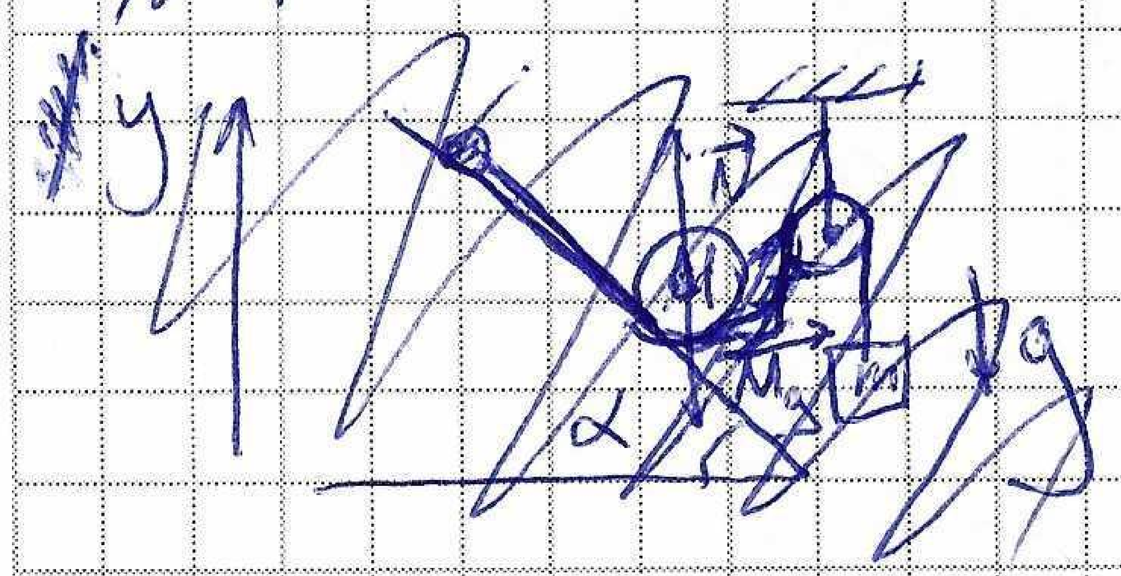
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

