Вариант задания 2

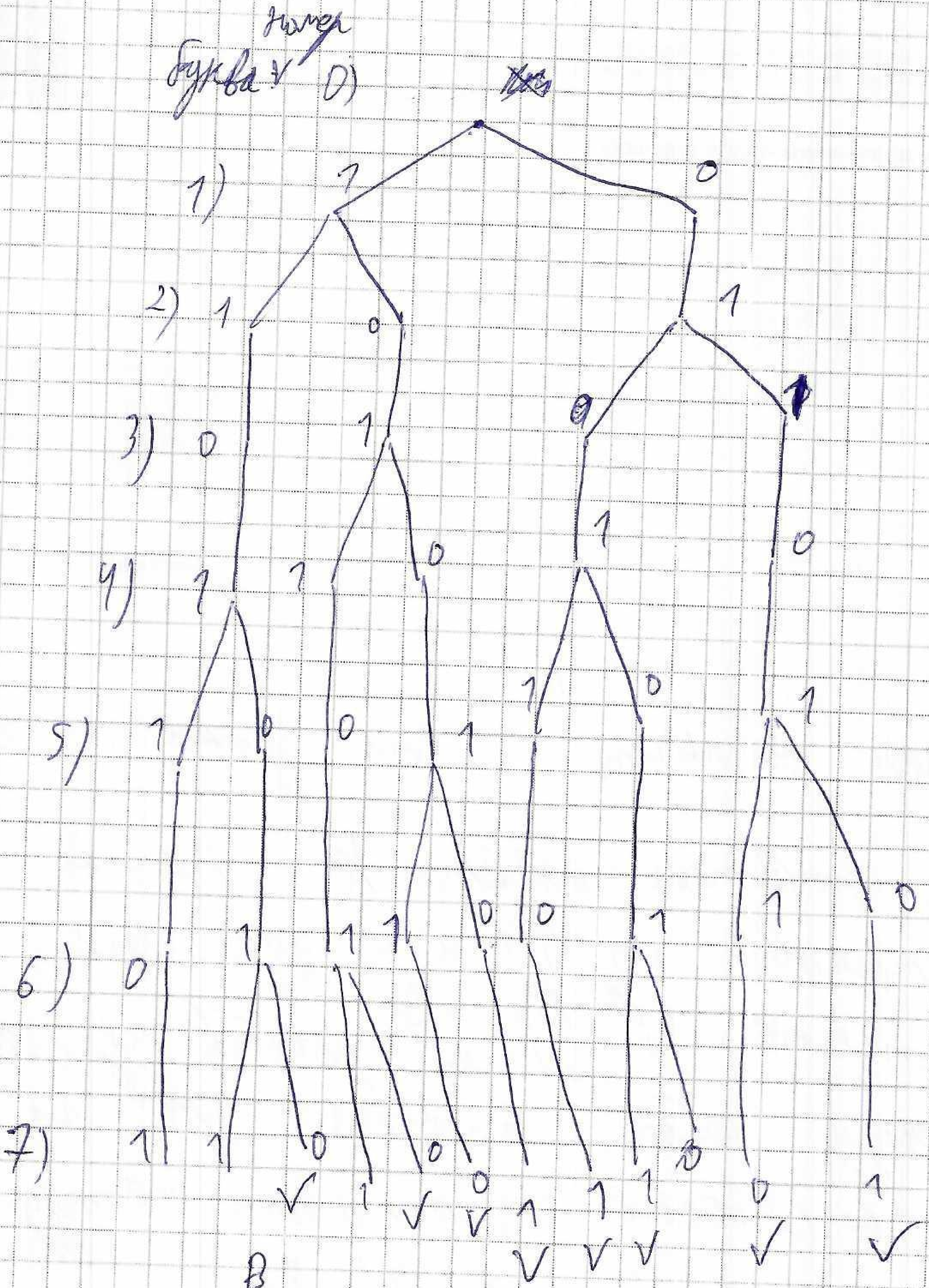
1.

