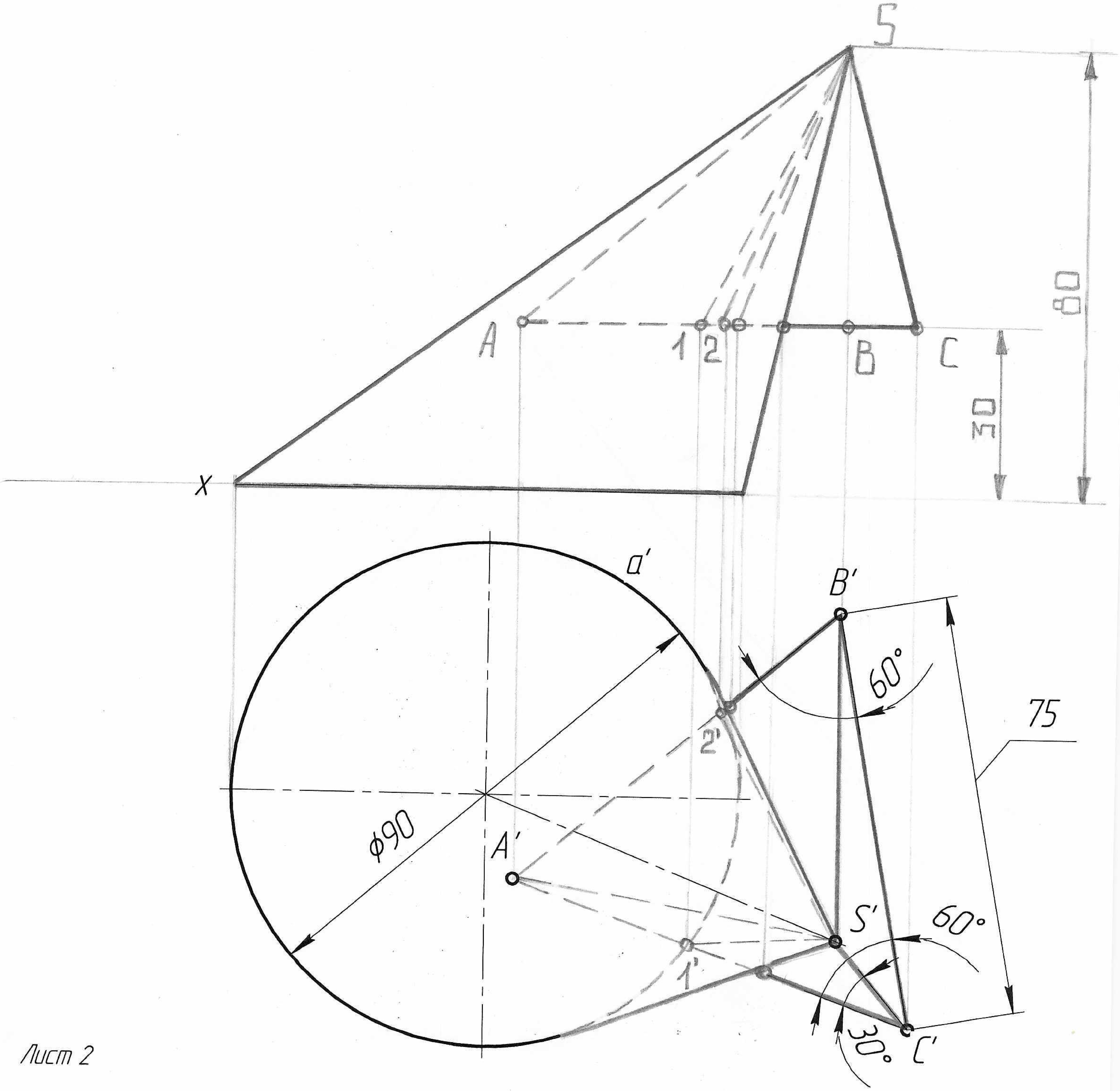
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

