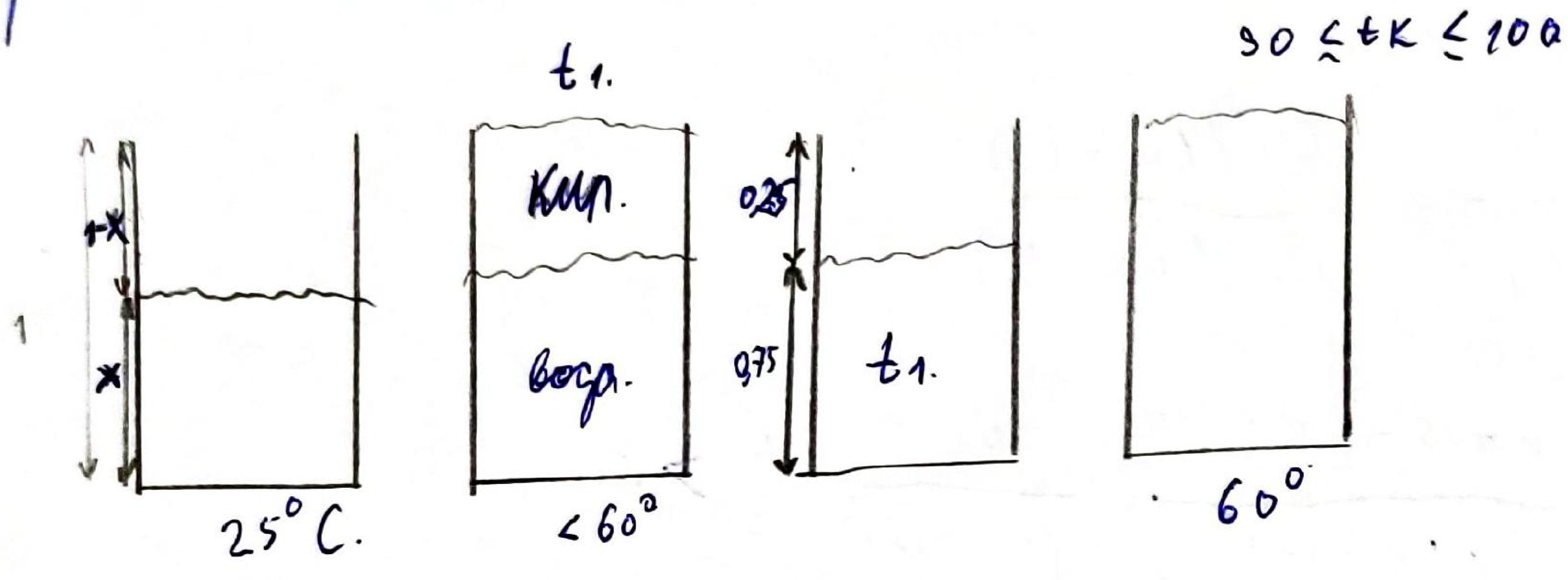
№1



Пусть t_K – температура кипятка. ($90° \leq t_K \leq 100°$)

1 – уровень воды в стакане равный полностью налитому стакану.

x – изначальный уровень воды.

t_1. – температура после доливания в 25° воду кипятка до верхнего уровня.

Составим уравнения:

$$(1-x)(t_K - t_1) = x \cdot (t_1 - 25°) \quad (1)$$

$$0{,}75 \cdot (60° - t_1) = 0{,}25 \cdot (t_K - 60°) \quad (2)$$

из (2)

$$180° - 3t_1 = t_K - 60°$$

$$3t_1 = 240° - t_K$$

$$t_1 = 80° - \frac{t_K}{3}.$$

Подставим t_1 в (1):

$$(1-x)\left(t_K - 80° + \frac{t_K}{3}\right) = x \cdot \left(80° - \frac{t_K}{3} - 25°\right)$$

$$(1-x)\left(\frac{4}{3}t_K - 80°\right) = x \cdot \left(65° - \frac{t_K}{3}\right)$$

$$\frac{4}{3}t_K - 80° = x \cdot \left(\frac{4}{3}t_K - 80° + 65° - \frac{t_K}{3}\right)$$

$$\frac{4}{3}t_K - 80° = x \cdot (t_K - 15°)$$

№ 1 (продолжение)

