№1 $\exists$ X – объём недолитого чая

Для начала найдём наименьшее возможное количество недолитого чая в стакане, т.к. чем недолито меньше, тем общая температура после добавления будет выше, тогда наименьшее количество недолитого чая было если к нему добавили кипяток с $t_1 = 90°$ два раза, а конечная температура стала $60°C$. Потому что чем ниже температура кипятка, тем ниже t смеси будет. По той же логике найдём какое наибольшее количество недолитого чая могло быть (т.к. к нему два раза долили кипяток с $t_2 = 100°C$). Теперь ограничим X:

(V – объём кружки
c – теплоёмкость/чая
ρ – плотность воды/чая)

1) $\frac{1}{4} V c \rho (100-60) = c \rho \frac{3}{4} V (-t+60)$

$t = 46\frac{2}{3}°C$ – Температура смеси после 1-го доливания в случае X наибольш.

2) $X \cdot (46\frac{2}{3} - 25) \cdot \rho \cdot c = (V-X) \cdot (100 - 46\frac{2}{3})$

$\frac{X}{V} = \frac{32}{45}$ – наибольшее количество недолитого чая

3) $\frac{1}{4} V \cdot c \cdot \rho \cdot (90-60) = \frac{3}{4} V \cdot \rho \cdot c \cdot (60-t)$

$t = 50°C$ – Температура смеси после 1-го доливания в случае X наименьш.

4) $X \cdot (50-25) \cdot \rho \cdot c = (V-X) \cdot (100-50)$ $\quad \frac{X}{V} = \frac{8}{13}$

5) Таким образом, $\underset{\vee}{X} \in \left[\frac{8}{13}; \frac{17}{45}\right]$

Ответ: $\left[\frac{8}{13}; \frac{32}{45}\right]$

N 3

$$(a+2)x - (1+2a)\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + a^2 + 4a - 5 > 0$$

$\exists$ $\sqrt[3]{x} = t$ $(t \neq 0)$

$$(a+2)t^3 - (1+2a)t^2 - 6t + a^2 + 4a - 5 > 0$$

1) $\exists$ ~~...~~:
$a = 1$

$$3t(t^2 - t - 2) > 0$$

2) $\exists$ $f(t) = t^2 - t - 2$ — к.в.ф; гр. парабола; ветви $\uparrow$

$D = 9$

$t = \frac{1 \pm 3}{2}$ $\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$

$\left[\begin{array}{l} \text{при } t \in [-1; 2]\ f(t) \leq 0 \\ \text{при } t \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty);\ f(t) \geq 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ при $t \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$
$a = 1$ — удовл. условию

3) при $a = -2$ ~~удовл~~ $f(t) = -x^2 - 6x - 9$

$f(t) = -(x+3)^2$ $\Rightarrow$ $\forall t$ $a = 2$ НЕ удовл. ул.

$\forall x$; $a \neq 2$.

4) $\exists$ $f(t)$ $\forall a$: $t(t^2 \cdot (a+2) - (2a+1)t - 6) + a^2 + 4a - 5 > 0$

(1) $f_1(a)$ на $a \in [-2; 1]$; $\in [-9; 0]$; тогда если a лежит в (1) промежутке; $a \in (-2; 1)$,

То неравенство выполняется если: $t\left(t^2\cdot\underset{(2)}{(a+2)}-(7a+1)t-6\right) > -\underset{(1)}{(a^2+4a-5)}$

~~Найдем наибольшее значение (2):~~

$$\cancel{t^2(a+2)<(7a+1)t-6}$$

$$\cancel{\text{На } a\in(-2;1)}$$

$\forall a\in[-2;1)$ любое t удовл. условию будет лежать внутри

$t\in(-\infty;-1)\cup[2;+\infty)$ т.к. условие $\left[\begin{array}{l}(2)>-(1)\\(1)\in(-9;0)\end{array}\right.$ создаёт условие для t. То есть

$$\nexists t:\left[\begin{array}{l}\text{при } a=1 \quad f(t)=t\left(t^2(a+2)-(7a+1)t-6\right)+(a^2+4a-5)>0\\ \text{и при } a=b;\ b\in(-2;1);\ f(t)>0\end{array}\right.$$

НО

$$\exists t:\left[\begin{array}{l}\text{при } a=1 \quad f(t)<0\\ \text{при } a=b;\ b\in(-2;1)\quad f(t)>0\end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$t\in(-\infty;-1)\cup[2;+\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$x\in(-\infty;-1)\cup[8;+\infty)$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup[8;+\infty)$

