Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 12 Лист работы 1 из 3

Задание 3

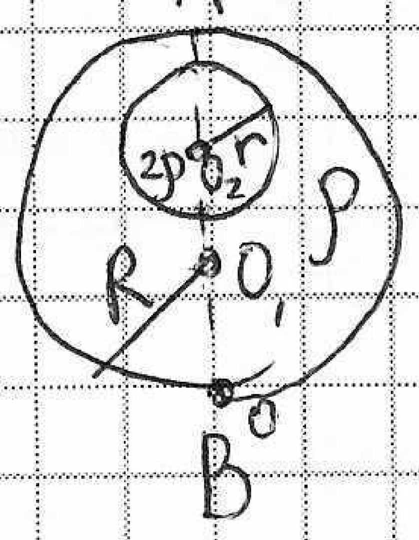
Дано:

$R, \rho, OO_1 = \frac{R}{5}$

$\frac{g_A}{g_B} = 1,1$

$r - ?$ $\frac{m_r}{m_0} - ?$

Решение:



масса однородной части планеты с плотностью ρ:

$m = V\rho$ $m_1 = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho$

масса аномальной сферы:

$m_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 2\rho = \frac{8}{3}\pi r^3 \rho$

Возьмём за ~~точку~~ 0 точку B и посчитаем координату центра масс:

$$X_m = \frac{X_1 m_1 + X_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$X_m = \frac{R m_1 + \left(R + \frac{R}{5}\right) m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{4}{3}R^4\pi\rho - \frac{4}{3}\pi r^3 R\rho + \frac{6}{5}R\cdot\frac{8}{3}\pi r^3\rho}{\frac{4}{3}\pi R^3\rho - \frac{4}{3}\pi r^3\rho + \frac{8}{3}\pi r^3\rho} = \frac{4R^4 - 4r^3R}{4R^3 + 4r^3} + \frac{\frac{48}{5}Rr^3}{4R^3 + 4r^3} \quad (1)$$

$g = \frac{Gm}{X^2}$, где X - расстояние между центрами масс

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{Gm}{X_A^2} \cdot \frac{X_B^2}{Gm} = \frac{X_B^2}{X_A^2}$$

$X_B = X_m$

тк очевидно, что X_m находится между O_1 и O_2

$X_A = -X_m + 2R$

$\frac{g_A}{g_B} = \frac{X_m^2}{(2R - X_m)^2} = 1,1$ $X_m^2 = 1,1(2R - X_m)^2$ $X_m^2 = 4,4R^2 - 2,2RX_m + 1,1X_m^2 \mid \cdot 10$

$10X_m^2 = 44R^2 - 22RX_m + 11X_m^2$

$X_m^2 - 22RX_m + 44R^2 = 0 \quad (2)$

Можно использовать оборот листа для записи решений

Подставим ① в ②

$$\left(\frac{4R^4-4r^3R+\frac{48}{5}Rr^3}{4R^3+4r^3}\right)^2-22R\left(\frac{4R^4-4r^3R+\frac{48}{5}Rr^3}{4R^3+4r^3}\right)+44R^2=0 \;\Big|:R^2$$

$$\left(\frac{4R^{3}-4r^3+\frac{48}{5}r^3}{4R^3+4r^3}\right)^2-22\cancel{R}\left(\frac{4R^3-4r^3+\frac{48}{5}r^3}{4R^3+4r^3}\right)+44=0$$

$$\frac{m_2}{(m_2+m_1)}=\frac{\frac{8}{3}\pi r^3\rho}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho+\frac{8}{3}\pi r^3\rho}=\frac{\frac{8}{3}\pi r^3\rho}{\frac{4}{3}\pi R^3\rho+\frac{4}{3}\pi r^3\rho}=\frac{2r^3}{R^3+r^3}$$