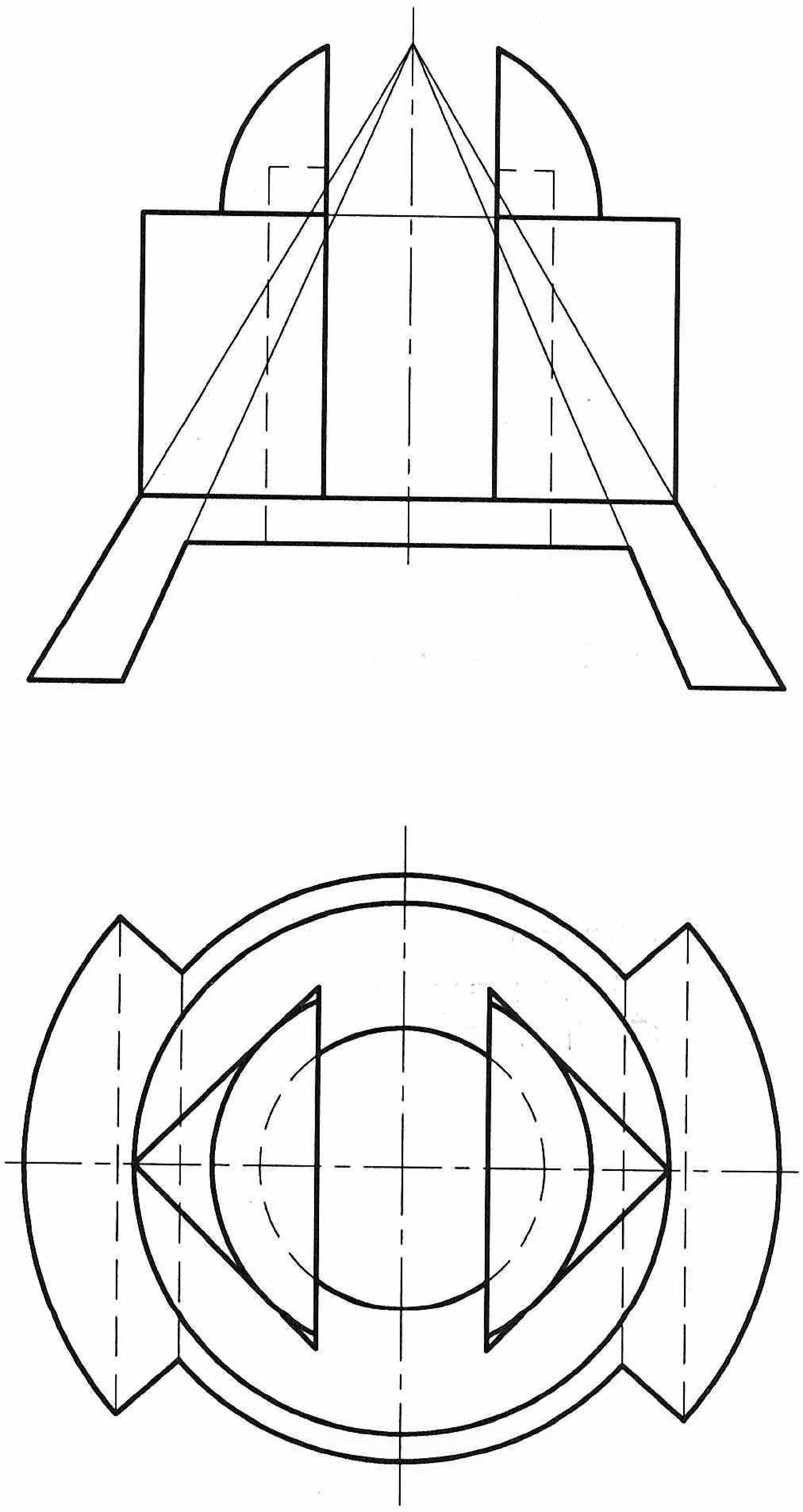
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

*Задача 4 (10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания наклонного конуса **a'** и вершин основания пирамиды **A'B'C'**. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания конуса принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания пирамиды параллельна плоскости основания конуса и выше ее на 30 мм. Высота пирамиды 50 мм. Требуется:*

1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин проекций и видимости линий;
3) оформить все изображения в соответствии с ЕСКД.



Задача 6 (20 баллов). Даны две проекции фигуры.
Требуется:
1) на месте вида слева оформить изображение как соединение части вида и части профильного разреза;
2) главный вид оформить как соединение части вида и части фронтального разреза;
3) все изображения оформить в соответствии с ЕСКД;
4) нанести размеры, причем их количество должно быть минимальное, но однозначно определяющее форму фигуры;
5) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.



Для билета | Для билета

Вариант задания 2 Лист работы 1 из 3

№3. $\log_{4x^2-x^4}(4a-ax^2)\le 1$ • Найти все $x\in R$ при $\forall a\in(0;1)$•

1) Усл 1: $\begin{cases}4x^2-x^4>0\\4x^2-x^4\ne 1\\4a-ax^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-4x^2<0\\x^4-4x^2+1\ne 0\\ax^2-4a<0\end{cases}$

$\exists\, t(x)=x^2$, тогда $t\ge 0$. Получим: $\begin{cases}t^2-4t<0\\t^2-4t+1\ne 0\\at-4a<0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t(t-4)<0\\t\ne 2\pm\sqrt{3}\\a(t-4)<0\end{cases}\Leftrightarrow$ [redacted] (Рассмотрим для $a\in(0;1)$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t\in(0;4)\\t\ne 2\pm\sqrt{3}\\t<4\end{cases}\Leftrightarrow t\in(0;2-\sqrt{3})\cup(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3};4).$

