Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 1 Лист работы 1 из 2

№1

Всего перестановок шести букв может быть $6! = 720$. Посчитаем количество перестановок, где есть 3 гласных подряд и 3 согласных подряд. Если взять такую перестановку и на месте каждой согласной написать С, а на месте каждой гласной — Г, то получится одна из этих 6 строк: СССГГГ, ССГГГС, СГГГСС, ГГГССС, ГГСССГ, ГСССГГ. Для каждой из этих строк есть по 6 вариантов того, в каком порядке идут согласные в перестановке (СБК, СКБ, БСК, БКС, КСБ, КБС) и 6 вариантов того, в каком порядке идут гласные в перестановке (ОАИ, ОИА, АОИ, АИО, ИОА, ИАО). Заметим, что, выбрав, на каких местах стоят согласные, а на каких — гласные, а также порядок гласных и согласных, мы полностью задали одну перестановку. Таким образом, кол-во перестановок, где есть 3 гласных подряд или 3 согласных подряд, равно $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, а кол-во остальных перестановок, т.е. искомое число, равно $720 - 216 = 504$. Ответ: 504.

№2

$P(t)=t^3-3t-1=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+xz)t-xyz \Rightarrow \begin{cases} xyz=1 \\ x+y+z=0 \\ xy+xz+yz=-3 \end{cases}$

~~Пусть $n \geq 3$ тогда~~ Пусть $n \in \mathbb{Z}$, тогда:

$(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n=(x+y+z)^{n-1}(x+y+z)-x^n-y^n-z^n=$
$=((x+y+z)^{n-1}-x^{n-1}-y^{n-1}-z^{n-1})(x+y+z)+(x^n+x^{n-1}y+x^{n-1}z+y^{n-1}x+y^n+y^{n-1}z+z^{n-1}x+z^{n-1}y+z^n-x^n-y^n-z^n)=$
$=((x+y+z)^{n-1}-(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}))(x+y+z)+x^{n-1}y+x^{n-1}z+y^{n-1}x+y^{n-1}z+z^{n-1}x+z^{n-1}y \Rightarrow -(x^n+y^n+z^n)=0^n-x^n-y^n-z^n=$
$=(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n=0+x^{n-1}y+x^{n-1}z+y^{n-1}x+y^{n-1}z+z^{n-1}x+z^{n-1}y=x^{n-1}y+x^{n-1}z+y^{n-1}x+y^{n-1}z+z^{n-1}x+z^{n-1}y=(xy+xz+yz)\cdot$
$\cdot(x^{n-2}+y^{n-2}+z^{n-2})-x^{n-2}yz-xy^{n-2}z-xyz^{n-2}=(-3)(x^{n-2}+y^{n-2}+z^{n-2})-xyz(x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3})=-(x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3})-3\cdot$
$\cdot(x^{n-2}+y^{n-2}+z^{n-2})$

Пусть $a_n=x^n+y^n+z^n$ для $n \in \mathbb{Z}$, тогда $a_n=3a_{n-2}+a_{n-3}$

$a_0=1+1+1=3$

$a_1=x+y+z=0$

$a_2=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=0-2\cdot(-3)=6$

$a_3=3a_1+a_0=3$

$a_4=3a_2+a_1=18$

$a_5=3a_3+a_2=15$

$a_7=3a_5+a_4=63 \Rightarrow x^7+y^7+z^7=63$

Ответ: 63.

№6

При заданных r и a, если $V=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$, то $V_{макс}=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_{мин}}-\frac{1}{a}\right)}$, т. е. максимальная скорость достигается при минимальном расстоянии до начала координат, т.е. ~~при минимальном $\sqrt{x^2+y^2}$~~, ~~т.е. минимальном x^2+y^2.~~ Мы знаем, что $81x^2+65(y-4)^2=5265$, ~~т.е. $81(x^2+y^2)-16y^2-520y = const$ =>~~ минимальное x^2+y^2 достигается при мак~~симальном $(-16y^2-520y)$, т.е. при минимальном $y^2+\frac{65}{2}y = (y+\frac{65}{4})^2-\frac{65^2}{16}$, т.е. при минимальном $|y+\frac{65}{4}|$~~, в перицентре => ~~координата~~ x при этом равен $0 \Rightarrow 65(y-4)^2=5265=81\cdot 65 \Rightarrow (y-4)^2=81 \Rightarrow y-4=\pm 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=13 \\ y=-5 \end{array}\right.$. Значит, точки $(0;13)$ и $(0;-5)$ — это апоцентр и перицентр (не наоборот, т.к. $(0;-5)$ ближе к началу координат, чем $(0;13)$). Тогда $r_{мин}=\sqrt{0^2+(-5)^2}=5 \Rightarrow V_{макс} =$

$$=\sqrt{3{,}9\cdot 10^5\,\frac{км^3}{с^2}\cdot\left(\frac{2}{5\cdot 10^3\,км}-\frac{1}{\sqrt{81}\cdot 10^3\,км}\right)}=13\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{км}{с}$$