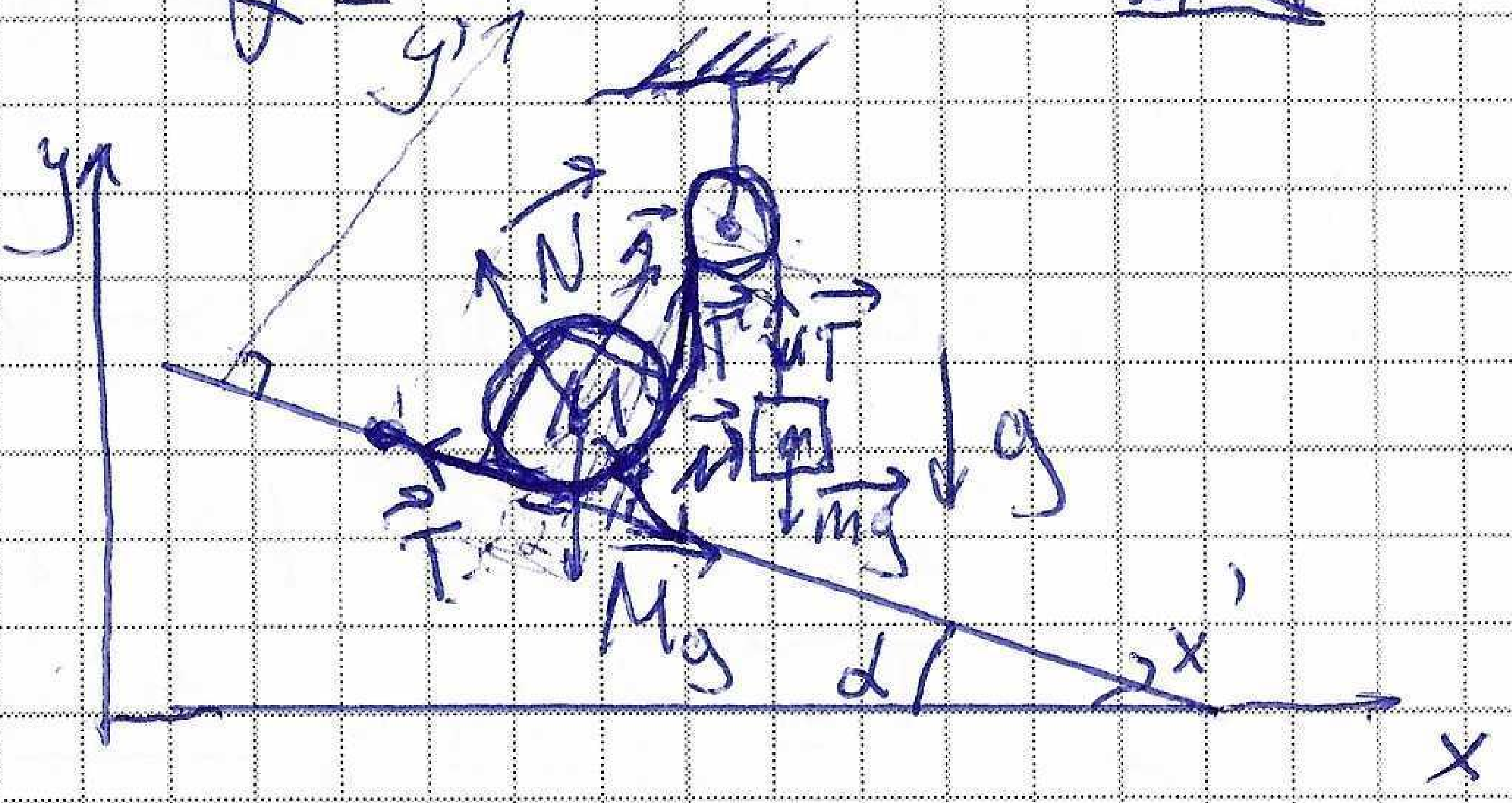
Вариант задания 12 Лист работы 1 из 5

№1



$M = 3m$

$\alpha = ?$



На груз 3:

1) $-mg + T = 0$

$T = mg$

На бревно:

2) $(OY')\ \ -Mg \cdot \cos\alpha + N \cdot \sin\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) = 0$

3) $(OX')\ \ -N \cdot \cos\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) + Mg \cdot \sin\alpha = 0$

На веревку:

4) $(OX')\ \ -N' \cdot \cos\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) - T \cdot \sin\alpha - T = 0$

5) $(OY')\ \ -N' \cdot \sin\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) + \cancel{Mg \cos\alpha} + T \cdot \cos\alpha = 0$

$N = N'$

Можно использовать оборот листа для записи решений

$$N = \cancel{mu}N'$$

$$T = mg$$

$$\begin{cases} n - 3mg\cdot\cos\alpha + N'\cdot\sin\left(45-\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \\ -N'\cdot\cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right) + 3mg\cdot\sin\alpha = 0 \\ N'\cdot\cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right) - T\cdot\sin\alpha - T = 0 \\ -N'\cdot\sin\left(45-\frac{\alpha}{2}\right) + T\cdot\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\beta = 45-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{cases} n - 3mg\cdot\cos\alpha + N'\cdot\sin\beta = 0 \\ -N'\cdot\cos\beta + 3mg\cdot\sin\alpha = 0 \\ N'\cdot\cos\beta - T\cdot\sin\alpha - T = 0 \\ -N'\cdot\sin\beta + T\cdot\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

1) $3mg\cdot\sin\alpha - T(\sin\alpha + 1) = 0$

$$3mg\cdot\sin\alpha \; T(\sin\alpha+1)$$

$$T = \frac{3mg\cdot\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = mg$$

т. е.

$$\frac{3\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = 1$$

$$2\sin\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = 0{,}5$$

$$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Ответ: 30°

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 12 Лист работы 2 из 5

№ 3

$\frac{g_A}{g_B} = 1{,}1, R$

$O_1O_2 = \frac{R}{5}$

$r = ?, \frac{M_{\text{ш}}}{M_{\text{п}}} - ?$

т. А:

$$\begin{cases} F_T = \frac{G M_1 m}{R^2} + \frac{G M_2 m}{\left(R - \frac{R}{5}\right)^2} \\ F_T = m g_A \end{cases}$$

$M_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$M_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

т. В:

$$\begin{cases} F_T = \frac{G M_1 m}{R^2} + \frac{G M_2 m}{\left(R + \frac{R}{5}\right)^2} \\ F_T = m g_B \end{cases}$$

$$g_A = \frac{G \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} + \frac{G \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\frac{16}{25}R^2} = G \frac{4}{3}\pi \rho \left(R + \frac{r^3}{\frac{16}{25}R^2}\right)$$

$$g_B = G \frac{4}{3}\pi \rho \left(R + \frac{r^3}{\frac{36}{25}R^2}\right)$$

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{R + \frac{25 r^3}{16R^2}}{R + \frac{25 r^3}{36 R^2}} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{\cancel{250}\,125\, r^3}{\cancel{16}\,8\, R^2} = R + \frac{275 r^3}{36 R^2}$$