2) $\log_{4x^2-x^4}(4a-ax^2)\le 1.$

$\exists\, t(x)=x^2$, тогда $t\ge 0$. Получим: $\log_{4t-t^2}(4a-at)\le 1.$

$\log_{4t-t^2}(4a-at)-1\le 0$. Применим метод рационализации:

$(4t-t^2-1)(4a-at-4t+t^2)\le 0$

$(t^2-4t+1)(t^2-(a+4)t+4a)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t^2-4t+1\ge 0\\t^2-(a+4)t+4a\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}t^2-4t+1\le 0\\t^2-(a+4)t+4a\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\exists\, t^2-(a+4)t+4a=0$ (2).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \in (-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}; +\infty) \\ (2) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t \in [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}] \\ (2) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассм. (2):

$t^2-(a+4)t+4a=0$ – квадратное ур-е.

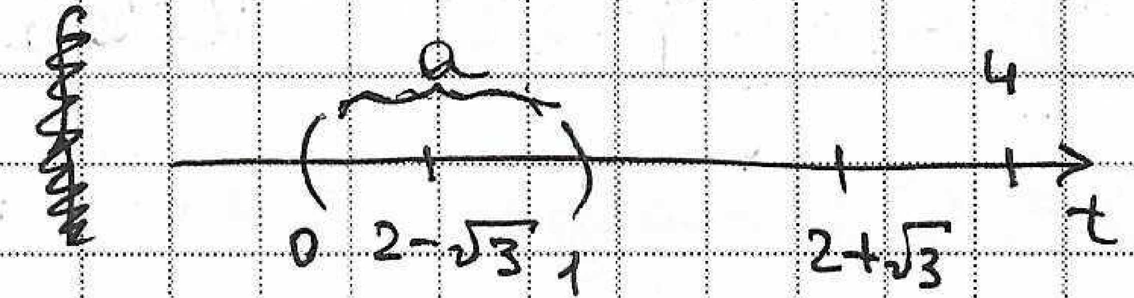
$D=(a+4)^2-4\cdot 4a = a^2+8a+16-16a = a^2-8a+16=(a-4)^2$

$t_{1,2} = \dfrac{a+4 \pm (a-4)}{2} = \left[\begin{array}{l} a \\ 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow t^2-(a+4)t+4a=(t-a)(t-4)=0.$

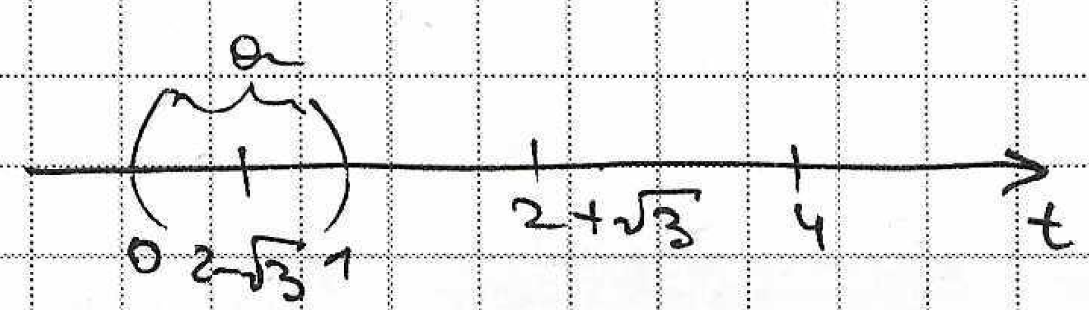
Т.к. $a \in (0;1)$ (мы рассматриваем именно этот инт-ал), то $a<4$.

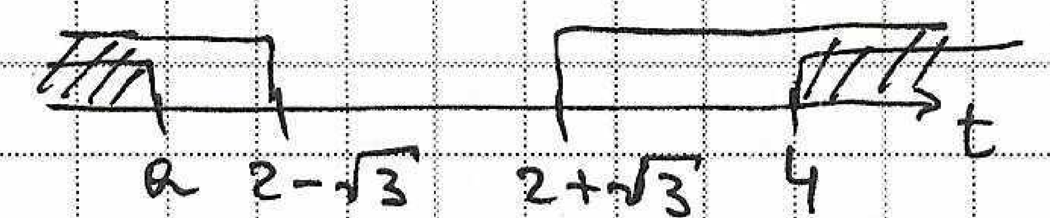
Тогда, возвращаясь к совокупности двух систем:

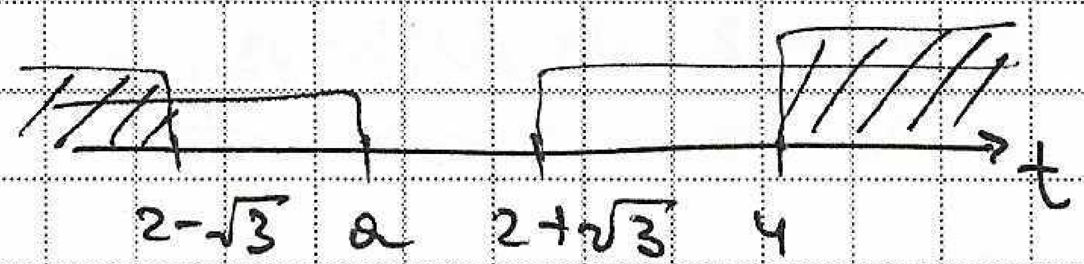
$$\left[\begin{array}{l} (3)\begin{cases} t \in (-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}; +\infty) \\ t \in (-\infty; a] \cup [4; +\infty) \end{cases} \\ (4)\begin{cases} t \in [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}] \\ t \in [a; 4] \end{cases} \end{array}\right.$$

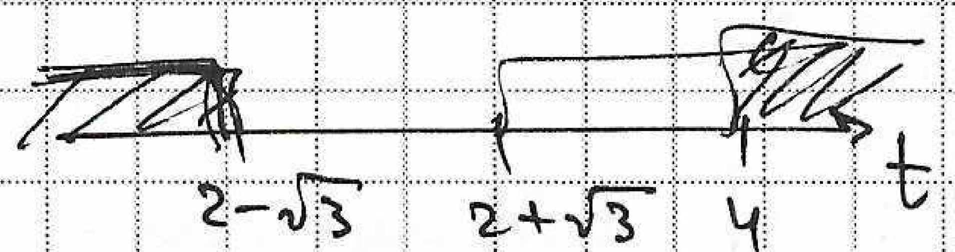


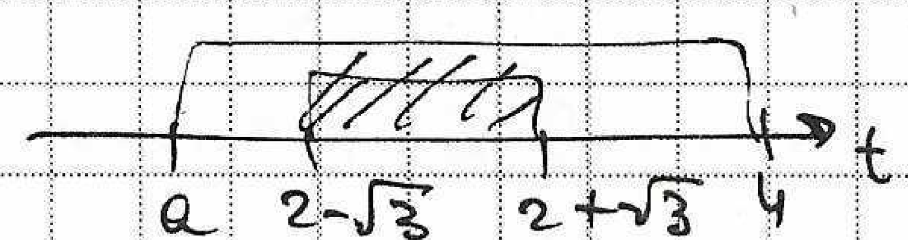
$2-\sqrt{3} \approx 0{,}3$
$2+\sqrt{3} \approx 3{,}7$

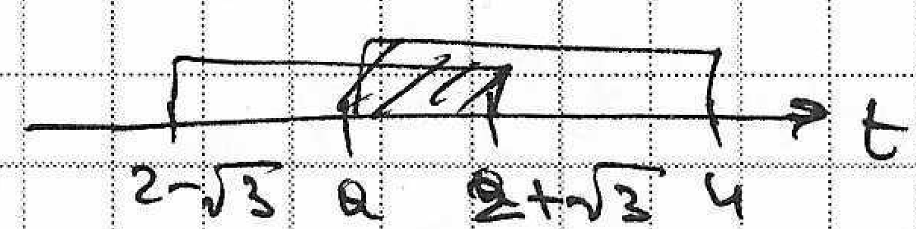


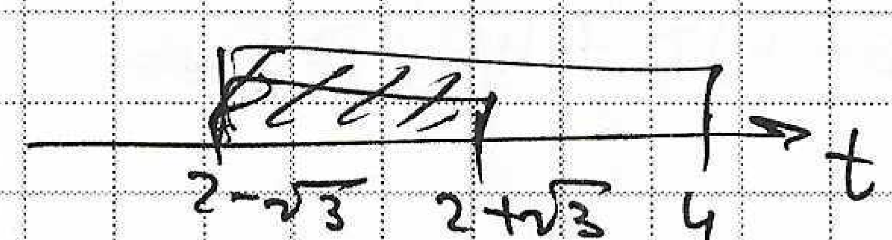
(3): при $a \in (0; 2-\sqrt{3})$:  $t \in (-\infty; a] \cup [4; +\infty)$.

при $a \in (2-\sqrt{3}; 1)$:  $t \in (-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup [4; +\infty)$.

