Задача 2.

Т.к. x, y и z - корни многочлена $\rightarrow (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - 4t + 2$

тогда $\begin{cases} -xyz = 2 \\ xy + yz + zx = -4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -z = y + x \\ -y = x + z \\ -x = y + z \end{cases} \rightarrow$ $yz(y+z) = 2$

$yx(x+y) = 2$

$zx(x+z) = 2$

$-x^3 = (y+z)^3 = y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2$

$x^3 + y^3 + z^3 = -3yz(y+z) = -6$

$(x+y+z)^4 = 0 = x^4 + y^4 + z^4 + 4xy^3 + 4x^3y + 4xz^3 + 4x^3z + 4y^3z +$
$+ 4yz^3 + 12xyz(x+y+z) + 12x^2y^2 + 12x^2z^2 + 12y^2z^2 =$
$= x^4 + y^4 + z^4 + 4x^2y^2 + 4x^2z^2 + 4y^2z^2$,

т.к. $4xy^2(x+y) = 8y$
$4x^2y(x+y) = 8x$
$4z^2y(z+y) = 8z$
$4zy^2(z+y) = 8y$
$4zx^2(x+z) = 8x$
$4z^2x(x+z = 8z$
и их сумма
$16(x+y+z) = 0$

$(xy + yz + zx)^2 = 16 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 +$
$+ 2xyz^2 + 2x^2yz + 2xy^2z = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$

значит $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 16$

$0 = x^4 + y^4 + z^4 + 4 \cdot 16 \rightarrow x^4 + y^4 + z^4 = -64$

$(x^3 + y^3 + z^3)(x^4 + y^4 + z^4) = x^7 + y^7 + z^7 +$
$+ x^3y^4 + x^3z^4 + y^3x^4 + y^3z^4 + z^3x^4 + z^3y^4 =$
$= x^7 + y^7 + z^7 + x^3y^3(x+y) + x^3z^3(x+z) + y^3z^3(y+z) =$
$= x^7 + y^7 + z^7 + 2(x^2y^2 + z^2y^2 + z^2x^2) = x^7 + y^7 + z^7 + 2 \cdot (16)$

$(x^3 + y^3 + z^3)(x^4 + y^4 + z^4) = -64 \cdot (-6)$

$x^7 + y^7 + z^7 = 64 \cdot 6 - 2 \cdot 16 = 352$

Ответ: 352

Задача 4.

1) подкоренное выражение должно быть всегда положительно или равно 0:

$2(x+2)^2+8x+a-7\geq 0$

$a\geq 7-8x-2(x+2)^2$ верно при любом a

$\downarrow$

$-3\geq 7-8x-2(x+2)^2$ $\qquad 2(x+2)^2+8x-10\geq 0$

$(x+2)^2+4x-5\geq 0$

$x^2+8x-1\geq 0 \rightarrow x\in(-\infty;-4-\sqrt{17}]\cup[-4+\sqrt{17};+\infty)$

2) корень всегда положителен или 0 $\rightarrow$ если правая часть отрицательна $\rightarrow$ нер-во верно

$a(x^2+2x-1)+x^2-15<0$ $\qquad x^2+2x-1\neq 0$

$a<\dfrac{-x^2+15}{x^2+2x-1}$ $\qquad -1<\dfrac{-x^2+15}{x^2+2x-1}$ т.к. верно должно быть при любом a

$-x^2-2x+1<-x^2+15$

$x>-7$

тогда все $x>-4+\sqrt{17}$ подходят.

3) если правая часть положительна $\rightarrow$ рассмотрим $a=-1$

положительна при

$-2x+1-15>0$

$x<-7$ $\leftarrow$ не подходит по ограничению

Ответ: $x>-4+\sqrt{17}$

Задача 1.

будем обозначать согласные буквы цифрой 1
гласные – цифрой 2
следовательно имеем набор: 1111222
цифры 2 не могут стоять рядом по условию:

_ 2 _ 2 _ 2 _ тогда между ними есть хотябы одна цифра 1
цифры 1 не могут стоять 3 подряд → либо "11" либо "1"

1. рассмотрим случай, когда ~~...~~ никакие 2 единицы не стоят рядом: тогда есть только 1 вариант:
1212121 такому варианту соответствует
$4! \cdot 3! = 144$ варианта расположения карточек

2. теперь случай, когда ~~...~~ каждые 2 единицы стоят рядом:
т.ут тоже только 1 вариант: 2112112
ему соответствует $4! \cdot 3! = 144$ варианта расположения карточек

3. последняя ситуация: 2 единицы стоят рядом, а 2 другие по отдельности
тут имеем 6 вариантов:

1121212	1211212
2121211	2112121
1212112	2121121

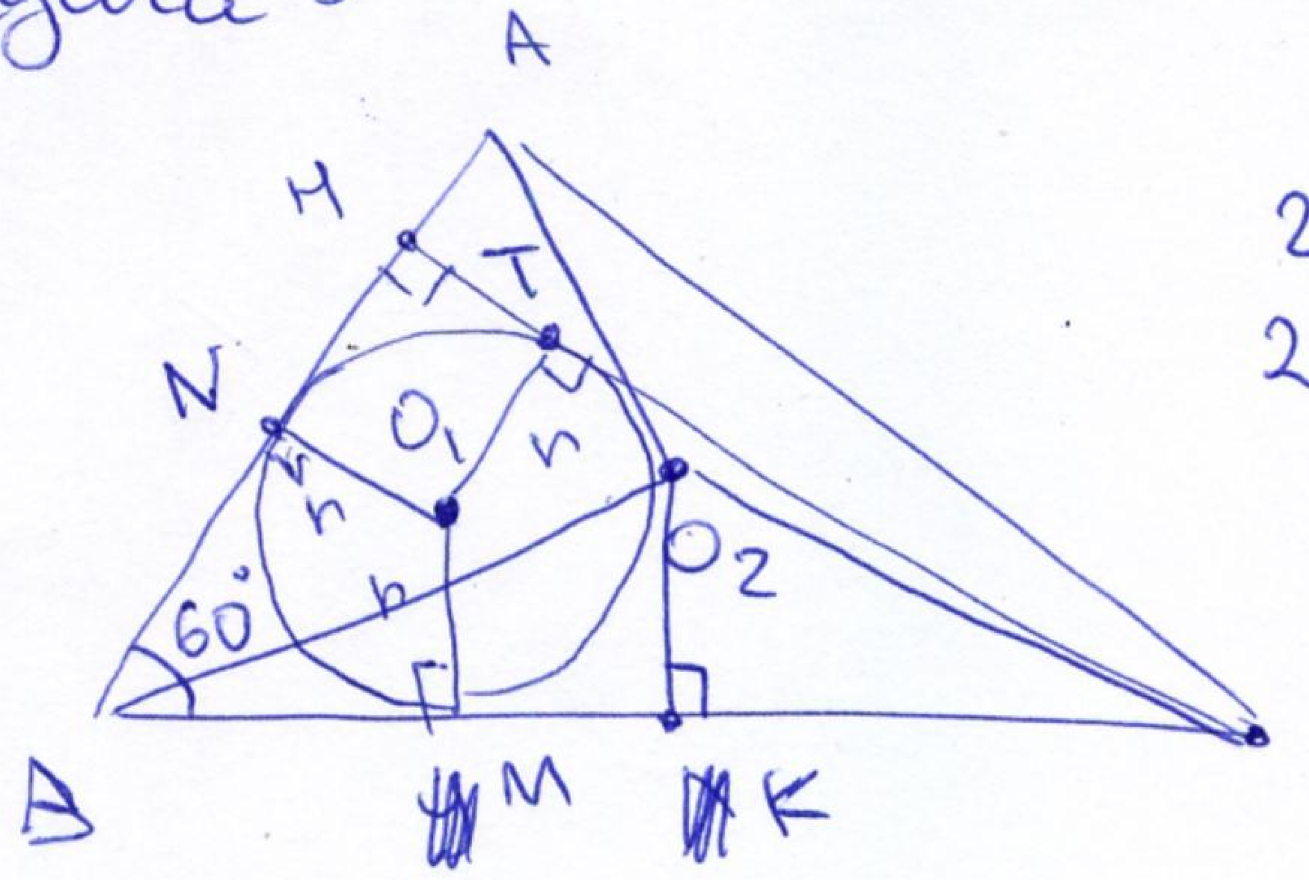
каждому из них соответствует $4! \cdot 3! = 144$ варианта расположения карточек → всего в этой ситуации $6 \cdot 144$ вариантов

4. значит количество способов равно:

$144 + 144 + 6 \cdot 144 = 8 \cdot 144 = 1152$

Ответ: количество способов равно 1152

Задача 3



$BM = BN \quad NH = HT \quad TC = MC$

$2BH = BC \quad CH = \sqrt{3}\, BH$

$2BN + 2HN = BN + MC$

$BN + 2NH = MC$

$MC + HT = \sqrt{3}\,(BN + HT)$

$\angle O_1HT = 45^\circ \to r = HT = HN$

$MC + r = \sqrt{3}\,(BN + r)$

$BN + 2r = MC$

$BN + 3r = \sqrt{3}\,(BN + r)$

$BN + 9 - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}\,BN + 3\sqrt{3} - 3$