$$x = \frac{\frac{4}{3}t_к - 80^\circ}{t_к - 15^\circ} = \frac{4 \cdot (t_к - 60^\circ)}{3 \cdot (t_к - 15^\circ)}$$

$$x' = \frac{4}{3} \cdot \frac{t_к - 15 - t_к + 60}{(t_к - 15)^2} = \frac{45}{(t_к - 15)^2} \cdot \frac{4}{3} > 0$$

$$x(90^\circ) = \frac{4 \cdot 30^\circ}{3 \cdot 75^\circ} = \frac{8}{15}.$$

$$x(100^\circ) = \frac{4 \cdot 40^\circ}{3 \cdot 85^\circ} = \frac{32}{51}.$$

Ответ: $\frac{8}{15}$; $\frac{32}{51}$.

№3. $(a+2)x-(1+2a)\cdot\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+a^2+4a-5>0$

$a^2+a\left(x-2\sqrt[3]{x^2}+4\right)+2x-\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-5>0$

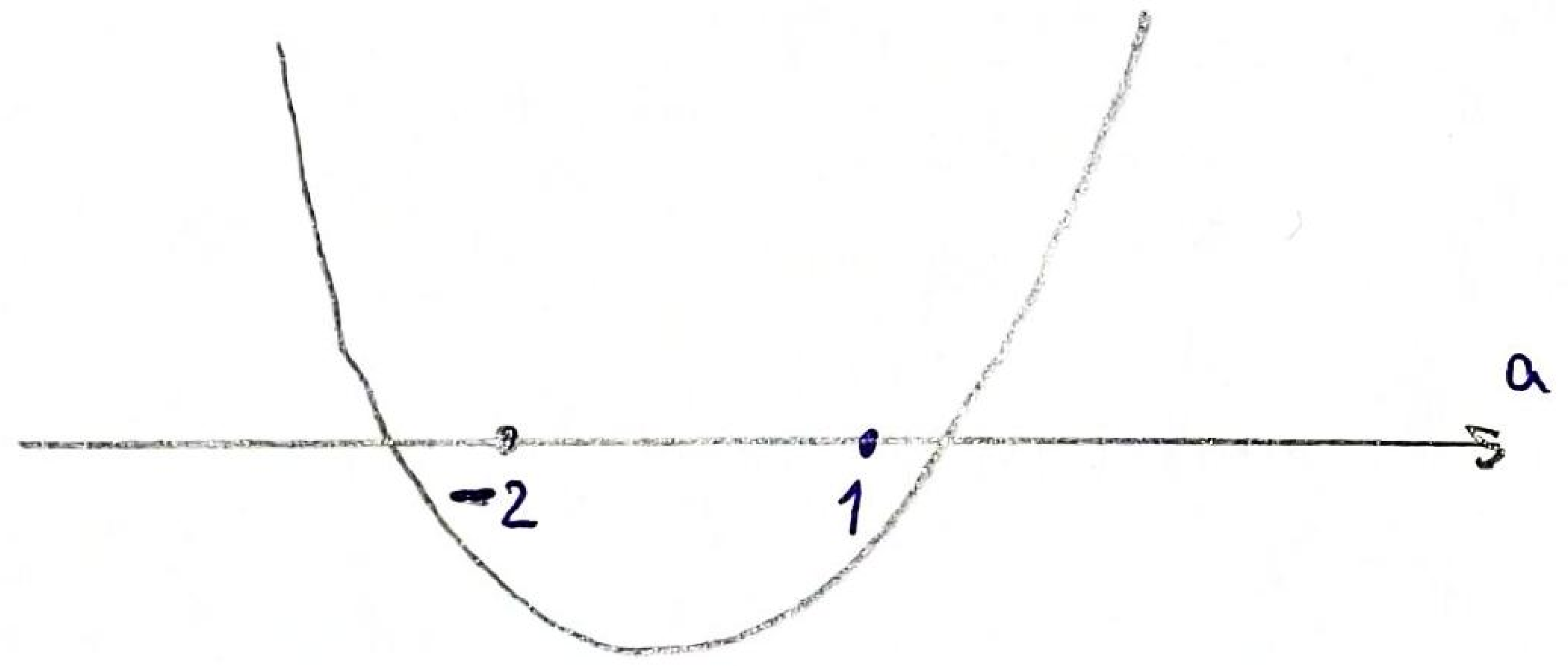
Замена: $t=\sqrt[3]{x}$

$a^2+a\cdot(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5>0$

Введем:

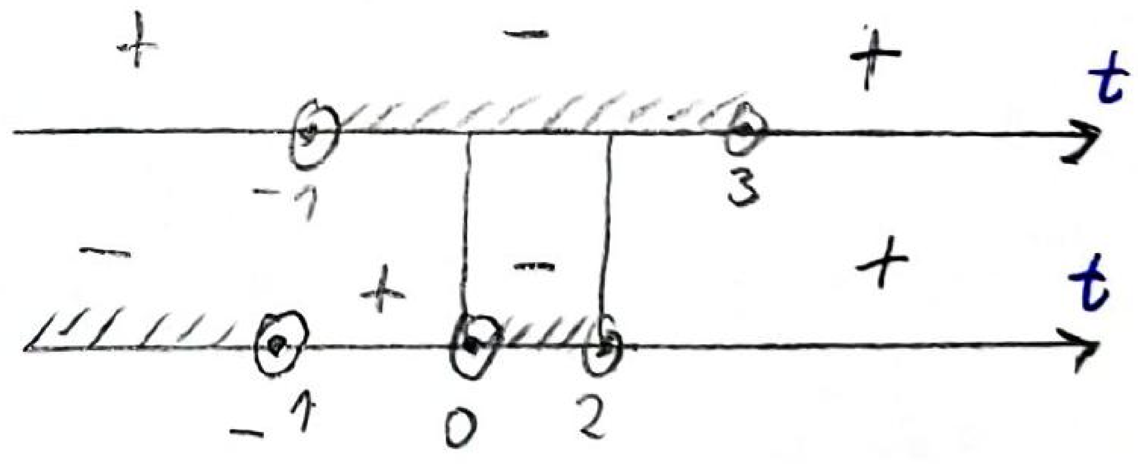
$f(a)=a^2+a(t^3-2t^2+4)+2t^3-t^2-6t-5$ – парабола ветвями вверх

Условие выполняется всегда кроме (подходят все случаи, кроме):



Тогда:

$\begin{cases} f(-2)<0 \\ f(1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-3)(t+1)<0 \\ t(t-2)(t+1)<0 \end{cases} \Rightarrow$



Вспомогательные действия:

$f(-2)=4-2t^3+4t^2-8+2t^3-t^2-6t-5=$
$=3t^2-6t-9=3(t^2-2t-3)$

$f(1)=\cancel{1}+t^3-2t^2+\cancel{4}+2t^3-t^2-6t-\cancel{5}=3t^3-3t^2-6t=$
$=3t(t^2-t-2)=3t(t-2)(t+1)$

