Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 2

№1.

$m_1 \cdot c_1 (t_1 - t) = m_2 c_2 (t - t_2)$ т.к. $c_1 = c_2 = c \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 (t_1 - t) = m_2 (t - t_2) \Rightarrow V_1 (t_1 - t) = V_2 (t - t_2)$

Пусть $x = \frac{V_0}{V}$

$V_0 \neq 0, V_0 \neq V \Rightarrow 0 < x < 1$ ε - t кипятка

1-ый долив: $T_1 = \frac{V_0 \cdot 25 + (V - V_0) \cdot \varepsilon}{V_0 + (V - V_0)} = \frac{V_0}{V} \cdot 25 (1 - \frac{V_0}{V}) \cdot \varepsilon = 25x +$

$+ (1 - x) \cdot \varepsilon$ (по усл $T < 60$)

2-ой долив: $T_2 = \frac{\frac{3}{4} V \cdot T_1 + \frac{1}{4} V \cdot \varepsilon}{\frac{3}{4} V + \frac{1}{4} V} = \frac{3}{4} T_1 + \frac{1}{4} \varepsilon$ (по усл $T_2 < 60$)

$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = 25x + (1-x) \cdot \varepsilon \\ 60 = \frac{3}{4} T_1 + \frac{1}{4} \cdot \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 25x + (1-x) \cdot \varepsilon \\ 240 = 3T_1 + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow \varepsilon \leq 10}$

$\cancel{0 < T_1 < 60}$

$\cancel{0 < x < 1}$

~~Ответ: кипяток~~ $\cancel{0 < x < 1}$.

$240 = 75x + (4 - 3x) \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{240 - 75x}{4 - 3x}$ $90 \leq \varepsilon \leq 100 \Rightarrow$

$T_1 = 25x + (1-x) \cdot \frac{240 - 75x}{4 - 3x} = \frac{5 \cdot (48 - 43x)}{4 - 3x}$

$\Rightarrow 90 \leq \frac{240 - 75x}{4 - 3x} \leq 100 \Rightarrow \begin{cases} 240 - 75x \leq 100(4 - 3x) \\ 240 - 75x \geq 360 - 270x \end{cases} = \begin{cases} 225x \leq 160 \\ 195x \leq 120 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{160}{225} \\ x=\frac{120}{195}\end{cases} \Rightarrow \frac{8}{13} \le x \le \frac{32}{45}$

Ответ: макс $=\frac{32}{45}$; мин $=\frac{8}{13}$

№3 $(a+2)x-(1+2a)\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+a^2+4a-5>0$

Пусть $\sqrt[3]{x}=t \Rightarrow x=t^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^2$

$(a+2)t^3-(1+2a)t^2-6t+a^2+4a-5>0$

Решим н-во относительно a:

$a^2+a(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5>0$ $a\in[-2;1]$

Найдем когда н-во выполняется для всех a и возьмем отрицание (решим обр. н-во: вместо $>$: $\le$).

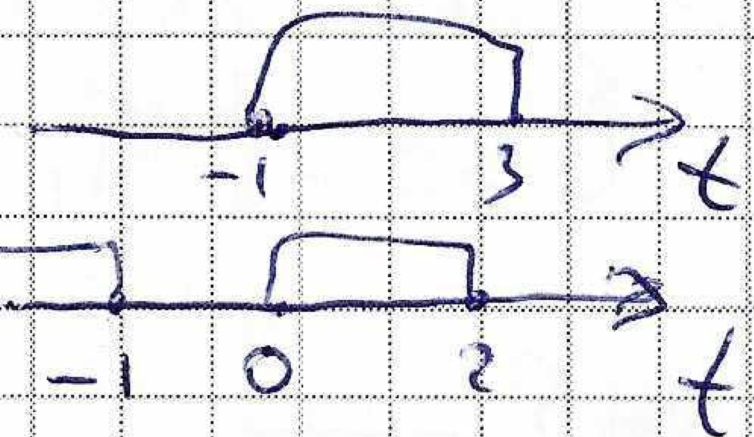
$a^2+a(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5\le 0$