Будем обозначать 1 согл. буквы, 0 — гласные, тогда ответом будет K — кол-во перестановок из $4^{ёх}$ 1 и $3^{ёх}$ 0 удовл. усл. Умноженное на кол-во способов переставить между собой согласные умн. на кол-во способов переставить между собой гл., т.е. : $K \cdot 4! \cdot 3!$

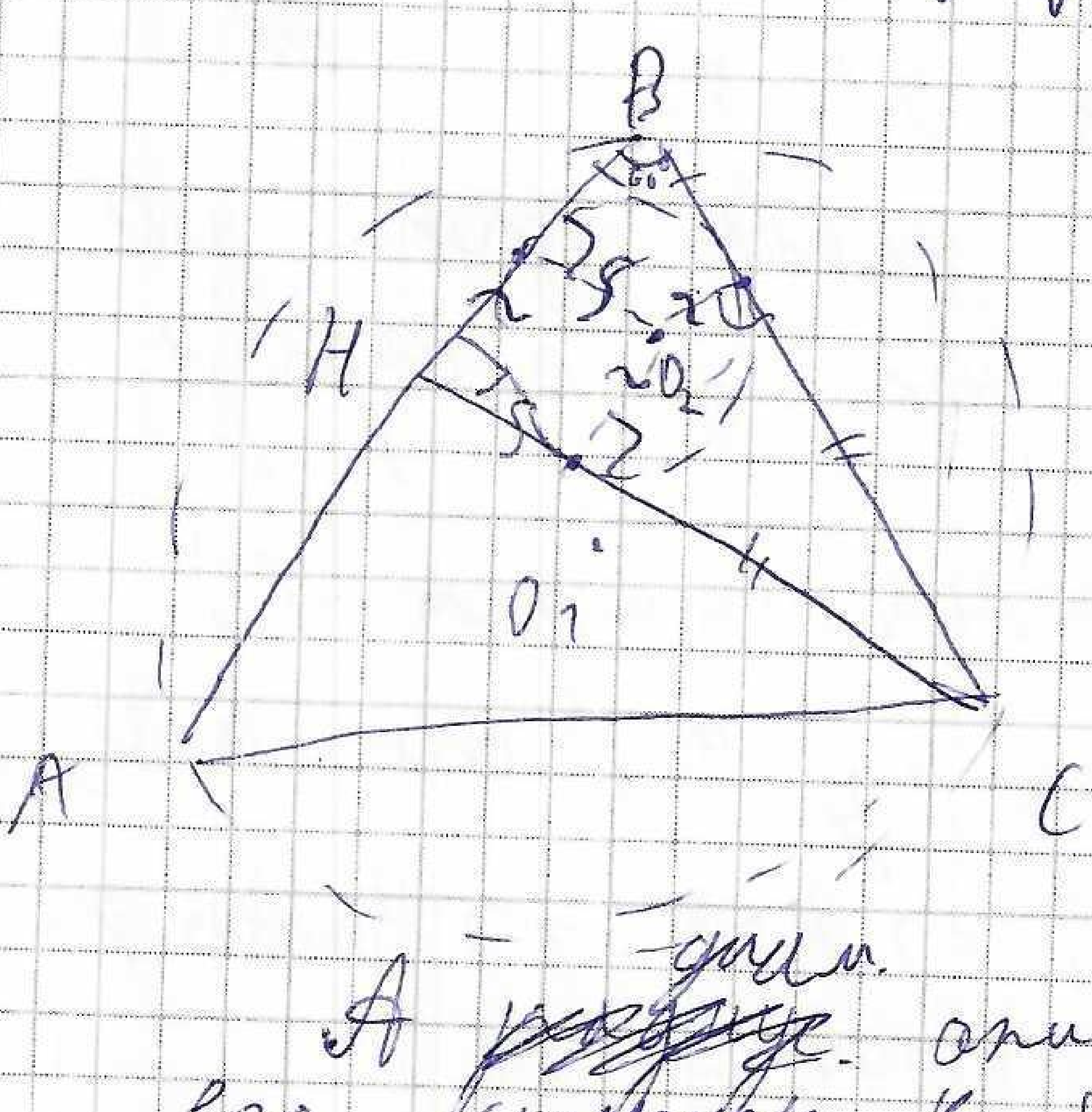
Построим с помощью дерева строки удовл. усл. нет $3^{ёх}$ 1 подряд и нет $2^{ух}$ 0 подряд.

(см. след. стр.) теперь отметим (✓) тех, которые состоят из $4^{ёх}$ согл. и $3^{ёх}$ гл.

Итого подошли 8 комб $\Rightarrow K=8 \Rightarrow$ Ответ: $K \cdot 4! \cdot 3! = 8 \cdot 24 \cdot 6 = 24^2 \cdot 2 = 8 \cdot 144 = 1152$.