Теперь найдём z и y_0. Скорость обломков максимальна ~~в перицентре~~ перицентре с координатами $(0;-5)$, а скорость станции минимальна, в апоцентре, найдём его. $x=0 \Rightarrow 20(y-4)^2=720 \Rightarrow (y-4)^2=36 \Rightarrow y-4=\pm 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=10 \\ y=-2 \end{array}\right.$, $(0;10)$ дальше от начала координат, чем $(0;-2)$.

Значит, его координаты $(0;10)$.

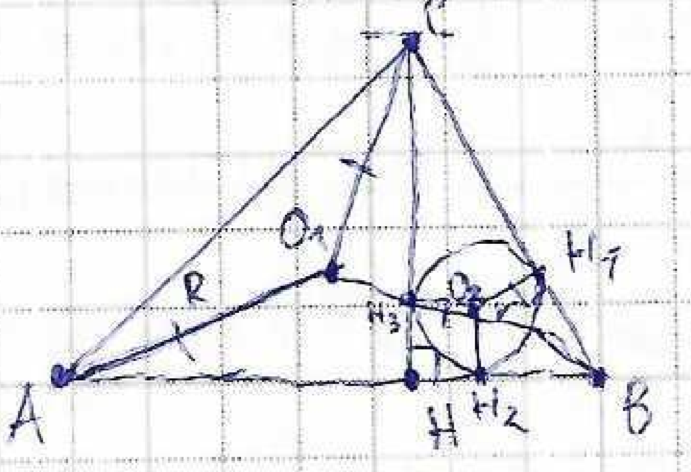
$$\frac{0^2}{25}+\frac{(10-y_0)^2}{z^2}=1=\frac{0^2}{25}+\frac{(-5-y_0)^2}{z^2} \Rightarrow (10-y_0)^2=(-5-y_0)^2 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 10-y_0=-5-y_0 \Rightarrow 10=-5, \text{ неверно} \\ 10-y_0=5+y_0 \Rightarrow y_0=2{,}5 \Rightarrow \frac{(10-2{,}5)^2}{z^2}=1 \Rightarrow \frac{7{,}5^2}{z^2}=1 \Rightarrow z=\pm 1 \end{array}\right.$$

$y_0 = 2,5$; $z = 17,5 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{(y-2,5)^2}{7,5^2} = 1$

Ответ: $V_{макс} = 13\sqrt{\frac{2}{3}}\ \frac{км}{с}$, $y_0 = 2,5 \cdot 10^3$ км, $z = 17,5 \cdot 10^3$ км, $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2,5)^2}{7,5^2} = 1$

№3



Пусть $CB = a$, тогда $CH = a\sin 60° = \frac{\sqrt{3}a}{2}$; $BH = a\cos 60° = \frac{a}{2}$. Пусть H_1, H_2, H_3 — основания перпендикуляров из O_2 на BC, BH и CH соответственно, тогда $O_2H_2HH_3$ — квадрат $\Rightarrow r = HH_2 = HH_3$, $CH_3 = CH_1$, $BH_1 = BH_2 \Rightarrow CB = CH_3 + BH_2 \Rightarrow 2r + 2CB = CB + CH + BC \Rightarrow 2r + a = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow a = \frac{2r}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)} = 4$.

По теореме синусов $AC = 2R\sin\angle B = \frac{2\sqrt{39}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{13}$.

По ней же $\sin\angle A = \frac{4}{2R} = \frac{6}{2\sqrt{39}}$

Введём систему координат с центром в B, BH — ось абсцисс, перпендикулярная ей и проходящая через B прямая — ось ординат. Тогда $C = (-2; 2\sqrt{3})$. Пусть $A = (0, k)$, тогда $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (k+2)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow 12 + (k+2)^2 = 13 \Rightarrow k+2 = \pm 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = -3 \end{array}\right.$$

1 случай: $k = -3 \Rightarrow$ середина AC — это $\left(-1; \sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ точка пересечения медиан $O_1 = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)$.

2 случай: $k = -1 \Rightarrow$ середина $AC = \left(-1; \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow O_1 = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}\right)$.

$H_2B = HB - HH_2 = 2 - r = 3 - \sqrt{3} \Rightarrow O_2 = (3 - \sqrt{3}; \sqrt{3} - 1)$.

Тогда в случае 1 $O_1O_2 = \sqrt{\left(3 - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{11}{3} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$, в сл. 2 $O_1O_2 = \sqrt{\left(\frac{11}{3} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2}$.