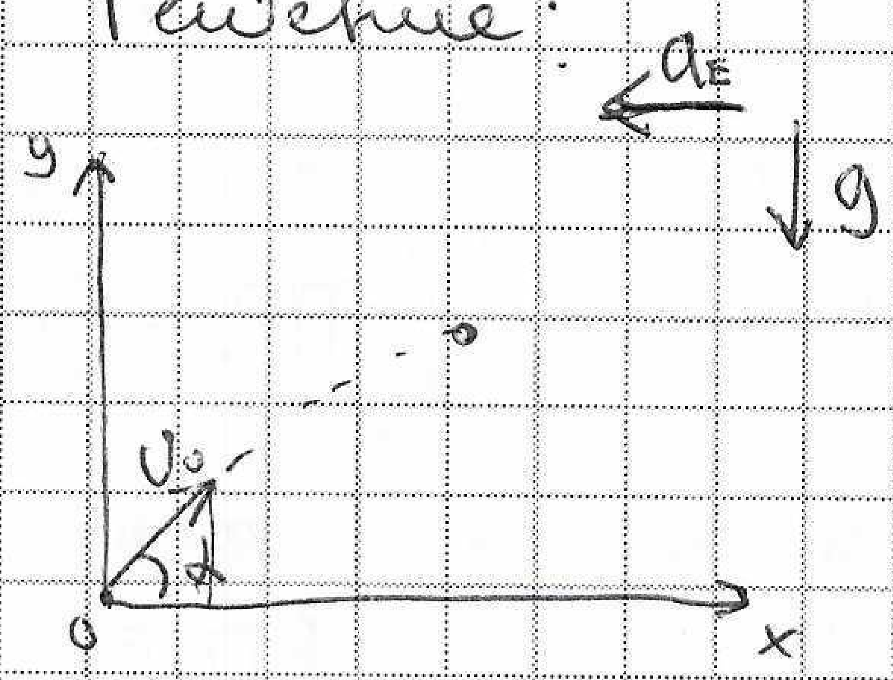
Задание 2

Дано:

$+q,\ g,\ \alpha=60^\circ,\ V_0$

$E-?\ L_x-?$

Решение:



$E=\frac{F_E}{q} \Rightarrow F_E=Eq$

Заряд положительный

$\Rightarrow$ по 2му Закону Ньютона на тело по оси x

$F_E=ma_E$

$\Rightarrow a_E=\frac{F_E}{m}=\frac{Eq}{m}$ ③

Уравнение координаты тела по оси x:

$x=x_0+V_{0x}t+\frac{at^2}{2}$

$x=V_0\cos\alpha t-\frac{a_E t^2}{2}$

Уравнение ~~скорости~~ координаты тела по оси y:

$\cancel{V_y=V_{0y}+at}$ $y=y_0+V_{0y}t+\frac{at^2}{2}$

$\cancel{V_y=V_0\sin\alpha t-gt}$ $y=V_0\sin\alpha t-\frac{gt^2}{2}$

Координату x приравниваем к 0 тк тело возвращается в исходную точку

~~V_y приравниваем к 0~~

Координату y по той же причине приравниваем к 0

$$\begin{cases}V_0\cos\alpha t-\frac{a_E t^2}{2}=0 & |:t,\ t\neq0\\ V_0\sin\alpha t-\frac{gt^2}{2}=0 & |:t,\ t\neq0\end{cases}\qquad \begin{cases}V_0\cos\alpha-\frac{a_E t}{2}=0 & ①\\ V_0\sin\alpha-\frac{gt}{2}=0 & ②\end{cases}$$

Выразим t из ② и подставим в ①

$$t = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$V_0\cos\alpha - \frac{\cancel{2}a_E V_0 \sin\alpha}{\cancel{2}g} = 0$$

выразим a_E:

$$a_E = \frac{g \cancel{V_0} \cos\alpha}{\cancel{V_0}\sin\alpha} = g\cdot ctg\alpha$$

подставим a_E в ③ и выразим E:

$$g\,ctg\alpha = \frac{Eq}{m} \qquad E = \frac{g\cdot ctg\alpha\cdot m}{q} = \frac{\sqrt{3}\,gm}{3q}$$

$$L_x = V_0\cos\alpha\, t_1 - \frac{a_E t_1^2}{2} \quad \text{где } t_1 = \frac{t}{2}$$

$$t_1 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$L_x = \frac{V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} - \frac{g\,ctg\alpha\, V_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} - \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{4g} = \boxed{\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{4\cancel{a}g}}$$

$$\sin 2\cdot 60 = \cos 30$$

$$L_x = \frac{\sqrt{3}V_0^2}{8g}$$

Ответ: $E = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{gm}{q} = \frac{g\cdot ctg\alpha\cdot m}{q}$; $L_x = \frac{\sqrt{3}V_0^2}{8g} = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{4g}$