3.



Заметим, что радиус вписанной окр прямоуг. Δ есть ~~катет~~ $\frac{(\text{сумма катетов} - \text{гипот.})}{2}$

А ~~радиус~~ диам. опис. окр. есть отношение его стороны к синусу противолеж. угла.

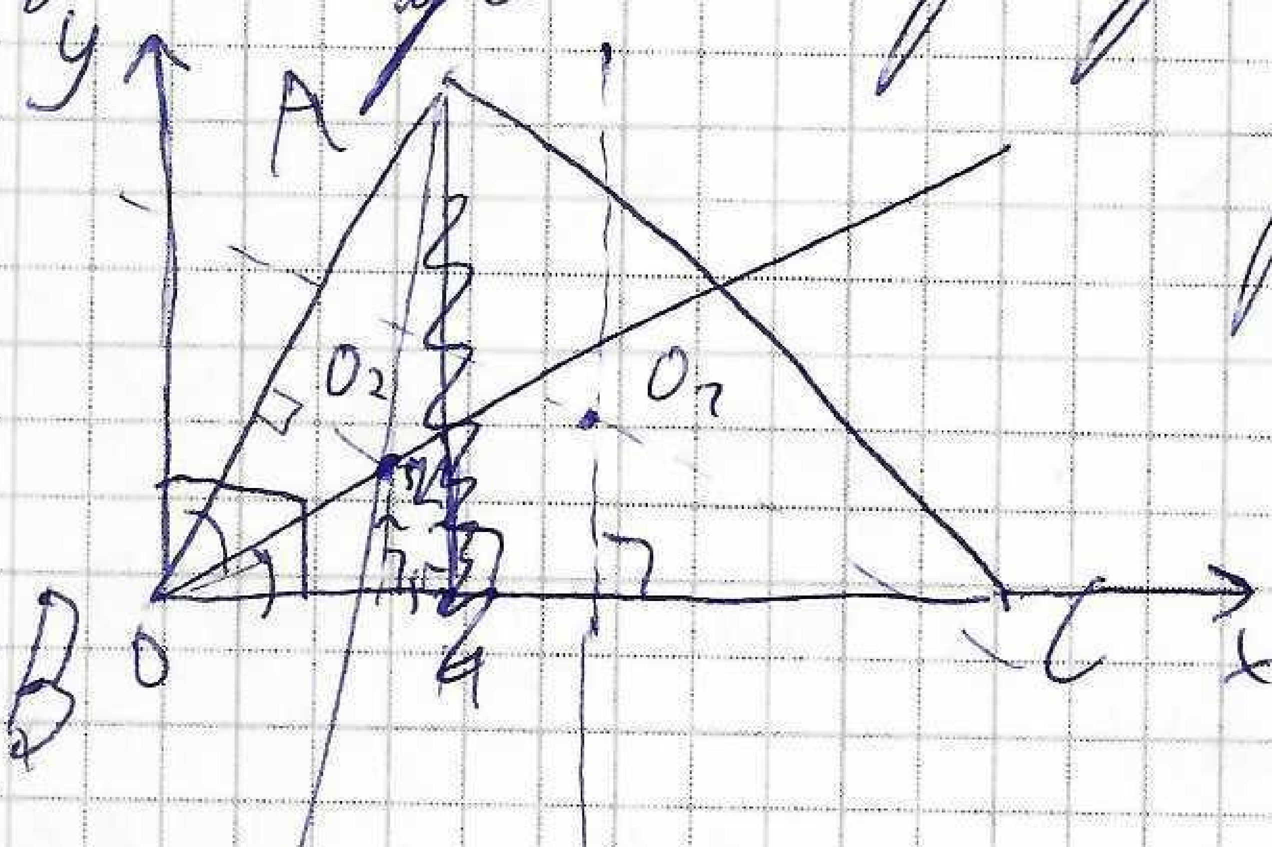
$\Rightarrow$ $2r = BH + CH - BC = BC \cdot \cos 60^\circ + BC \cdot \sin 60^\circ - BC =$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) BC = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} BC$

$BC = \frac{4 \cdot (3 - \sqrt{3})}{(\sqrt{3} - 1)} = 4\sqrt{3}.$

$\Rightarrow$ $2R = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$ $\Rightarrow$ $AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{13} = \sqrt{39}$

центр. ~~впи~~ опис. окр. ~~~~ ~~на~~ является точкой перес. срединных перп. к сторонам треуг., а центр. впис. явл. точкой перес. биссектрис. треуг., тогда ~~введем~~



рассм. от O_2 до $BC = r$.