Пусть $f(a)=a^2+a(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5$

Тогда

$\begin{cases} f(-2)\le 0 \\ f(1)\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-2(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5\le 0 \\ 1+t^3-2t^2+4+2t^3-t^2-6t-5\le 0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t^2-2t-3\le 0 \\ t^3-t^2-2t\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(t+1)(t-3)\le 0 \\ t(t+1)(t-2)\le 0\end{cases}$

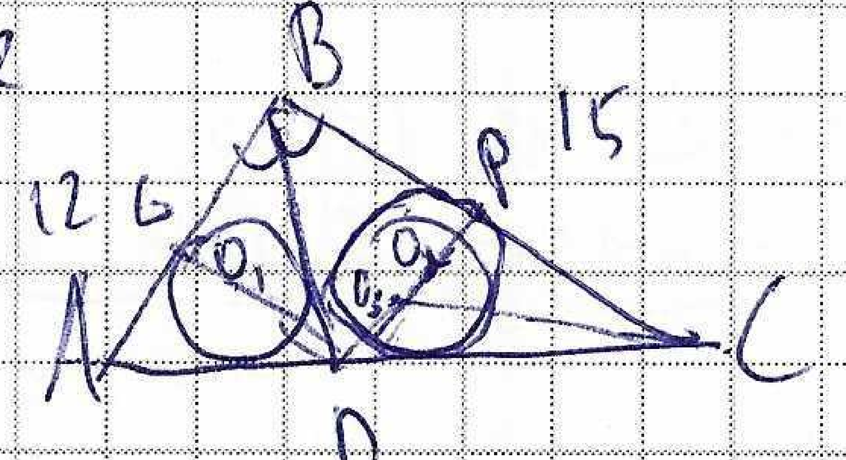


Вернемся к исх. усл.

$\sqrt[3]{x}=t\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(8;+\infty)$

№2



Вписанные окр-ти имеют центр, кот. лежит на биссектрисе, т.е проведем бисс-сы DP и DG. $\angle ADG=\angle GPB$ $\angle BPP=\angle PDC$

в сумме $-180^\circ \Rightarrow \angle O_1DO_2 = 90^\circ$

Найдем AD и DC: $\begin{cases} BD = \sqrt{AB\cdot BC - AD\cdot DC} = \sqrt{12\cdot 15 - AD\cdot(18-AD)} \\ \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{12}{AD} = \dfrac{15}{18-AD} \Rightarrow 12\cdot 18 - 12A = 15AD \\ 12\cdot 6 = AD\cdot 9 \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow AD = 4\cdot 2 = 8$

$AD = 8$

$DC = 10$

$BD = \sqrt{12\cdot 15 - 8\cdot 10} = 2\cdot\sqrt{45-20} = 2\cdot 5 = 10 \Rightarrow \triangle BDC$ - равнобедр. $BD = DC = 10 \Rightarrow$ $DP \perp BC$ и DP медиана, т.е. серединн. перп-ляр $\Rightarrow$ центр O_3 лежит на DP.

Найдем радиусы по формулам $S = pr$ и $S = \dfrac{abc}{4S}$

$\Rightarrow r = \dfrac{S}{p}$ $\Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S}$

$S_{ABD} = p_{ABD}\cdot r_1$

$p_{ABD} = \dfrac{12+10+8}{2} = 15 \Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{15(15-12)(15-10)(15-8)} = 15\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 = \dfrac{15\sqrt{7}}{15} = \sqrt{7}$