$(12 - 6\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 1)\,BN \qquad BN = \dfrac{6(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1} = 3(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$

$BN = 3(\sqrt{3} - 1) \to BM = 3\sqrt{3} - 3 \qquad BH = r + BN = 3 - \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = 2\sqrt{3}$

$BC = 4\sqrt{3} \to BK = 2\sqrt{3}$ ($BK = KC$ т.к. $\triangle BO_2C$ – равнобедр. $\triangle$)

$MK = BK - BM = 3 - \sqrt{3} \qquad KO_2^2 = BO_2^2 - BK^2 \qquad BO_2 = R$

$KO_2^2 = 13 - 12 = 1 \qquad KO_2 = 1$

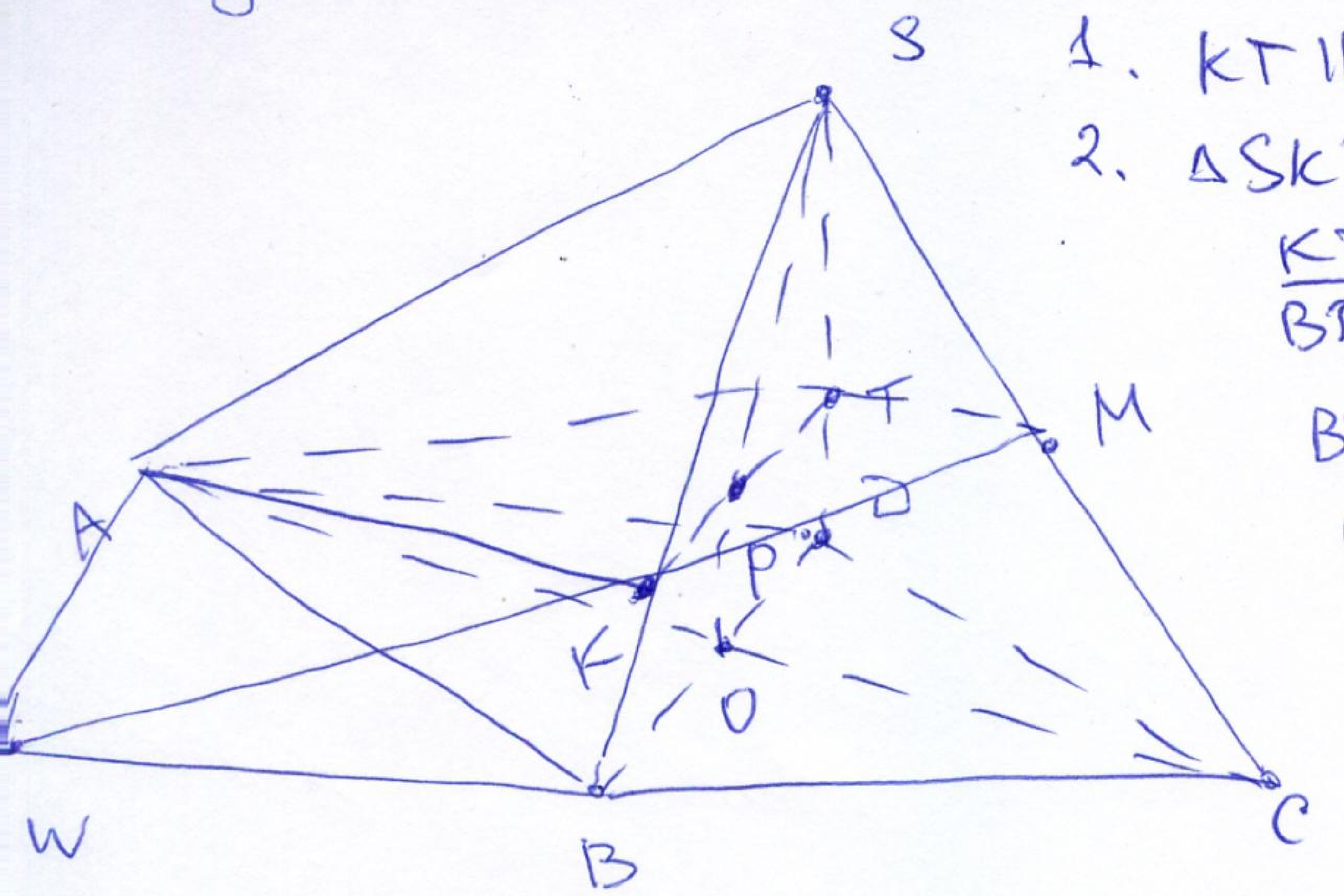
$O_1O_2^2 = MK^2 + (O_2K - MO_1)^2 \qquad MO_1 = r = 3 - \sqrt{3}$