при $a \in \{2-\sqrt{3}\}$:  $t \in (-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup [4; +\infty)$.

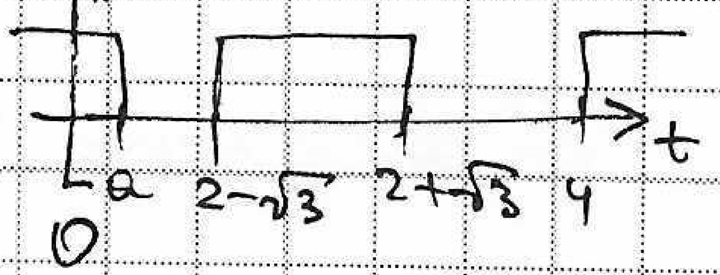
(4): при $a \in (0; 2-\sqrt{3})$:  $t \in [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}]$

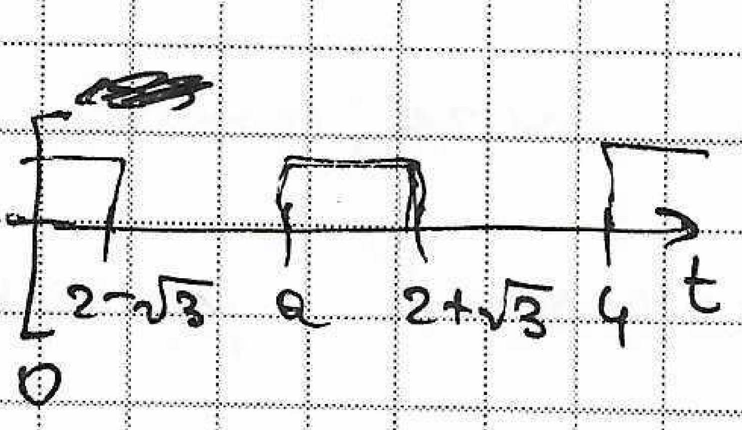
при $a \in (2-\sqrt{3}; 1)$:  $t \in [a; 2+\sqrt{3}]$

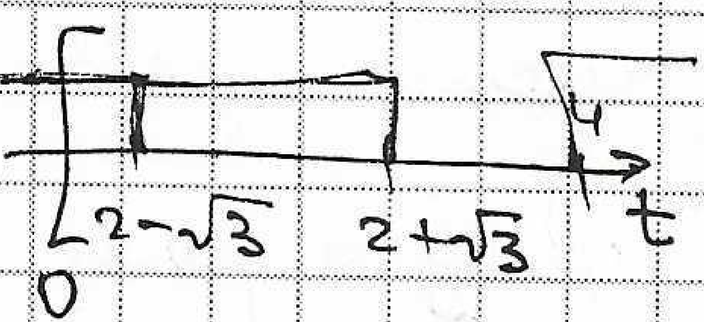
при $a \in \{2-\sqrt{3}\}$:  $t \in [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}]$.

Согласуя с усл-ем $t \geq 0$, получим:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in (0; 2-\sqrt{3}) \\ \begin{cases} t \in (-\infty; a] \cup [4; +\infty) \\ t \in [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}] \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (2-\sqrt{3}; 1) \\ \left[\begin{array}{l} t \in (-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup [4; +\infty) \\ t \in [a; 2+\sqrt{3}] \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2-\sqrt{3} \\ \left[\begin{array}{l} t \in (-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup [4; +\infty) \\ t \in [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}]. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \\ t \geq 0 \end{cases}$$