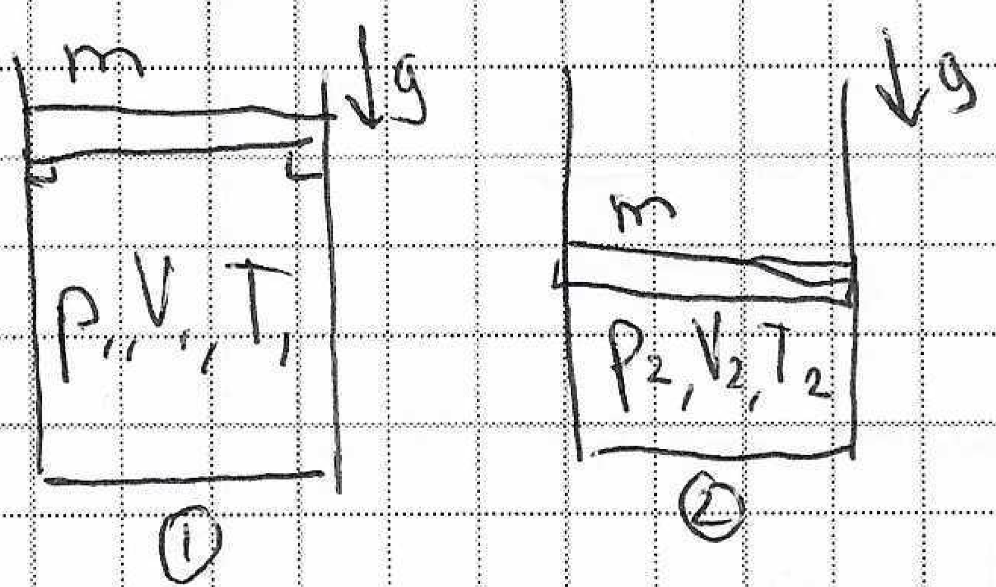
Задача 4

Дано:

c_{mV}, $\varepsilon_V = \frac{|\Delta V|}{V_1}$, $\varepsilon_T = \frac{\Delta T}{T_1}$, S, p_1

m - ?

Решение:



$$\varepsilon_V = \frac{|\Delta V|}{V_1} = \frac{|V_2 - V_1|}{V_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1}$$

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

$$\Rightarrow V_2 = V_1 - \varepsilon_V V_1$$

$$T_2 = \varepsilon_T T_1 + T_1$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона для ситуаций ① и ②:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1$$

$$p_2 V_2 = \nu R T_2$$

поделим друг на друга

$$\frac{p_1V_1}{V_2p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{p_1V_1T_2}{T_1V_2} = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_1-\varepsilon_V V_1} \cdot \frac{\varepsilon_T T_1 + T_1}{T_1}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{1}{1-\varepsilon_V} \cdot \frac{\varepsilon_T+1}{1} = p_1 \frac{\varepsilon_T+1}{1-\varepsilon_V}$$