$\angle O_2BC = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

рассм. от O_1 до $B = R$

введём коорд. xy. $\Rightarrow$ $O_1O_2 = \sqrt{(O_{1x} - O_{2x})^2 + (O_{1y} - O_{2y})^2}$

$BO_1 = O_1C = R$ $\Rightarrow$ высота h из O_1 на BC в р/б:

$O_{1y} = h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$; $O_{1x} = \frac{BC}{2}$.

$O_1y = \sqrt{13-12} = 1$ $\qquad O_2y = r = 3-\sqrt{3}$

$O_1x = 2\sqrt{3}$ $\qquad O_2x = \frac{r}{tg\, 30^\circ} = \frac{r\cdot \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} =$

$= \frac{r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}r = 3\sqrt{3}-3$

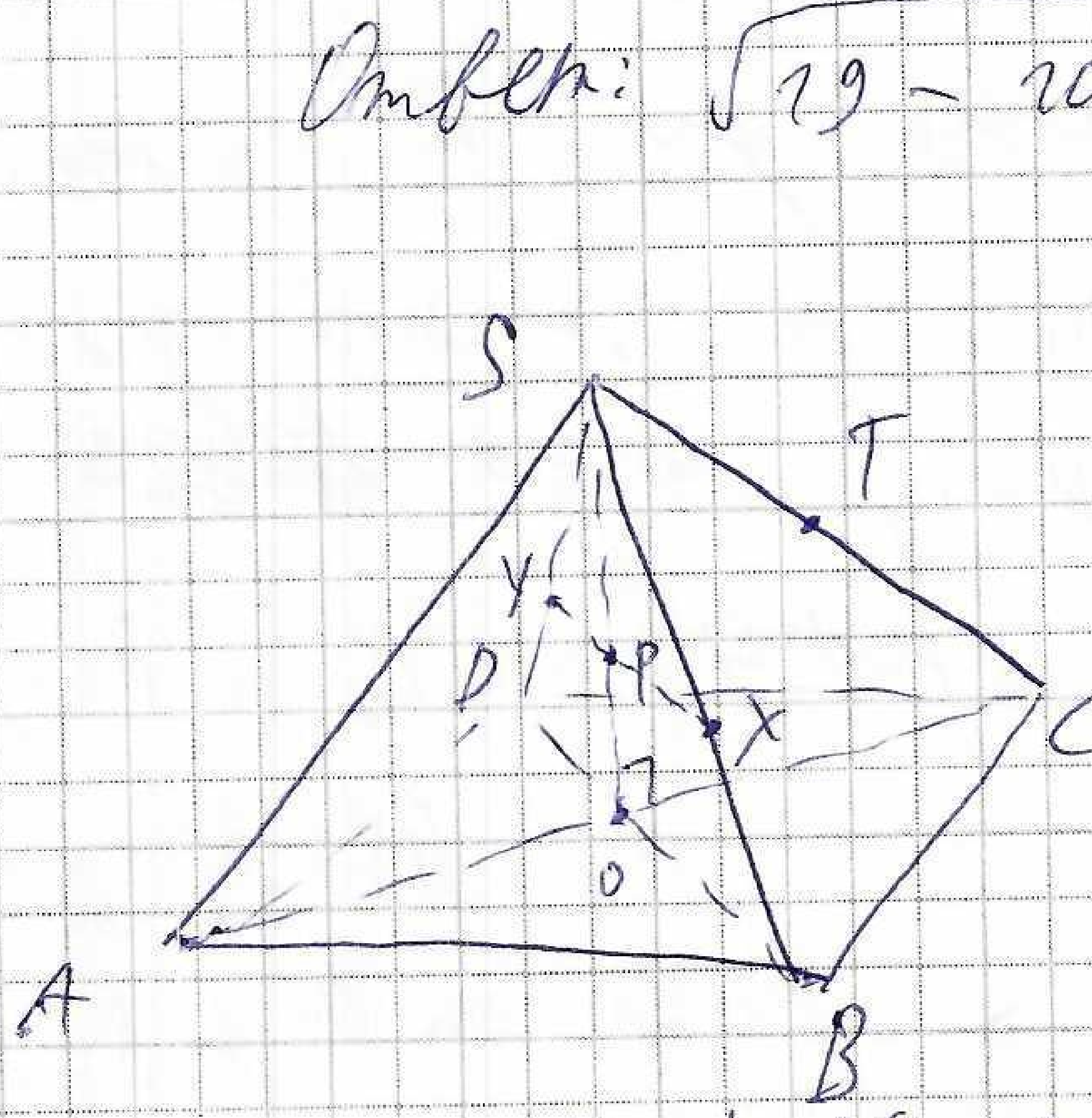
$\Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{\left(2\sqrt{3}-(3\sqrt{3}-3)\right)^2+\left(1-(3-\sqrt{3})\right)^2} =$