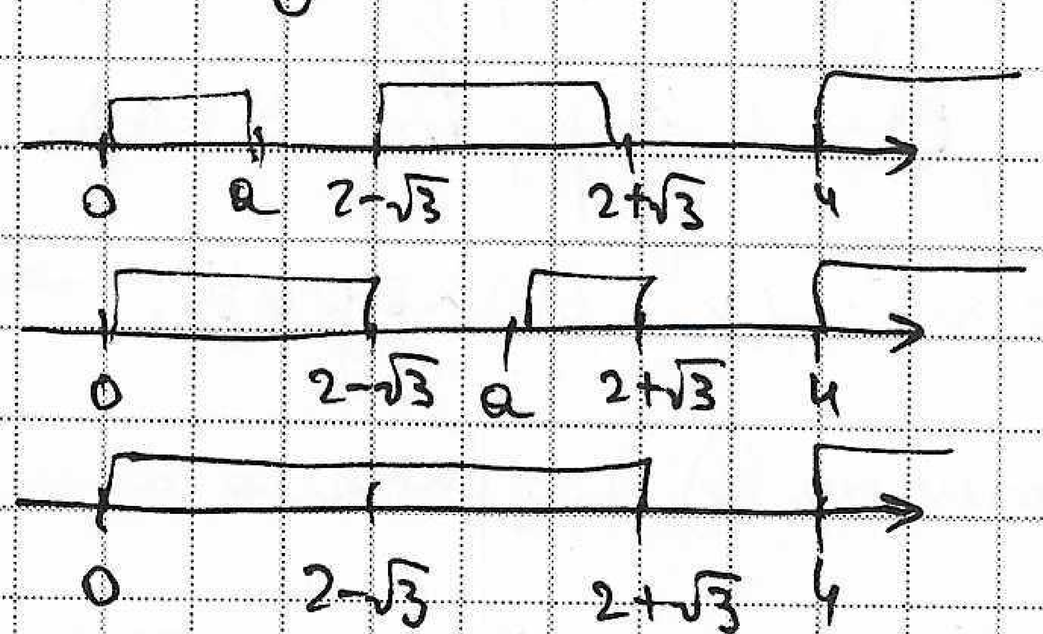






$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in (0; 2-\sqrt{3}) \\ t \in [0; a) \cup [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}] \cup [4; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (2-\sqrt{3}; 1) \\ t \in [0; 2-\sqrt{3}] \cup [a; 2+\sqrt{3}] \cup [4; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2-\sqrt{3} \\ t \in [0; 2+\sqrt{3}] \cup [4; +\infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

Т.к. по усл. надо найти все зн-я $x \in \mathbb{R}$, кот. явл-ся решениями при $\forall a \in (0; 1)$, то необх. определить тот отрезок/промежуток решений t, который не зависит (не изменяется) от значения a.



$\Leftrightarrow$ таким отрезком является отрезок: $[4; +\infty)$.

Тогда: $\begin{cases} t \in [4; +\infty) \\ t \in (0; 2-\sqrt{3}) \cup (2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}; 4) \text{ (из усл. 1)} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \varnothing \Rightarrow$

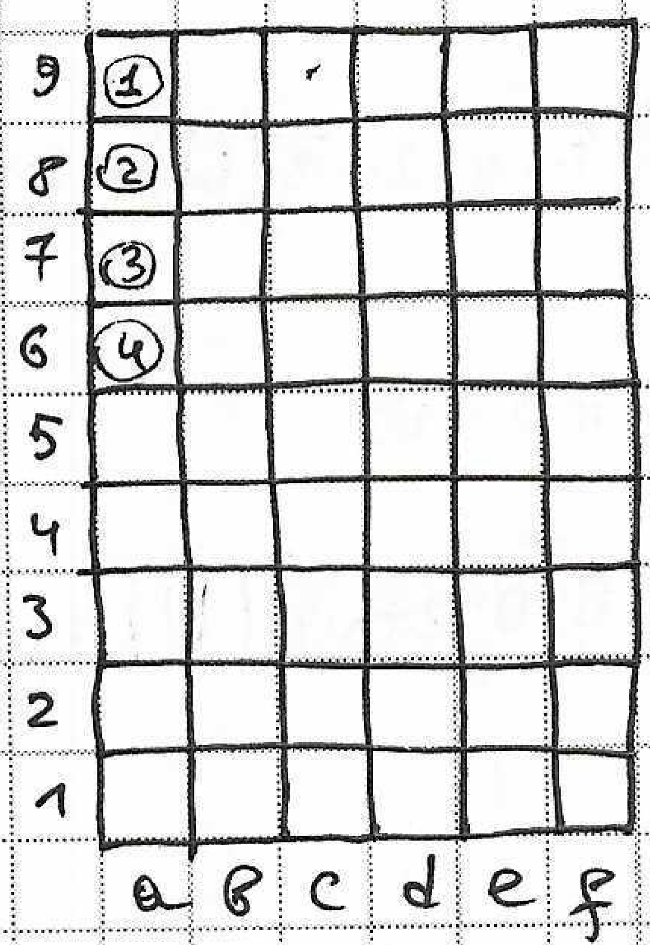
$\Rightarrow x \in \varnothing$

$\boxed{\text{Ответ: } x \in \varnothing.}$

№1.

1) Рассм. кол-во всех возможных случаев расстановки 2х коней на поле 9×6:
Если конь1 встанет на одну любую клетку из 54 ($9\times6=54$), то у коня2 есть 53 варианта выбора клетки. И так для каждой из 54х. Тогда всего вариантов их расстановки:
$54\cdot53$.

2)



Для того, чтобы посчитать кол-во вариантов расстановки в угрожающей позиции, достаточно увидеть, что их число равно числу прямоугольников, размером 3×2 (или 2×3), в которых конь1 стоит на угловой клетке (ходы буквой „Г").