$$\frac{125r^3}{8R^2} = R + \frac{275r^3}{36R^2} \quad | \cdot 36 \cdot 2R^2$$

$$1125r^3 = 72R^3 + 550r^3$$

$$575r^3 = 72R^3$$

$$\frac{r^3}{R^3} = \frac{72}{575}, \quad r^3 = \frac{72}{575} \cdot R^3$$

$$M_a = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 2\rho$$

$$M_п = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho - \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\cdot\rho$$

$$\frac{M_a}{M_п} = \frac{r^3 \cdot 2}{R^3 - r^3} = \frac{\frac{144}{575}R^3}{\frac{503}{575}R^3} = \frac{144}{575} \approx 0{,}25$$

Ответ: 0,25

№ 4

$VT = const$

C_{mV}, $F_{тр} = 0$

P_1, S

$P_{вн} = \frac{mg}{S}$

$\varepsilon_V = \frac{|\Delta V|}{V_1}$, $\Delta V = -V_1 \cdot \varepsilon_V$

$\frac{PV}{T} = const$

$\varepsilon_T = \frac{\Delta T}{T_1}$, $\Delta T = \varepsilon_T \cdot T_1$

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot (V_1 + \Delta V)}{T_1 + \Delta T} =$$

$m = ?$

неизв. V_1, T_1

$$= \frac{P_2 \cdot V_1 \cdot (1 - \varepsilon_V)}{T_1 \cdot (1 + \varepsilon_T)},$$

№4 (прод.1)

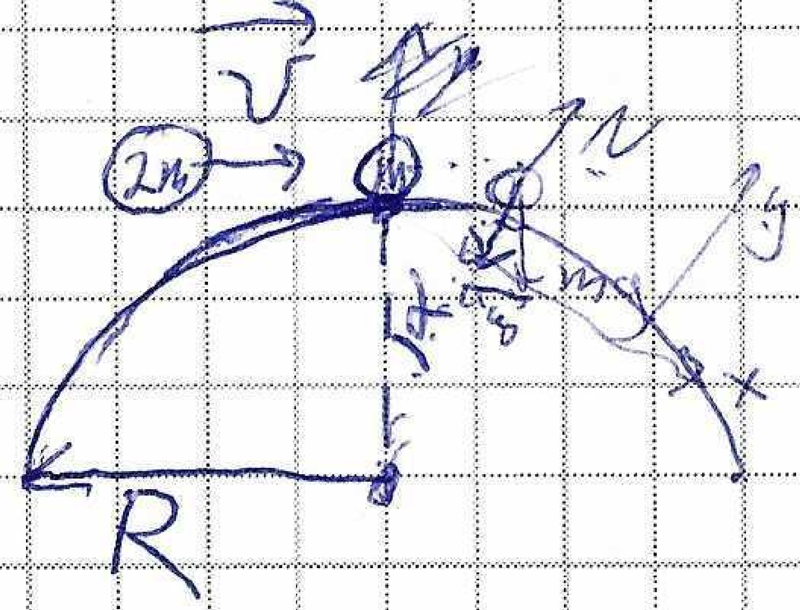
$$P_2 = P_1 \cdot \frac{(1+\varepsilon_T)}{(1-\varepsilon_V)} = P_{вн.} = \frac{mg}{S}$$

$$m = \frac{P_1 \cdot (1+\varepsilon_T) \cdot S}{g \cdot (1-\varepsilon_V)}$$

Ответ: $m = \dfrac{P_1 \cdot (1+\varepsilon_T) \cdot S}{(1-\varepsilon_V) \cdot 9{,}81}$

№5

$m; R; 2m; v = ?$



$$a_ц = \frac{v_1^2}{R}$$

Шарик оторвался $\Rightarrow N = 0$

(OY): $N - mg \sin\alpha = -m a_{цr}$

$$-g \cdot \sin\alpha = -\frac{v_1^2}{R}$$

$$\sin\alpha = \frac{v_1^2}{Rg}$$

Чтобы шарик оторвался сразу: $\sin\alpha = 1 \Rightarrow v_1^2 = Rg$

$$v_1^2 = Rg$$

по з. с. и.

