Вариант задания 2 Лист работы 1 из 3

N.2 По теореме Виета:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+xz=-4 \\ xyz=-2 \end{cases}$$

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=8$. Заметим, $\cancel{x^3}$ что т.к. x, y и z – корни данного многочлена, то

~~что~~ $x^3=4x-2 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=4x-2+4y-2+4z-2=4(x+y+z)-6=-6$.

С другой стороны, $x^7=(x^3)^2\cdot x=(4x-2)^2\cdot x=16x^3-16x^2+4x \Rightarrow$

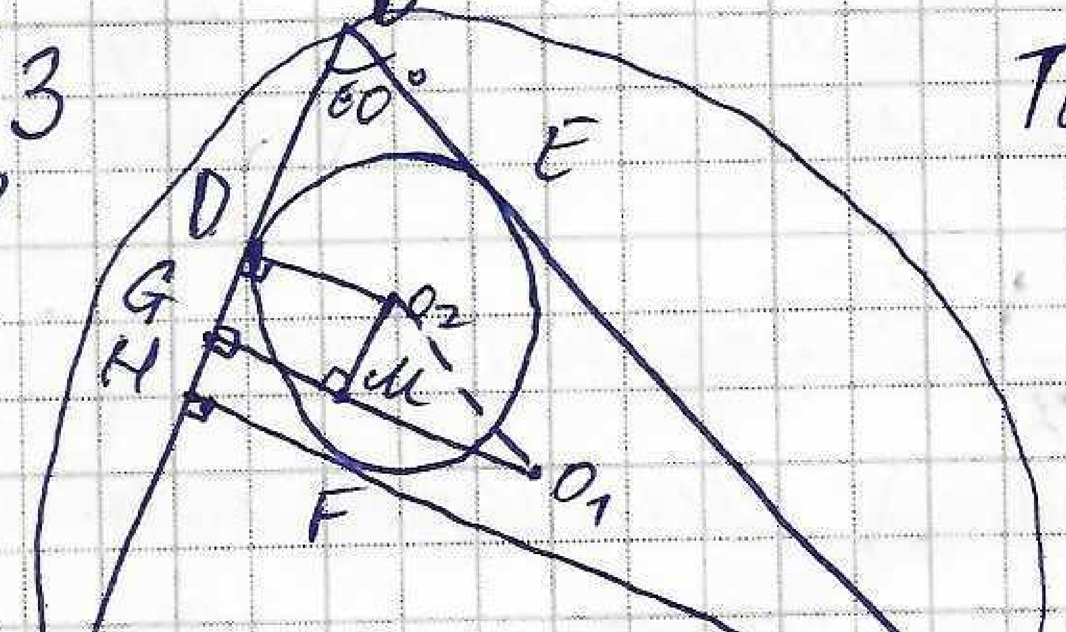
$\Rightarrow x^7+y^7+z^7=16x^3-16x^2+4x+16y^3-16y^2+4y+16z^3-16z^2+4z=$

$=16(x^3+y^3+z^3)-16(x^2+y^2+z^2)+4(x+y+z)=16(-6)-16\cdot 8+4\cdot 0=$

$=-96-128=-224$. Ответ: -224.

N.3

O_1O_2 – ?



Точки касания впис. окружности с BH, BC и CH = D, E, F соответственно.

$\angle HCB=30^\circ \Rightarrow BC=2BH$.

Заметим, что т.к. BCH – прямоугольный треугольник, то $r=DH=FH$.

Пусть $BD=BE=x$. Тогда $BH=x+r$, $\Rightarrow BC=2(x+r)$, $\Rightarrow CE=$
$=2(x+r)-x=2r+x$, $\Rightarrow HC=2r+x+r=$
$=3r+x$. По теореме Пифагора:

$(r+x)^2+(3r+x)^2=(2r+2x)^2 \Rightarrow$ получаем, что $3r^2=x^2$, $\Rightarrow x=\sqrt{3r^2}=$
$=\sqrt{3(3-\sqrt{3})^2}=\sqrt{36-18\sqrt{3}}=\sqrt{(3\sqrt{3}-3)^2}=3\sqrt{3}-3$. Значит, $BH=(3\sqrt{3}-3)+(3-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$,

$BC=2(r+x)=4\sqrt{3}$, $CH=3r+x=3(3-\sqrt{3})+3\sqrt{3}-3=6$.