Имеем: Если конь1 стоит на кл. a9: (эта клетка явл-ся угловой клеткой 2х прямоуг-ков 3×2) 2 вар. (варианта)
a8: 3 вар.; a7: 4 вар; a6, a5, a4, a3: 4 вар; a2: 3 вар; a1: 2 вар.
b9: 3 вар; b8; 4 вар; b7, b6, b5, b4, b3: 6 вар.; b2: 4 вар; b1: 3 вар.
И т.д.] Т.о., получаем „благоприятных" исходов: →
*(c: $4+6+8\cdot5+6+4$; d: $4+6+8\cdot5+6+4$; e (аналогично b) и f (аналогично a))
→: $a+b+c+d+e+f = 2(a+b+c) = 2(2+3+5\cdot4+3+2+3+4+5\cdot6+4+3+$
(кол-во вар.)
$+4+6+5\cdot8+6+4) = 2(10+20+30+14+40+20) = 2\cdot134$.

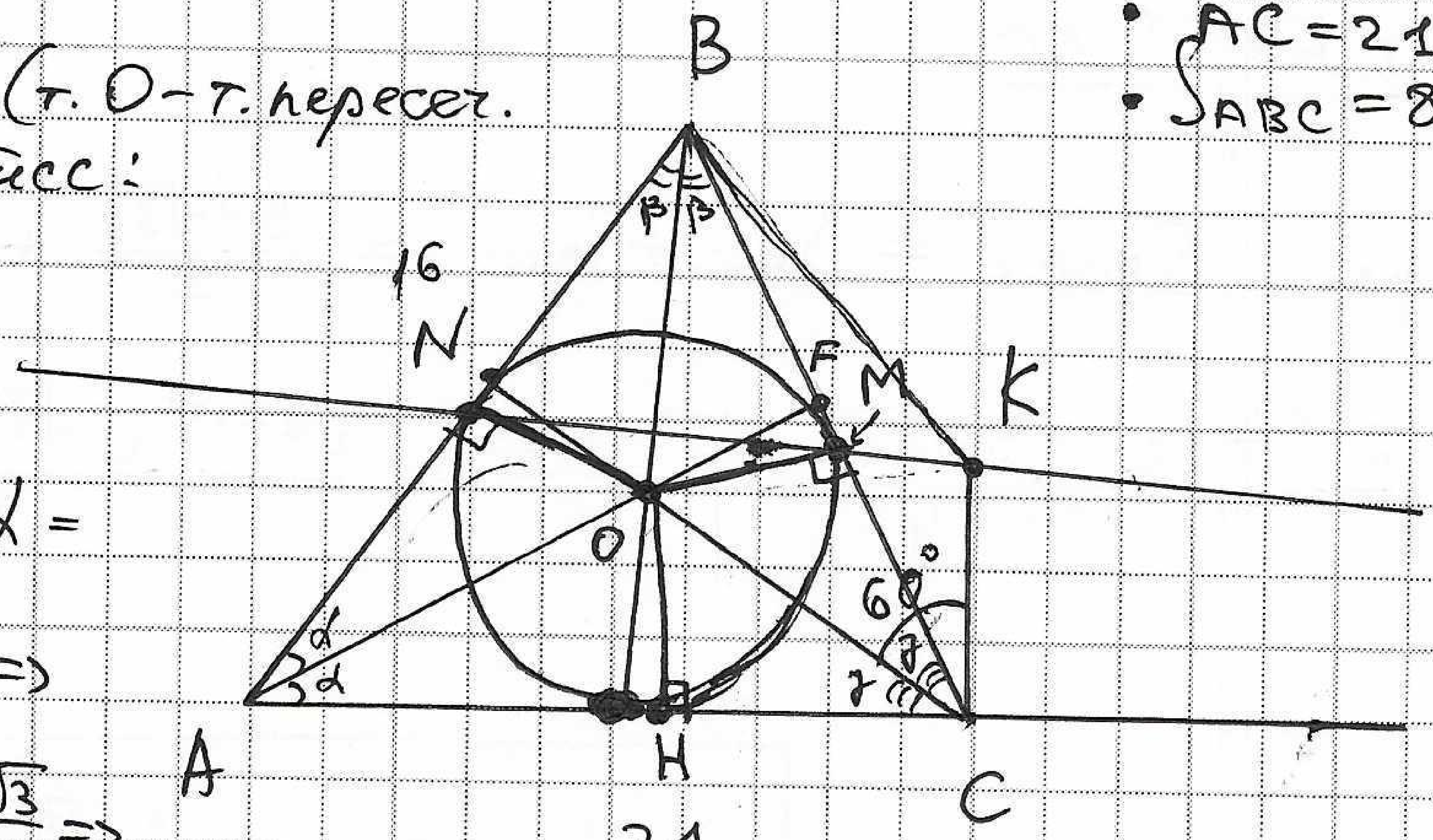
3) Тогда по классич. опр-ю вер-ти:

$P = \frac{\text{благопр.}}{\text{всего}} = \frac{2\cdot\cancel{2}\cdot67}{53\cdot\cancel{2}\cdot27} = \frac{134}{1431}$.