$$2mv_m = mv_1 + 2mv_2, \quad \cancel{p_0 = p_1 + p_2}$$

$$2v = \sqrt{Rg} + 2v_2,$$

$$\cancel{\tfrac{3}{2}Rg} \quad v_2 = v - \frac{\sqrt{Rg}}{2}$$

$$\cancel{\frac{v_1}{2} = \dots}$$

$$\cancel{v_2 = \dots \frac{\sqrt{Rg}}{2}}$$

~~по з. с. э.~~

$$\cancel{\frac{2mv^2}{2} = \frac{2mRg}{2} + \frac{2mv^2}{2}}$$

$$\cancel{2v^2 = Rg + 2v^2}$$

т. к. это упругий удар

$$\cancel{E_{k_0} = E_{k_1} + E_{k_2}} \quad \Delta E_k = 0$$

$$\frac{2mv^2}{2} = \frac{mRg}{2} + \frac{2mv_2^2}{2}$$

$$2v^2 = Rg + 2v_2^2$$

$$v_2^2 = v^2 - v\sqrt{Rg} + \frac{Rg}{4}$$

$$2v^2 = Rg + 2v^2 - 2v\sqrt{Rg} + \frac{Rg}{2}$$

$$2v\sqrt{Rg} = \frac{3Rg}{2}, \quad v = 2,35\sqrt{R}$$

$$v = \frac{3}{4}\sqrt{Rg} \Rightarrow v_2 = 0,5\sqrt{Rg}$$

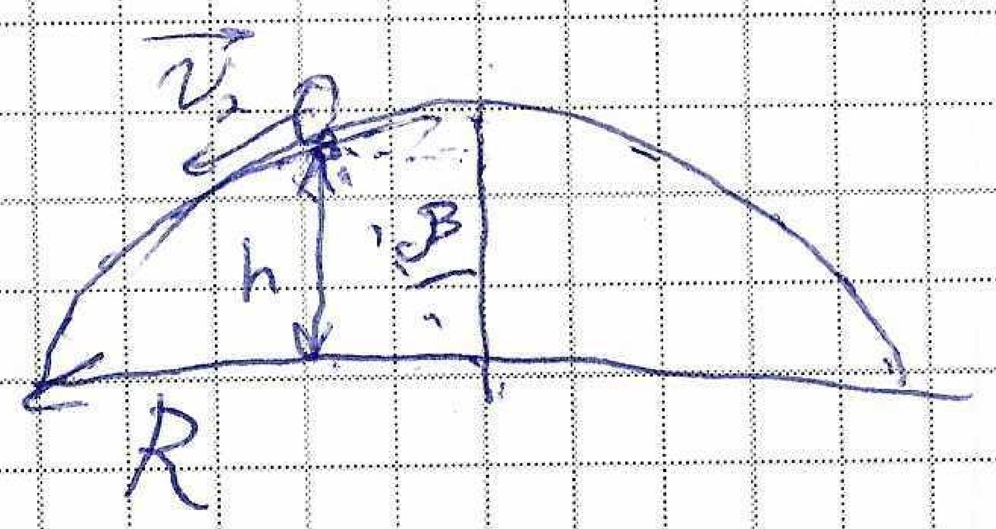
шарик 2m оторвется при $N = 0$: аналогично 1 $\sin\beta = \frac{v_2^2}{Rg} = \frac{1}{4}$

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 12 Лист работы 4 из 5

№5 (прод. 1)



$\sin\beta = \frac{1}{4}$; $\cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\Rightarrow h = R\cdot\cos\beta = \frac{R\sqrt{15}}{4} = 0{,}97R$