$O_1O_2^2 = (3 - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 2)^2 = 9 + 3 - 6\sqrt{3} + 3 + 4 - 4\sqrt{3} =$
$= 19 - 10\sqrt{3}$

$O_1O_2 = \sqrt{19 - 10\sqrt{3}}$

Ответ: $\sqrt{19 - 10\sqrt{3}}$

Задача 5



1. $KT \parallel BD \rightarrow$ ~~[crossed out]~~ $MKT \parallel BD$

2. $\triangle SKT \sim \triangle SBD$

$$\frac{KT}{BD} = \frac{SP}{SO} = \frac{2}{3}$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cos 60^\circ AB \cdot AD$$

$$BD^2 = 9 \cdot 13$$

$$BD = 3\sqrt{13} \qquad KT = 2\sqrt{13}$$

3. $\frac{SK}{KB} = \frac{SP}{PO} = 2 \qquad PO = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3}$

$$\frac{SK}{KB} = \frac{SM}{MC} \cdot \left(1 + \frac{BC}{WB}\right) \qquad 2 = 1 + \frac{BC}{WB} \rightarrow WB = BC = AD$$

$WB \parallel AD$

$\downarrow$

$WADB$ - паралл.

$\downarrow$

$WA \parallel BD \rightarrow A \in MKT$

$$SB^2 = SO^2 + BO^2 \qquad BO = \frac{3}{2}\sqrt{13}$$

$$SB^2 = 12 + \frac{13 \cdot 9}{4} = \frac{165}{4} \qquad SB = \frac{\sqrt{165}}{2}$$

$$AC^2 = 13 + 16 \cdot 13 + 8 \cdot 13 = 25 \cdot 13 \qquad AC = 5\sqrt{13} \qquad AO = \frac{5}{2}\sqrt{13}$$

$AP \perp KT$ по т. о 3 перпендикулярах

$$AP^2 = PO^2 + AO^2 \qquad AP^2 = \frac{991}{12} \qquad S_{\triangle AKT} = \frac{AP \cdot KT}{2}$$

$$S_{\triangle AKT} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{\frac{991}{12}}$$

$$MP \perp KT \qquad MP = \sqrt{\left(\frac{OC}{2}\right)^2 + \left(\frac{2SO}{3} - \frac{SO}{2}\right)^2}$$

$$MP = \sqrt{\frac{OC^2}{4} + \frac{SO^2}{36}} = \sqrt{\frac{991}{48}}$$

$$S_{\triangle MKT} = \frac{MP \cdot KT}{2} = \sqrt{\frac{13 \cdot 991}{48}} \qquad S = S_{\triangle AKT} + S_{\triangle MKT}$$

$$S = \sqrt{\frac{991 \cdot 13}{12}} + \sqrt{\frac{991 \cdot 13}{48}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{991 \cdot 13}{12}}$$

Ответ: $S = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{12883}{12}}$

Задача 6.

скорость минимальна при максимальном r

$b^2 = \frac{1960}{49}$ $a^2 = \frac{1960}{40}$ $a = 7$ Мм

$b = \sqrt{40}$ Мм $c = 3$ Мм

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$

r_{max} достигается при $x = 0$

$r_{max} - 3 = 7$ $r_{max} = 10$ Мм

$V_{min} = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r_{max}} - \frac{1}{a}\right)}$

$V_{min} = \sqrt{3{,}9 \cdot 10^5 \cdot \frac{24}{70 \cdot 10^3}} = \sqrt{\frac{39 \cdot 24}{7}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 13}{7}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{104}{7}}$ $\frac{км}{с}$

Ответ 1: $V_{min} = 3 \cdot \sqrt{\frac{104}{7}}$ км/с

теперь чтобы найти z и y_0 найдем точку где скорость движения обломков максимальна:

$y_{об\,макс} - 3 = -7$ $y_{об\,макс} = -4$

теперь точку, где скорость станции минимальна

$y_{ст.\,мин} - 3 = \sqrt{\frac{400}{16}} = 5$ $y_{ст\,мин} = 8$

$$\begin{cases} y_{ст\,мин} - y_0 = z & 8 - y_0 = z \\ y_{об\,макс} - y_0 = -z & -4 - y_0 = -z \rightarrow 12 = 2z \end{cases}$$

$z = 6$ Мм

$y_0 = 2$ Мм

уравнения переходной орбиты:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$