Ответ: $\frac{134}{1431}$.

№2.

• $AB=16$
• $AC=21$
• $S_{ABC}=84\sqrt{3}$



1) Т.к. AF – бисс. $\angle BAC$ (т. O – т. пересеч. бисс.), то по св-ву бисс:

$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{FC}=\frac{16}{21}$.

2) $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin 2\alpha=$

$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{16}^{8}\cdot 21\cdot \sin 2\alpha = 84\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{\cancel{84}^{4}\sqrt{3}}{\cancel{21}\cdot 8_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\triangle ABC$ остроуг., то ~~…~~ $\angle BAC=2\alpha=60°$.

3) По т. кос. для $\triangle ABC$: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 2\alpha=$

$=256+441-\cancel{2}\cdot16\cdot21\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=697-336=361=19^2\Rightarrow BC=19$.

4) По св-ву бисс: $\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{FC}=\frac{16}{21}\Rightarrow BC=37x=19\Rightarrow x=\frac{19}{37}$, тогда

$BF=16\cdot\frac{19}{37}=\frac{304}{37}$ и $FC=21\cdot\frac{19}{37}=\frac{399}{37}$.

5) $S_{ABC}=pr$, где $p=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{21+16+19}{2}=28\Rightarrow r=\frac{\cancel{84}^{3}\sqrt{3}}{\cancel{28}}=3\sqrt{3}$

6) $\triangle BOC$: $OM\perp BC$ (касат.) $\Rightarrow OM$ – выс. $\triangle BOC\Rightarrow S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OM\cdot BC=$

$=\frac{1}{2}\cdot r\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 19=\frac{57\sqrt{3}}{2}$.

7) ~~$\angle BCK=60°-\gamma\Rightarrow \cos\angle BCK=\cos(60°-\gamma)=\cos60°\cos\gamma+\sin60°\sin\gamma$~~.

$\triangle AOC$: OH – радиус $\Rightarrow OH=r=OM=3\sqrt{3}$. $\angle BAC=60°$ (из п.2) $\Rightarrow \angle OAC=$

$=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$ ((AO) ≡ (AF) – бисс.), $OH\perp AC$ (как радиус, провед. в точку касания) $\Rightarrow$ в $\triangle AOH$ OH – катет, леж. против $\angle 30°\Rightarrow OH=\frac{1}{2}AO\Rightarrow$

$\Rightarrow AO=2OH=6\sqrt{3}$. По т. Пиф: $AH=\sqrt{AO^2-OH^2}=\sqrt{36\cdot3-9\cdot3}=9\Rightarrow$

$\Rightarrow HC=AC-AH=21-9=12$.

$\triangle COH$ – пр/уг $\Rightarrow$ по т. Пиф.: $CO=\sqrt{OH^2+CH^2}=\sqrt{9\cdot3+144}=3\sqrt{19}$.

Тогда $\cos\gamma=\frac{CH}{CO}=\frac{12}{3\sqrt{19}}=\frac{4}{\sqrt{19}}\Rightarrow \sin\gamma=\sqrt{\frac{3}{19}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

8) ~~cos∠BCK = cos~~ $\sin\angle BCK = \sin\angle(60^\circ - \gamma) =$

$= \sin 60^\circ \cos\gamma - \sin\gamma \cos 60^\circ =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{19}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}.$

9) $S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot KC \cdot \sin\angle BCK = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot KC \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \frac{\overset{\sqrt{19}}{\cancel{19}} \cdot 3\sqrt{3}\, KC}{4\cancel{\sqrt{19}}} =$

$= \frac{3\sqrt{19 \cdot 3} \cdot KC}{4}.$

10) Тогда $S_{BOCK} = S_{BOC} + S_{BKC} = \frac{57\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{19 \cdot 3} \cdot KC}{4} =$

$= \frac{2 \cdot 57\sqrt{3} + 3\sqrt{19} \cdot \sqrt{3} \cdot KC}{4} = \frac{\sqrt{57 \cdot 3}\,(2\sqrt{57} + \sqrt{3}\,KC)}{4} = \frac{3\sqrt{19}\,(2\sqrt{57} + KC\sqrt{3})}{4}.$

$\boxed{\text{Ответ: } S_{BOCK} = \frac{3\sqrt{19}\,(2\sqrt{57} + KC \cdot \sqrt{3})}{4}.}$