№5

Так как длина заполнена полностью, а количество кубиков самого малого ~~числа~~ может рациональное число, то размеры количества кубиков в длину, ширину, высоту — делители числа $\boxed{336}$, тогда $\exists$ в длину вмещается 14 кубиков, в ширину 8, а в высоту 3 кубика, тогда найдём размеры каждого кубика в данном случае и проверим соответствуют ли они условиям:

$$\frac{180}{x} = 14$$

$$x = 12\frac{6}{7} \text{ (мм)}$$

$$\frac{120}{y} = 8$$

$$y = 15 \text{ (мм)}$$

$$\frac{60}{z} = 3$$

$$z = 20 \text{ (мм)}$$

I проверим удовлетворяют ли наши x, y, z неравенствам: $1 < \frac{15}{12\frac{6}{7}} < \frac{3}{2}$, $1 < \frac{20}{15} < \frac{3}{2}$ $\Leftarrow$ верно $\Rightarrow$

Условие соблюдено!

II проверим удовлетворяют ли наши x, y, z условию, что по большей стороне горбыли сахар лежит меньшей стороной: $180 > 120 > 60$, $12\frac{6}{7} < 15 < 20$ $\Rightarrow$

Условие соблюдено!

III Заметим, что никакие другие размеры коробки не имеют: ~~(6, 7, 8)~~ ~~(4, 21, 28)~~ ~~(1 · 3 · 5...)~~

1) 6, 7, 8: $\cancel{\frac{\frac{?}{8}}{\frac{?}{120}}}$ 6, $\frac{\frac{60}{6}}{\frac{120}{8}} = \frac{2}{3}$ W

2) 6, 14, 4: $\frac{\frac{120}{14}}{\frac{60}{4}} < \frac{2}{3}$ W

3) 6, 28, 2: $\frac{\frac{80}{2}}{\frac{120}{6}} \geq \frac{3}{2}$ W

Ответ: 14, 8, 3 – слоев/рядов в пачке (продолжение на листе 3)

4) 2, 17, 12: $\dfrac{\frac{60}{2}}{\frac{120}{12}} > \dfrac{3}{2}$

5) 2, 7, 24: $\dfrac{\frac{60}{2}}{\frac{120}{7}} > \dfrac{3}{2}$

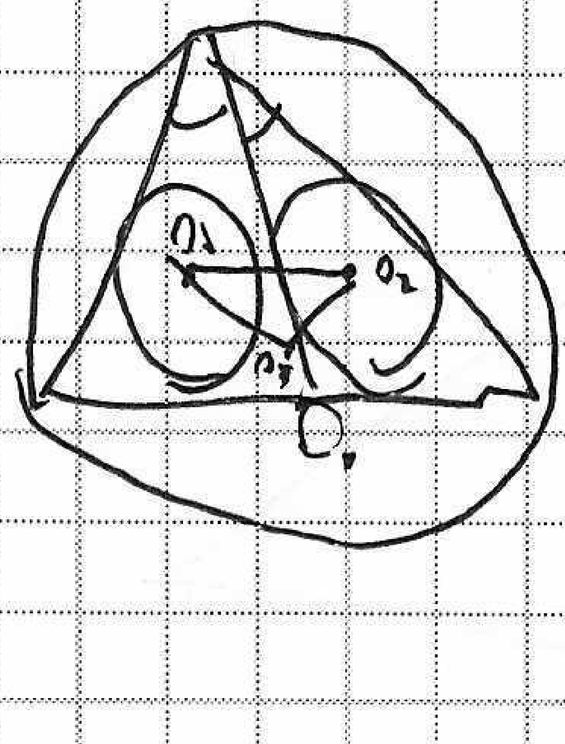
6) 2, 56, 3: $\dfrac{\frac{120}{3}}{\frac{180}{56}} > \dfrac{3}{2}$

7) 3, 28, 4: $\dfrac{\frac{120}{4}}{\frac{180}{28}} > \dfrac{3}{2}$

8) 3, 16, 7: $\dfrac{\frac{120}{7}}{\frac{180}{16}} > \dfrac{3}{2}$

! В случае отсутствия [illegible]. Из [illegible] случаев понятно, что так как стороны [illegible] относятся как 1:2:3, то и стороны параллелепипеда должны [illegible] не сильнее чем на это значение.

№2



Ответ: $\frac{9}{16}$