$

$2x^2+8x+a\geq 0$

$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-8\cdot a}}{4}=-2\pm\sqrt{4-\frac{a}{2}}$ ~~при а~~

при $a=-2$

$\left[\begin{array}{l} x\leq-2-\sqrt{5} \\ x\geq-2+\sqrt{5} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x\in(-\infty;-4]\cup[0;32) \\ \left[\begin{array}{l} x\leq-2-\sqrt{5} \\ x>-2+\sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases}$

$x\in(-\infty;-2-\sqrt{5}]\cup[-2+\sqrt{5};32)$

Ответ: $x\in(-\infty;-2-\sqrt{5}]\cup[-2+\sqrt{5};32)$

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания ____________________ Лист работы ____ из ____

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания ____________________ Лист работы _____ из _____