в ситуации ② давление поршня равно давлению газа тк установл. равновесие

$$p_п = \frac{mg}{S}$$

$$p_2 = p_п$$

$$p_1\frac{\varepsilon_T+1}{1-\varepsilon_V} = \frac{mg}{S}$$

$$\Rightarrow m = \frac{p_1S(\varepsilon_T+1)}{g(1-\varepsilon_V)}$$

Ответ: $\frac{p_1S(\varepsilon_T+1)}{g(1-\varepsilon_V)} = m$

Задание 1

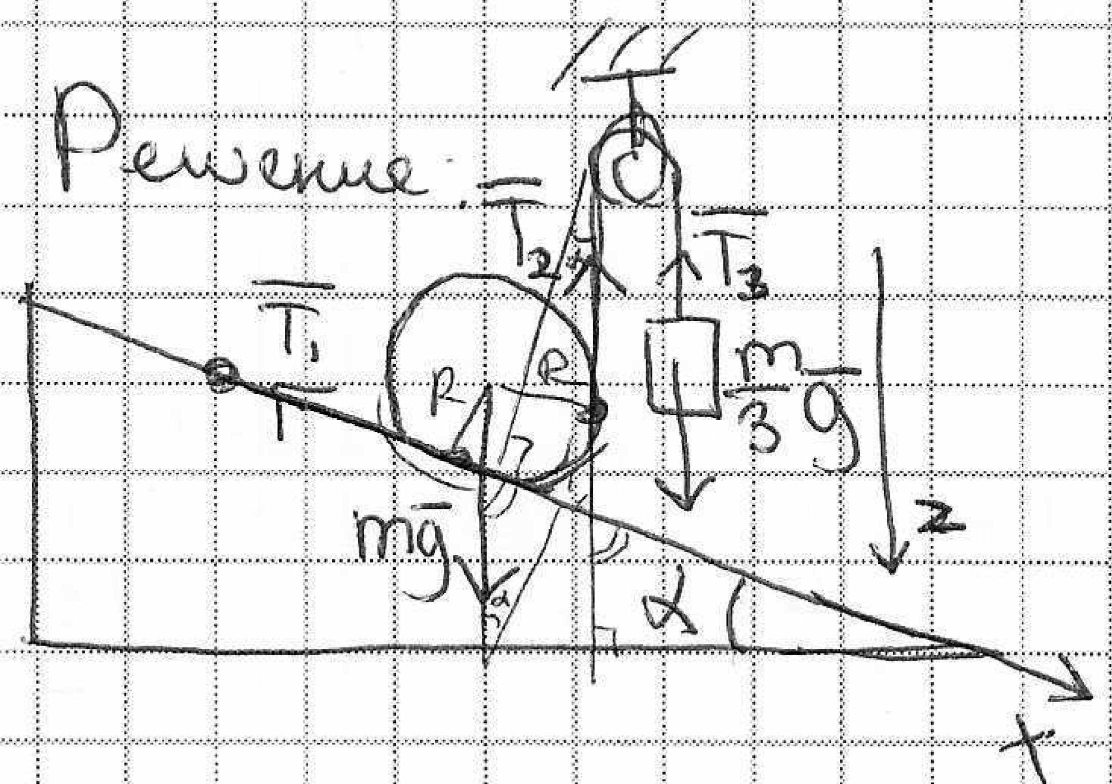
Дано:

$m_1 = m$

$m_2 = \frac{m}{3}$

$\alpha - ?$

Решение:



Тк массой нити пренебрегаем сила T на всех её частях равна: $T_1 = T_2 = T_3 = T$

Второй закон Ньютона:

$$\bar{a}m = \sum \bar{F}$$

Запишем его для груза по оси z:

$$0 = \frac{mg}{3} - T \quad ①$$

Запишем 2й зак. Н. для бревна по оси x:

$$0 = T + T\sin\alpha - mg\sin\alpha \quad ②$$

Выразим T из ①, и подставим в ② и выразим $\sin\alpha$:

$$T = \frac{mg}{3}$$

$$0 = \frac{mg}{3} + \frac{mg}{3}\sin\alpha - mg\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{mg}{3} : \left(mg - \frac{mg}{3}\right) = \frac{mg}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2mg} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Ответ: 30°

Вариант задания 12 Лист работы 3 из 3

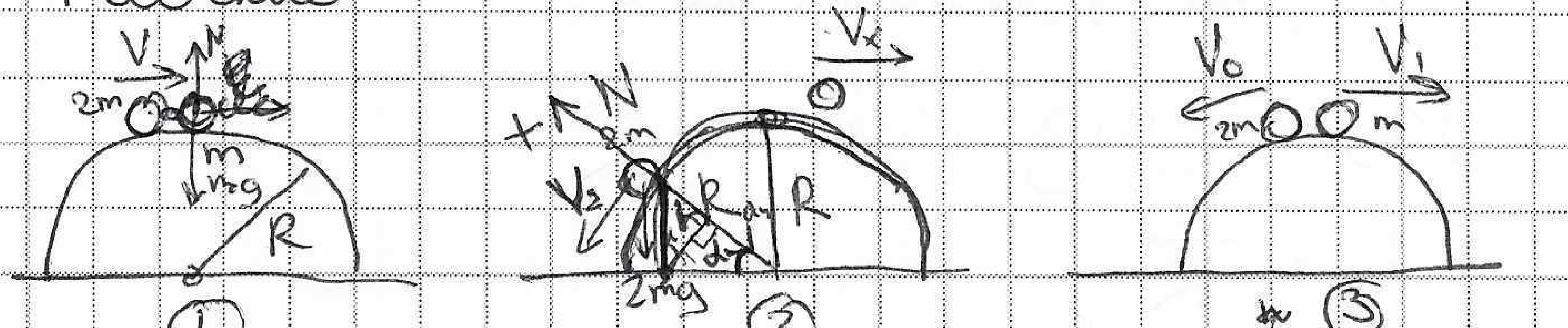
Задание 5

Дано:

R, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$

$V - ?$ $h - ?$

Решение



① перед ударом

② отрыв шарика массой 2m

③ после удара

ЗСИ для удара шариков:

$$2mV = mV_1 + 2mV_0 \quad ④$$

чтобы V была минимальна, она должна быть направлена горизонтально, а V_1 и V_0 должны быть минимальны (см. из ЗСИ)

ЗСЭ:

$$\frac{2mV^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{2mV_0^2}{2}$$

$$2V^2 = V_1^2 + 2V_0^2 \quad ⑤$$

Найдём V_1

По второму закону Ньютона:

$$am = mg - N$$

Если шарик отрывается от купола, то $N = 0$

Можно сказать, что $am \geq mg$, где a - центр. уск. $a_ц = \frac{V_1^2}{R}$

$\Rightarrow$ V_1 минимально при $am = mg$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{R} m = mg \qquad \frac{V_1^2}{R} = g \qquad V_1 = \sqrt{gR}$$

Выразим из ④ V_0 и подставим в ⑤:

$$V_0 = \frac{2mV - mV_1}{2m} = \frac{2V - V_1}{2} \quad ⑥$$

$$2V^2 = V_1^2 + 2\left(\frac{2V - V_1}{2}\right)^2$$

$$2V^2 = gR + 2\,\frac{4V^2 - 4VV_1 + V_1^2}{4}$$

$$4V^2 = 2gR + 4V^2 - 4VV_1 + V_1^2$$

$$\cancel{4V^2} = 2gR + \cancel{4V^2} - 4V\sqrt{gR} + gR$$

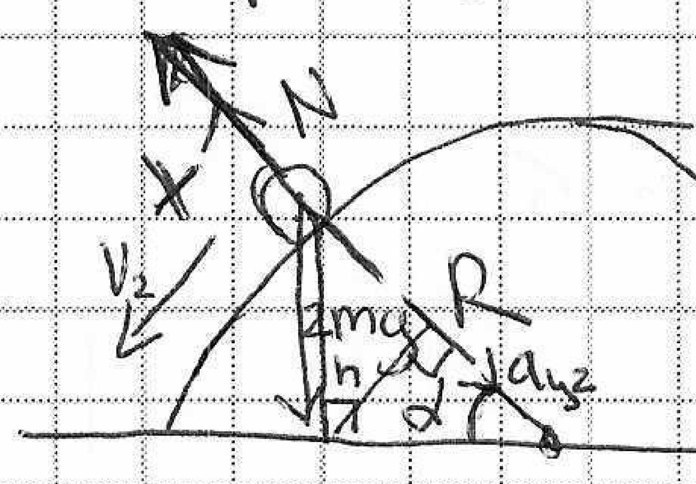
$$3gR - 4V\sqrt{gR} = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{3gR}{4\sqrt{gR}} = \boxed{\frac{3}{4}\sqrt{gR}}$$

Найдём V_0, подставив V_1 и V в ⑥:

$$V_0 = \frac{2\cdot\frac{3}{4}\sqrt{gR} - \sqrt{gR}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{gR}$$

Шарик массой $2m$ оторвётся, когда $2a_{ц}m$ превысит равнод. всех сил при $N=0$ (по 2му з. Ньютона)



$$\sin\alpha = \frac{h}{R}$$

2й закон Ньютона на ось x:

$$2a_{ц2}m = mg\sin\alpha = mg\frac{h}{R}$$

$$a_{ц2} = \frac{V_2^2}{R}$$

Найдём V_2^2 из ЗСЭ (от 3 до 2 сит.):

0 потенц. энергии у основания купола

$$\frac{2mV_0^2}{2} + 2mgR = \frac{2mV_2^2}{2} + 2mgh$$

$$V_0^2 + 2gR = V_2^2 + 2gh$$

$$V_2^2 = V_0^2 + 2gR - 2gh = \frac{gR}{16} + 2gR - 2gh = \frac{33gR}{16} - 2gh$$

Подставим всё и найдём h:

$$2\cancel{m}\left(\frac{33\cancel{g}}{16} - \frac{2gh}{R}\right) = \cancel{m}g\frac{h}{R}$$

$$\frac{33}{8} - \frac{4h}{R} = \frac{h}{R}$$

$$33R - 32h = 8h$$

$$33R = 40h$$

$$h = \boxed{\frac{33}{40}R}$$

Ответ: $V = \frac{3}{4}\sqrt{gR}$; $h = \frac{33}{40}R$