№3 продолжение

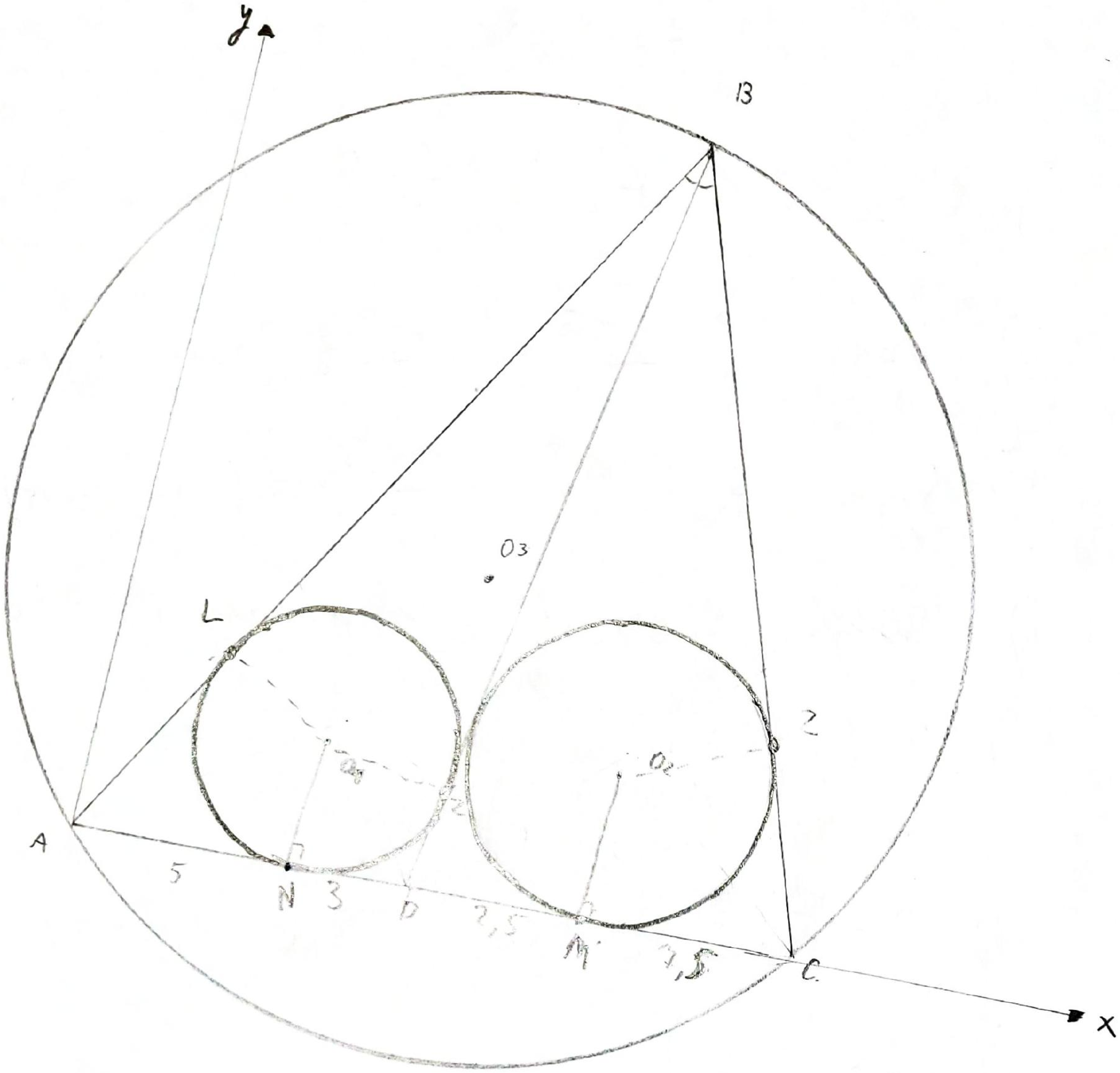
$t \in (0; 2)$

Обратная замена:

$x \in (0; 8)$

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$

№2.



Дано:

$AB = 12$. $BC = 15$.

$AC = 18$.

O_1 и O_2 – центры окруж впис в $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ соотв

O_3 – центр опис окруж в $\triangle ABC$

Найти:

$S_{O_1O_2O_3}$.

1) $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC = 12 \cdot 15 - 8 \cdot 10 = 100 \Rightarrow$
по св-ву бисс (формула длины бисс

$\Rightarrow BD = 10$

1.1) BD - бисс. $\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AD = 8$ $DC = 10$.

1.2) $\left.\begin{aligned} AL + LB &= 12 \\ DN + AN &= 8 \\ DZ + ZB &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $AN = 5$, $ND = 3$

DM и MC – аналог
2,5 и 7,5.

№2 (продолжение)

2) Из т. cos $\cos\angle A = \frac{9}{16}$

$\sin\angle A = \frac{5\sqrt{7}}{16}$

3) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 18\cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{135\sqrt{7}}{4}$

4) $S_{\triangle ABD} = \frac{8}{12}\cdot\frac{135\sqrt{7}}{4} = 15\sqrt{7} = \frac{1}{2}\cdot(12+10+8)r_1 \Rightarrow r_1 = \sqrt{7}$

5) $S_{\triangle BDC} = \frac{10}{18}\cdot\frac{135\sqrt{7}}{4} = \frac{75\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2}(10+10+15)r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{15\sqrt{7}}{14}$

6) Введем систему координат с $A(0;0)$

7) $O_1(5;\sqrt{7})$

$O_2\left(10,5;\frac{15\sqrt{7}}{14}\right)$

8) $R = \frac{abc}{4S} = \frac{12\cdot 15\cdot 18}{4\cdot\frac{135\sqrt{7}}{4}} = \frac{24\sqrt{7}}{7}$

9) $O_3(9;y_3)$

10) $AO_3 = R = \sqrt{81+y_3^2} \Rightarrow y_3 = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