Заметим, что $AC=2R\cdot\sin\angle B=2\sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{39}$. Тогда $AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{39-36}=\sqrt{3}$. Проведем перпендикуляр от O_1 на AB, точка пересечения равна G. Проведем перпендикуляр от O_2 на O_1G, точка пересечения равна M. Заметим, что $AG=BG$, $\Rightarrow AG=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. $O_1A=\sqrt{13}$. Тогда по теореме Пифагора в $\triangle AO_1G$, $O_1G=\sqrt{AO_1^2-AG^2}=\sqrt{13-\frac{27}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}=$

$=2{,}5$; ~~т.к.~~ заметим, что т.к. в MO_2DG три угла по $90°$, то это прямоугольник, $\Rightarrow MO_2=DG=BG-BD=\frac{3\sqrt{3}}{2}-x=$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}-(3\sqrt{3}-3)=\frac{3\sqrt{3}+6-6\sqrt{3}}{2}=3-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. $MO_1=O_1G-MG=$

$=O_1G-r=2{,}5-(3-\sqrt{3})=\sqrt{3}-0{,}5$. Тогда по теореме Пифагора в $\triangle MO_1O_2$, $O_1O_2=\sqrt{MO_1^2+MO_2^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-0{,}5)^2+\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$

$=\sqrt{3-\sqrt{3}+0{,}25+9-9\sqrt{3}+\frac{27}{4}}=\sqrt{\cancel{25}\,19-10\sqrt{3}}=$ Ответ.

№4 Первое ограничение:

$\sqrt{2(x+2)^2+8x+a-7}\geq 0$. Этот корень равен $\sqrt{2x^2+16x+1+a}$.

Рассмотрим параболу $2x^2+16x+1$. Её ветви направлены вверх, т.к. старший коэффициент $=2>0$. Найдем её нули: $2x^2+16x+1=0$;

$x=\frac{-16\pm\sqrt{256-8}}{4}=\frac{-16\pm2\sqrt{62}}{4}=\frac{-8\pm\sqrt{62}}{2}$ Значит, при $x\in\left(-\infty;\frac{-8-\sqrt{62}}{2}\right]\cup\left[\frac{-8+\sqrt{62}}{2};+\infty\right)$, ~~эта парабола~~ значения X неотрицательны.

С другой стороны, мы поднимаем эту параболу на a.

Если при всех $a\in[-3;-1]$ значения X положительны, то рассмотрим случай, когда нули параболы расположены на наибольшем расстоянии друг от друга; это произойдет при минимальном a, т.е. $a=-3$. Тогда $2x^2+16x+1-3=2x^2+16x-2=0\Rightarrow x^2+8x-1=0$.

$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+4}}{2}=-4\pm\sqrt{17}$, и расстояние между ними и правда больше, чем между $x=\frac{-8\pm\sqrt{62}}{2}$.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2 Лист работы 2 из 3

№ 4-продолжение.

Тогда получаем, что наши иксы принадлежат интервалам $(-\infty; -4\pm\sqrt{17}]$; $[-4+\sqrt{17}; +\infty)$. Теперь, рассмотрим правую часть уравнения. При всех $a\in[-3; -1]$, кроме $a=-1$, это парабола с ветвями вниз относительно X. В случае $a=-1$, после расчётов получаем, что $\sqrt{2x^2+16x} > -2x-14$, значит, во-первых, $2x^2+16x\geq 0$, $\Rightarrow x\in(-\infty; -8]$; $[0; +\infty]$, во вторых, если $2x^2+16x > 4x^2+56x+196$, то $2x^2+40x+196>0$, $\Rightarrow x\in(\cancel{-10}-\infty; -10-\sqrt{2})$; $(-10+\sqrt{2}; +\infty)$. Соединяя интервалы, получаем, что X пока что принадлежит $\cancel{(-10-\sqrt{2}]; [-4+\sqrt{17}}$ $(-\infty; -10-\sqrt{2})$; $[-4+\sqrt{17}; \infty)$.

Рассмотрим саму параболу. $(a+1)x^2+2a\cdot x-a-15$.

Её дискриминант равен $4a^2+4(a+15)(a+1)=8a^2+64a+60$.

Посмотрим, когда $D<0$: Пусть $8a^2+64a+60=0$. Тогда

$$a=\frac{-64\pm\sqrt{4096-60\cdot 8\cdot 4}}{16}=\frac{-64\pm 8\sqrt{34}}{16}=\frac{-8\pm\sqrt{34}}{2}.$$

Значит, в случае $a\in\left[-3; \frac{-8+\sqrt{34}}{2}\right)$ при любом X, значение функции параболы будет меньше нуля, а значит, любое X и нашего пока что построенного промежутка будет подходить.

В случае $a=\frac{-8+\sqrt{34}}{2}$, парабола касается оси Ox, но в этом случае левая часть больше правой так же при любом X.

Осталось рассмотреть случай $a\in\left(\frac{-8+\sqrt{34}}{2}; -1\right]$. Тогда какая-то часть параболы вылезает чуть выше оси Ox.

~~Чем больше a, тем больше~~ максимальное значение этой

~~функции достигается при~~ $\cancel{-\frac{2a}{2(a+1)} \to max}$~~, т.е. при~~ $\cancel{\frac{a}{a+1} \to min}$~~, на этом промежутке. Но тогда это достигается при~~ $\cancel{a=-1}$~~, при этом случае~~ $\cancel{a=-1}$ ~~не может быть, если это парабола. Значит,~~ $\cancel{\lim\limits_{a\to -1} -\frac{2a}{(a+1)\cdot 2} = }$

функции достигается в её центре, который находится под осью Ox при всех этих значениях. Значит, наш интервал подходит для всех $a \in [-3; -1]$, значит, ответ: $x \in (-\infty; -10-\sqrt{2}); [-4+\sqrt{17}; \infty)$.