$= \sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{9+3-2\cdot 3\sqrt{3}+}$

$\overline{+3+4-2\cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{19-2\cdot 5\sqrt{3}} = \sqrt{19-10\sqrt{3}}$

Ответ: $\sqrt{19-10\sqrt{3}}$.

5.



Дано: $AB = \sqrt{13}$; $BC = 4\sqrt{13}$;

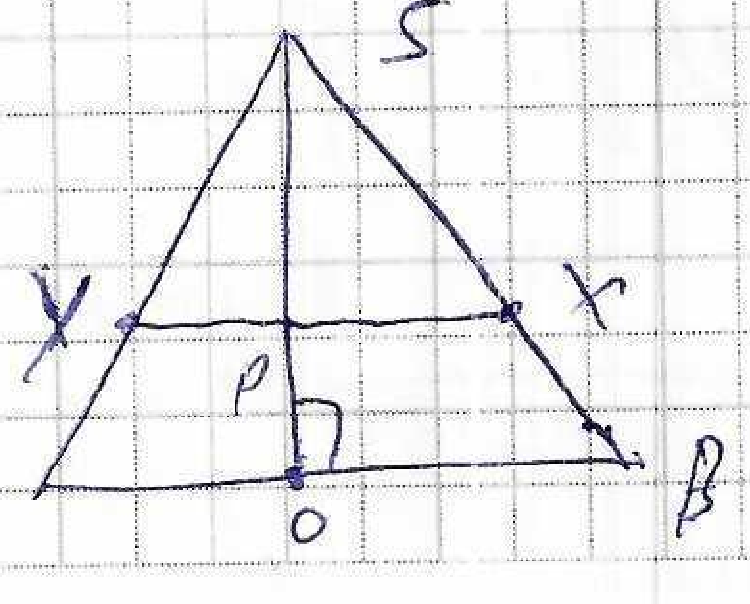
$\angle DAB = 60^\circ$; $\rho(S;\text{плоск.}) = 2\sqrt{3}$

Пусть T — сер. SC.

т.к. пл. SBO ∥ BD пр.

из т. P (пр. XY)

$\Rightarrow$ прям. ∥ BD и с сек. пл. лежит в пл. SBD $\Rightarrow$



BO = OD т.к. O — т. перес. диаг. паралл. ABCD.