11) $O_3 = \left(9;\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$

12) $O_1O_3 = \sqrt{(9-5)^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{7}-\sqrt{7}\right)^2} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$

13) $\overrightarrow{O_3O_1} = \left\{-4;+\frac{4\sqrt{7}}{7}\right\}$ $\overrightarrow{O_3O_2} = \left\{1,5;\frac{9\sqrt{7}}{14}\right\}$

14) $O_2O_3 = \sqrt{(10,5-9)^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{7}-\frac{15\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \frac{6\sqrt{7}}{7}$

15) $\overrightarrow{O_3O_1}\cdot\overrightarrow{O_3O_2} = 1,5\cdot(-4)+\frac{9\sqrt{7}}{14}\cdot\frac{4\sqrt{7}}{7} =$

$= -6+\frac{18}{7} = \frac{-24}{7} = \frac{8\sqrt{14}}{7}\cdot\frac{6\sqrt{7}}{7}\cdot\cos\alpha = \frac{48\sqrt{2}}{7}\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

№2 (продолжение)

16) $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$

17) $S = \frac{1}{2} \cdot O_1O_3 \cdot O_2O_3 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{14}}{7} \cdot \frac{6\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} =$

$= \frac{12\sqrt{7}}{7}.$

Ответ: $\frac{12\sqrt{7}}{7}.$

№5. Дано: 336 куб.

60 мм 120 мм 180 мм

$1 < \frac{y}{x} < \frac{3}{2}$ и $1 < \frac{z}{y} < \frac{3}{2}$

Очевидно, что z - наибольшая сторона; x - наименьшая, т.е вдоль 180 мм расположена $[\frac{180}{x}]$ кубиков, вдоль 60 мм: $[\frac{60}{z}]$, вдоль 120 мм $[\frac{120}{y}]$

Так как всего кубиков 336, то

$$[\frac{180}{x}] \cdot [\frac{60}{z}] \cdot [\frac{120}{y}] = 336$$

$336 = 3 \cdot 2^4 \cdot 7$

Из неравенст условия:

$$\frac{120}{z} < \frac{120}{y} < \frac{180}{z}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{x}{y} < 1$$

$$\frac{80}{x} < \frac{120}{y} < \frac{120}{x}$$

Число $\frac{180}{x}$ - наибольшее, при этом оно больше $\frac{180}{y}$, т.е больше $\frac{120}{y}$ более чем в $\frac{3}{2}$ раза

Навесив целые части на неравенство получаем:

$$[\frac{60}{y}] \leq [\frac{60}{z}] \leq [\frac{90}{y}]$$

$$[\frac{120}{y}] \leq [\frac{180}{x}] \leq [\frac{180}{y}]$$ т.е $\Rightarrow$

$$\left[\frac{120}{y}\right]\cdot\left[\frac{120}{y}\right]\cdot\left[\frac{60}{y}\right]\le 336\le\left[\frac{90}{y}\right]\cdot\left[\frac{120}{y}\right]\cdot\left[\frac{180}{y}\right]$$

Заметим, что подходит только:

$y\in(15;20)\Rightarrow\left(\left[\frac{120}{15}\right]\right)^2\left[\frac{60}{15}\right]=256\le 336\le\left[\frac{90}{15}\right]\cdot\left[\frac{120}{15}\right]\cdot\left[\frac{180}{15}\right]=$

$=576$

Это будет сохранятся до 20, т.к

$\left[\frac{90}{20}\right]\cdot\left[\frac{120}{20}\right]\cdot\left[\frac{180}{20}\right]=216\le 336$

$y=15\Rightarrow\frac{120}{15}=8$ т.е на $\left[\frac{120}{x}\right]$ и $\left[\frac{60}{z}\right]$ останется

$\frac{336}{8}=42$, что невозможно, но

$y\in[15;20)$: $\left[\frac{120}{y}\right]=7$, т.е на

$\left[\frac{180}{x}\right]\cdot\left[\frac{60}{z}\right]$ останется $\frac{336}{7}=48$
$\Downarrow$
$6\cdot 8$