$S_{BCD} = p_{BCD}\cdot r_2$

$p_{BCD} = \dfrac{10+10+15}{2} = \dfrac{35}{2} \Rightarrow S_{BDC} = \sqrt{\dfrac{35}{2}\left(\dfrac{35}{2}-10\right)^2\left(\dfrac{35}{2}-15\right)} = \dfrac{75}{4}\cdot\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2 = \dfrac{75\sqrt{7}\cdot 2}{4\cdot 35} = \dfrac{15}{14}\cdot\sqrt{7}$

$S_{ABC} = 15\sqrt{7} + \dfrac{75}{4}\sqrt{7} = \dfrac{135}{4}\cdot\sqrt{7} \Rightarrow R = \dfrac{12\cdot 15\cdot 18}{135\sqrt{7}} \Rightarrow O_3O_2 = O_3P - r_2 \Rightarrow$

$O_3P = \sqrt{R^2 - PC^2} = \sqrt{\dfrac{24^2}{7} - \left(\dfrac{15}{2}\right)^2} = \dfrac{27\sqrt{7}}{14} \Rightarrow O_3O_2 = \dfrac{27\sqrt{7}}{14} - \dfrac{15\sqrt{7}}{14} = \dfrac{12\sqrt{7}}{14}$

$\cos ADB = \dfrac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2AD\cdot DB} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow O_1D = \dfrac{r_1}{\sin\frac{ADB}{2}}$ $\sin^2\dfrac{ADB}{2} = \dfrac{7}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1D = \dfrac{\sqrt{7}\cdot 4}{\sqrt{7}} = 4$

$S_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2} O_1P \cdot O_3O_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{12}{14} \sqrt{7} = \frac{12}{7} \cdot \sqrt{7}$

Ответ: $S_{O_1O_2O_3} = \cancel{2 \cdot \frac{17}{14} \cdot \sqrt{7}}$ $\frac{12}{7} \cdot \sqrt{7}$

№5 $\begin{cases} 1 < \frac{y}{x} < \frac{3}{2} \\ 1 < \frac{z}{y} < \frac{3}{2} \end{cases}$ $A = 60$, $B = 120$, $C = 180$. Пусть a, b, c – кол-во кусков в рядах.

Так как ряда перевернуты, то:

$x = \frac{C}{c}$; $y = \frac{B}{b}$; $z = \frac{A}{a}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{180}{c}$; $y = \frac{120}{b}$; $z = \frac{60}{a}$ $\Rightarrow \begin{cases} 1 < \frac{120}{b} \cdot \frac{c}{180} < \frac{3}{2} \\ 1 < \frac{60}{a} \cdot \frac{b}{120} < \frac{3}{2} \\ abc = 336 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} < \frac{c}{b} < \frac{9}{4} \\ 2 < \frac{b}{a} < 3 \\ abc = 336 \end{cases}$ т.к. $b > 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} b < c < \frac{9}{4} b \\ \frac{b}{3} < a < \frac{b}{2} \\ abc = 336 \end{cases}$

$\frac{3}{2} b \cdot \frac{b}{3} \cdot b < 336 = a \cdot c \cdot b < \frac{9}{4} b \cdot \frac{b}{2} \cdot b$

$\frac{1}{2} b^3 < 336 < \frac{9}{8} b^3$

$\begin{cases} b^3 > 336 \cdot \frac{8}{9} = 113 \cdot \frac{8}{3} > \frac{904}{3} > 216 = 6^3 \\ b^3 < 672 < 729 = 9^3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 > b > 6 \Rightarrow$ т.к. b – целое $b = 7$ или $b = 8$

Проверим

$b = 7$

$7ac = 336$

$\begin{cases} ac = 48 \\ \frac{7}{3} < a < \frac{7}{2} \\ \frac{21}{2} < c < \frac{63}{4} \end{cases}$ нет целых

$b = 8$

$8ac = 336$

$ac = 42$

$\begin{cases} \frac{8}{3} < a < 4 \Rightarrow a = 3; c = 14 \\ 12 < c < 18 \end{cases}$

Ответ: 3, 8, 14.