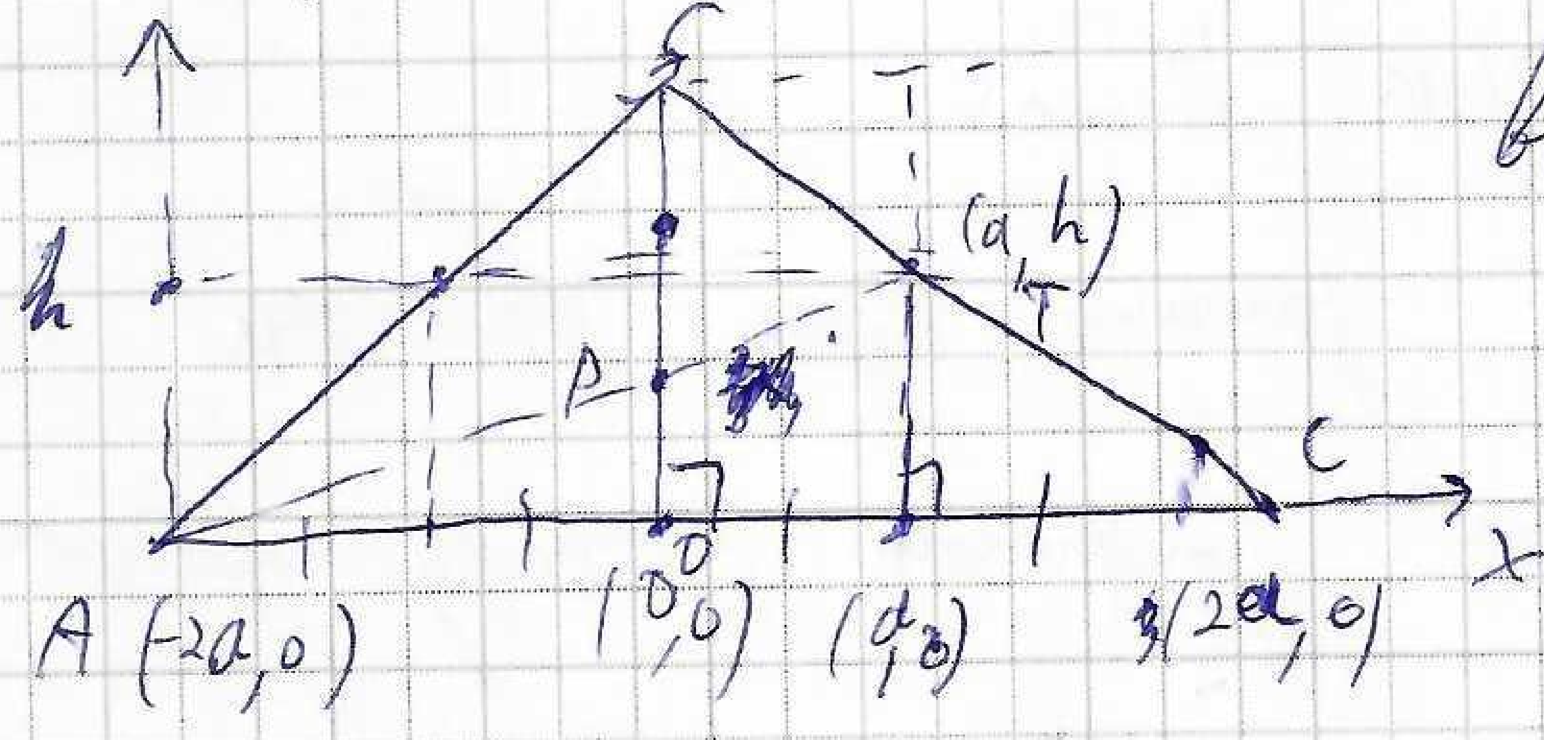
из подобия SPX, SYP, SDO, SOB

$\frac{SP}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow XP = PY = \frac{2}{3}OB$. D

=> $\frac{SX}{SB} = \frac{SY}{SD} = \frac{2}{3}$.

=> прям. TP паралл. иск. пл.

$TP \subset SAC$ =>



введём систему коорд.

$\rho(T; AC) = h$;

$\rho(C; O) = 2a$.

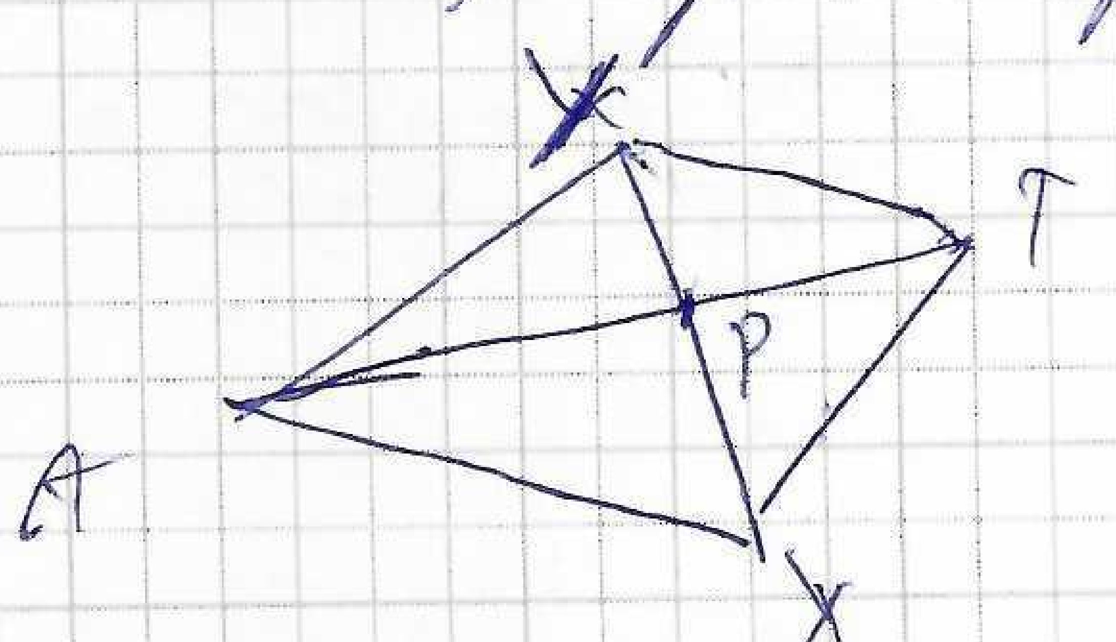
=> из подобия и симметрии (AO = OC) => SO – мед. и выс. т.к. ABCD паралл.