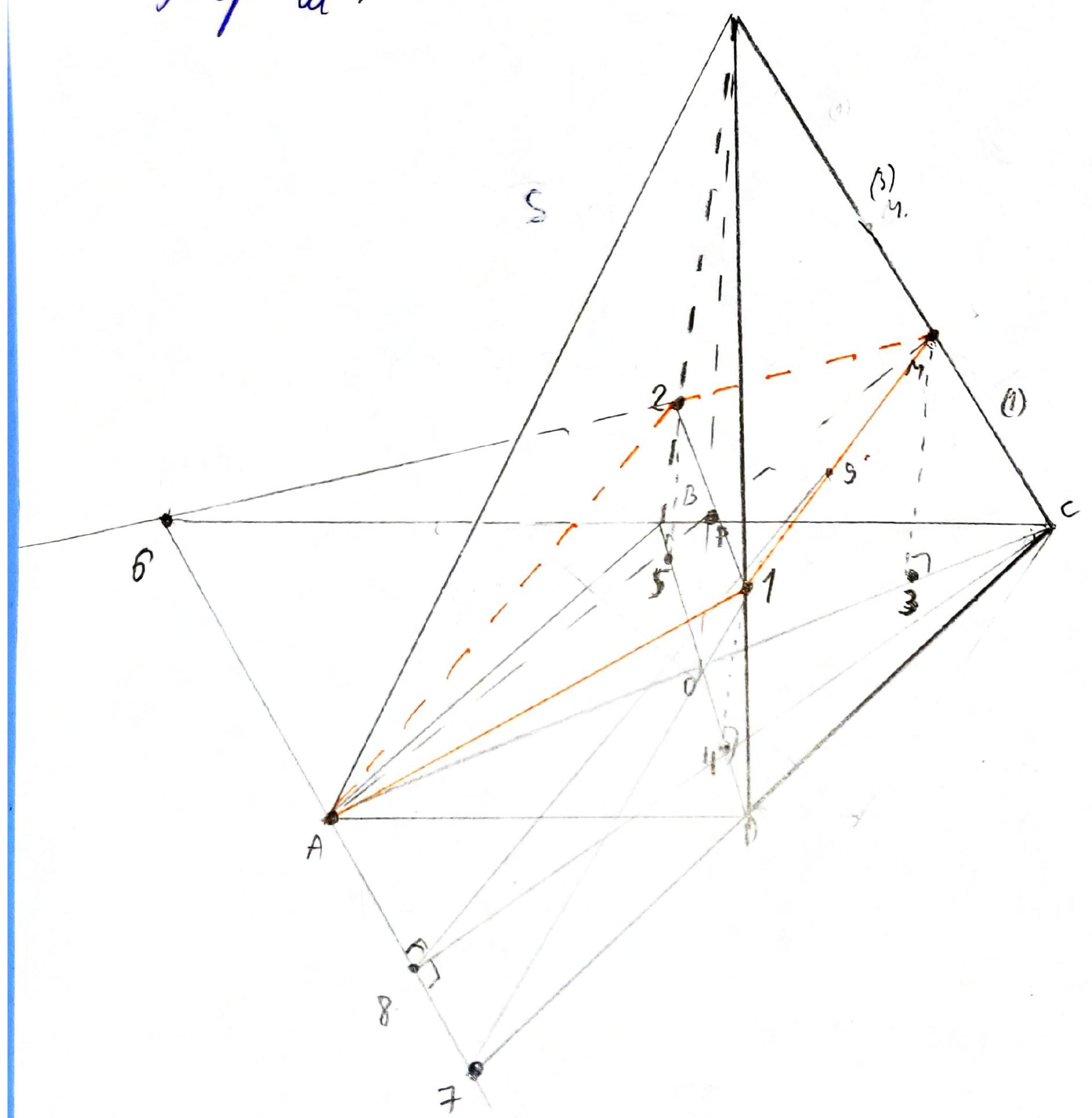
$\left[\frac{180}{x}\right]=16$, $\left[\frac{60}{z}\right]=3$, $z\in(15;20)$
$x\in(11;11{,}25)$
$y\in(15;20)$

Заметим, что среди $y\in(15;20)$ $x\in(11;11{,}25)$
$z\in(15;20)$

можно найти такие x, y, z, подходящие в вопрос и удовлетв условию:
по высоте 7 по ширине 3 по длине 16

Ответ: высота – 7 ширина – 3 длина – 16

Задача №4.



② через P прямую || BD => 1 и 2.

сечение A2M1.

проекция сечения на A435 на основание пирамиды