Ответ: $v = 2{,}35\sqrt{R}$

$h = 0{,}97R$

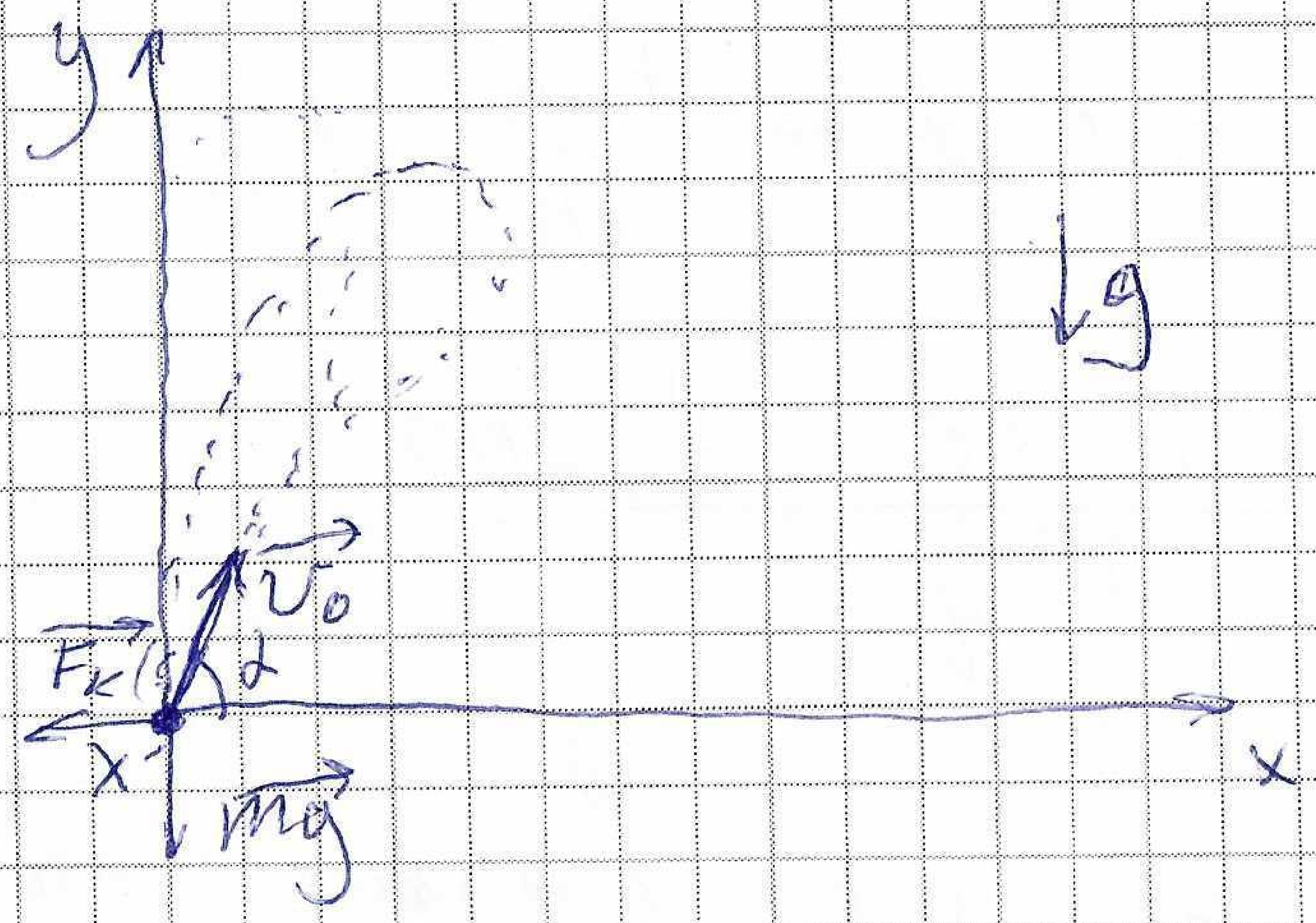
№2

$m; q; v_0; \alpha = 60^\circ$

$E = ?$

$S_{max} = ?$

$F_к = Eq$



Рассм. уск. тела:

(OX): $-F_к = ma_x$

(OY): $-mg = ma_y$

$\Rightarrow a_x = -\frac{Eq}{m}$, $a_y = -g$

$a_x = -\frac{Eq}{m}$

$a_y = -g$

Рассм т. h_{max}:

$v_y(t_в) = 0$

$v_y = v_{0y} + a_y t_в$

$v_0 \cdot \sin\alpha = g t_в$

$t_в = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

Рассм т. $S_{x\,max}$: — в этот момент тело ~~частица~~ развернётся

$v_x(t) = 0$

$v_x = v_{0x} + a_x t_м$

$0 = v_0 \cos\alpha - \frac{Eq}{m} t_м$

$t_м = \frac{v_0 \cos\alpha \cdot m}{Eq}$

$t_п = 2t_м = 2t_в$, т.к. в этот момент оно вернётся в изн. т.

$\frac{\cos\alpha \cdot m}{Eq} = \frac{\sin\alpha}{g}$, $E = \frac{\cos\alpha \cdot m \cdot g}{q \cdot \sin\alpha}$

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 12 Лист работы 5 из 5

N 2 (прод 1)

$$E = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot g}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot q} = \frac{mg \cdot \sqrt{3}}{3q} \Rightarrow a_x = -g \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$E \approx 5{,}66 \cdot \frac{m}{q}$$

$$S_{x\,max} = S_x(t_m) = \frac{0^2 - (v_{0} \cos \alpha)^2}{2a_x} =$$

$$= \frac{v_0^2}{4 \cdot 2 \cdot \frac{g \cdot \sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}\, v_0^2}{8g} \approx 0{,}022\, v_0^2$$

Ответ: $E = 5{,}66 \frac{m}{q}$

$S_{x\,max} = 0{,}022\, v_0^2$