№ 1 ~~Будем~~ Заметим, что все гласные стоят хотя бы через одну друг от друга. Возьмем 7 пробелов и будем заполнять их тремя гласными: ~~Пусть первая стоит на первом~~ Заметим ещё, что между любыми двумя гласными расстояние (кол-во пробелов между) не больше 2 из-за условия на согласные.
Пусть первая гласная стоит на первом, вторая — на ~~втором~~ третьем месте.
Тогда третья может стоять либо на 5, либо на 6 месте.
Такую расстановку будем записывать как 135 и 136.
Если вторая стоит на 4 месте, то получаются 146 или 147.
Пусть первая гласная стоит на втором месте (перед ней ни ~~никто н~~ одна гласная не стоит, т.к. она — первая. Иначе некоторые случаи будут повторяться). Тогда пусть вторая на 4 месте. Тогда получаем 246 и 247. Если вторая стоит на 5 месте, то третья — на 7: 257. Если первая гласная стоит уже на 3 месте, то возможен только случай 357. Если она стоит хотя бы на 4 месте, то третья хотя бы на $4+2+2=8$, что невозможно. Итого, получаем случаи 135, 136, 146, 147, 246, 247, 357 — всего 7. Заметим, что распределить 3 гласные на

№1-продолжение.

3 места 3! способами: САИ, СИА, АИС, АСИ, ИАС, ИСА.
Точно так же, оставшиеся 4 ~~буквы~~ согласные буквы распределяются на 4 оставшиеся места 4! способами. Т.к. расставление гласных и согласных букв — процессы независимые, то получаем на каждый случай по $3!\cdot 4!$ способов расстановки букв. Всего случаев 7, а значит, всего способов $7\cdot 3!\cdot 4! = 7\cdot 6\cdot 24 = 1008$ = ответ.

№6 Уравнение траектории движения обломка: $49x^2+40(y-3)^2=1960 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{40})^2}+\frac{(y-3)^2}{7^2}=1$ (1), это уравнение эллипса. Уравнение станции равно
$\frac{x^2}{4^2}+\frac{(y-3)^2}{5^2}=1$ (2). Рассмотрим первое уравнение. В точке $x=0$, $y=10$ или $y=-4$. Уравнение летательного аппарата
$\frac{x^2}{25}+\frac{(y-y_0)^2}{z^2}=1$ (3). Заметим, что эллипсы (1) и (3) совпадают в точке $(0;-4)$. Значит, подставляя в (3), получим $\frac{(y_0+4)^2}{z^2}=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{y_0+4}{z}=\pm 1$. Посмотрим на (2): ~~$y$ x~~ в точке $x=0$, $y=8$ или $y=-2$. (2) и (3) совпадают в верхней точке, где $x=0$, значит, у (3) есть точка $(0;8)$, т.е. $\frac{(8-y_0)^2}{z^2}=1 \Rightarrow \frac{8-y_0}{z}=\pm 1$. Получим системы уравнений:

$\begin{cases} y_0+4=z \\ 8-y_0=z \end{cases}$ $\begin{cases} y_0+4=z \\ y_0-8=z \end{cases}$ $\begin{cases} -y_0-4=z \\ 8-y_0=z \end{cases}$ $\begin{cases} -y_0-4=z \\ y_0-8=z \end{cases}$

Заметим, что ~~первая~~ третье и вторая системы не имеют решений. В первой: $y_0+4=8-y_0 \Rightarrow 2y_0=4 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_0=2 \Rightarrow z=6$. В четвёртой: $-y_0-4=y_0-8 \Rightarrow 2y_0=4 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow z=-6$. Но $z \geq 5$, $\Rightarrow (y_0; z)=(2;6)$.

Получаем, что уравнение ③ равно $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$.

$V=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$, но в нашем случае $\mu=const$, $a=7$.

Значит, $V_{космического\ мусора} = \cancel{\sqrt{\mu}}\ \sqrt{3{,}9\cdot10^5\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{7}\right)}$,
значит, мин. скорость достигается при максимальном r. Но максимальное $r=10$, и достигается при обломке, проходящем ~~высшую~~ высшую точку своей траектории $(0;10)$. Значит,
мин. $V=\sqrt{3{,}9\cdot10^5\left(\frac{2}{10}-\frac{1}{7}\right)}=\sqrt{\frac{7{,}8\cdot10^5}{35}}$.

(Мы поняли, что максимальное r у обломка $=10$, и считается от точки начала координат, т.к. минимальное расстояние – это от фокуса до нижней точки эллипса, ~~но~~ а значит, фокус расположен в точке начала координат).