=> запишем ур. прямой PT:

$$\begin{cases} h = k\cdot a + b \\ \frac{2}{3}h = k\cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow b = \frac{2}{3}h;\ k = \frac{\frac{1}{3}h}{a}$$

=> $k\cdot(-2a) + b = \frac{h}{3a}\cdot(-2a) + \frac{2}{3}h = 0$

=> прям. пройдёт через т. A.



6.

$49x^2 + 40(y-3)^2 = 1960$

$\frac{x^2}{40} + \frac{(y-3)^2}{49} = 1$; $a = 7$; $b = \sqrt{40}$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$

$V_{min} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \Rightarrow V_{min}$ при $\left(\frac{1}{r}\right)_{min} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{min}$ при r_{max}

r_{max} и r_{min} достиг. ~~при~~ когда ~~~~ осколки находятся на прямой между двумя фокусами.

т.к. данный эллипс шире по y.

$\Rightarrow$ фокусы совп. прям. проход. через начало коорд. паралл. Oy $\Rightarrow$ в ~~нача~~ искомых полож. $x = 0$

$\Rightarrow \frac{0^2}{40} + \frac{(y-3)^2}{49} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 10 \\ y = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow r_{max} = \sqrt{(0-0)^2 + (10-0)^2} = 10.$

$\Rightarrow V_{min} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{10} - \frac{1}{7}\right)} = \sqrt{\mu \frac{2}{35}} =$

$= \sqrt{3,9 \cdot 10^5 \cdot \frac{2}{35 \cdot 10^3}} = \sqrt{\frac{390 \cdot 2}{35}} =$

$= \sqrt{\frac{78 \cdot 2}{7}} \left(\frac{км}{с}\right)$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

Лист работы 4 из 4

Точку, где ск. осколков мусора макс. мы уже опр. (0; −4) (из-за $V_{max} \Leftrightarrow r_{min}$).

$$25x^2 + 16(y-3)^2 = 400$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$ усл. для V выполн.

$\Rightarrow a = 5$

$\Rightarrow V'_{min} \Leftrightarrow r_{max}$

аналогично:

$x = 0 \Rightarrow \frac{0^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

$y - 3 = \pm 5$

$\underbrace{y = 8}_{r_{max}}$ $\quad$ $y = -2$

$r_{max} = \sqrt{(8-0)^2 + (\cancel{10}-0)^2} = 8$

$\Rightarrow V'_{min} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{8} - \frac{1}{5}\right)} =$

$= \sqrt{\mu \frac{1}{20}} = \sqrt{3{,}9 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{20 \cdot 10^3}} = \sqrt{\frac{39}{2}} = \sqrt{19{,}5}$ $\frac{км}{с}$.

$\Rightarrow$ траектории принадл. точки (0; −4) и (0; 8)

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{0^2}{25} + \frac{(-4-y_0)^2}{z^2} = 1 \\ \frac{0^2}{25^2} + \frac{(8-y_0)^2}{z^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-4-y_0)^2 = z^2 \\ (8-y_0)^2 = z^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad (-4-y_0)^2-(8-y_0)^2=0$

$(-4-y_0-8+y_0)(-4-y_0+8-y_0)=0$

$-12(4-2y_0)=0$

$4-2y_0=0$

$\underline{y_0=2.}$

$\Rightarrow \quad z^2=(-4-2)^2=36$

$\underline{z=\pm 6}$

$\Rightarrow$ ур. искомой орб.:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1.$$

2.

$P(t)=t^3-4t+2$

По т-ме Виета:

$x+y+z=0$

$xy+yz+zx=-4$

$xyz=-2$