**Государственное бюджетное образовательное учреждение**

**Инженерная школа №1581**

**Проект по математике на тему:**

# «Точка Шиффлера»

Выполнила: Цыганкова Мария Сергеевна,
ученица 9Л класса школы №1581

Научный руководитель:
Агафонов Виталий Олегович,
учитель математики
Инженерной школы №1581

**Москва, 2024**

## Содержание



## Введение

Существуют такие точки (центры), положение которых, не изменяется от перестановки вершин треугольника. Обычно эти точки делят отрезки, на которых лежат, в некотором отношении. По таким свойствам их обычно и замечают. Примеры таких центров: центр тяжести, точка Жаргонна, точка Нагеля и другие. Одной из таких точек является точка Шиффлера. Ее свойства и доказательства не проходят в школьной программе, но она обладает уникальными свойствами, которые можно использовать при решении геометрических задач.

**Цель** – доказать теорему и сделать ее более доступной для понимания в школьной программе.

**Задачи**:

- Изучить, проанализировать материалы к доказательству теоремы «Точка Шиффлера»,

- Создать презентацию для учащихся восьмых и девятых классов, с целью просвящения, по теме «Точка Шиффлера»,
- Ознакомиться с функционалом системы Geogebra,
- Придумать задачи с использованием данной теоремы.

## Основное содержание

Обычно школьникам известно только 5-10 центров (центр тяжести, центры вписанной и описанной окружности, ортоцентр, а также для любознательных точка Жаргонна, точка Нагеля и некоторые другие), но на деле их существует около полутора тысяч. Точка Шиффлера занимает 21-ое место и определенна чисто геометрически (многие центры определяются скорее алгебраически нежели геометрически).

Сформулируем  следующую теорему.

Пусть  **I** – центр вписанной окружности треугольника ABC (рис. 1). Тогда прямые Эйлера (прямые на которых лежат точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанной окружности) треугольника треугольников IAB, BIC, CIA и ABC пересекаются в одной точке – точке Шиффлера (Sh).

Введем следующие обозначения:

**O** – центр описанной окружности

**M** – т. пересечения медиан (треугольника ABC)

**$M_2$** – – т. пересечения медиан (треугольника AIC)

**P** – середина дуги AC (без tjxrb B)

**$B_0$** – середина AC

**Sh** – точка Шиффлера, точка пересечения прямых Эйлера треугольников (ABC, AIC)

Идея доказательства:

Прямые MO и M2P пересекаются в точке Sh. Рассмотрим треугольник $OMB_0$. Прямая Эйлера треугольника AIC пересекает треугольник $OMB_0$ в точках Sh и K (точка K лежит на стороне MB0).

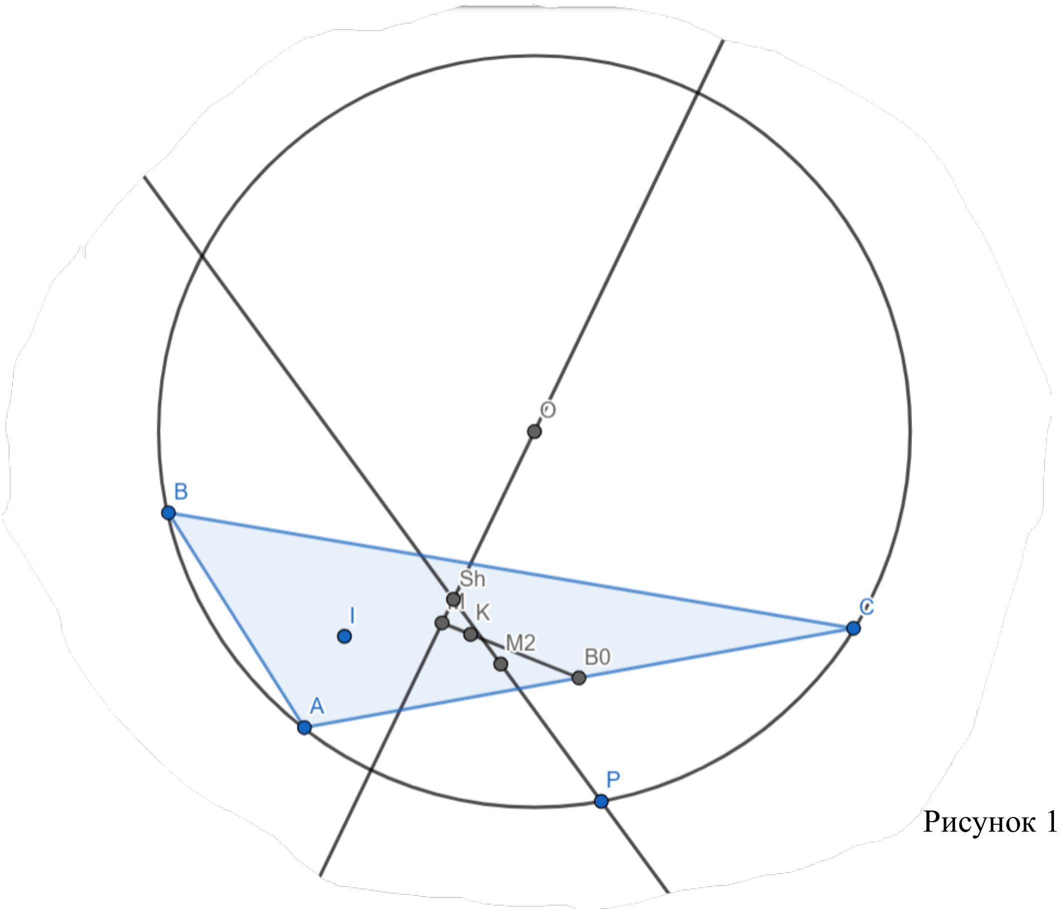


Рисунок 1.

Данная точка нужна для того чтобы записать теорему Менелая (треугольника $OB_0M$) и найти отношение CSh : ShO, для этого нужно также записать теорему Менелая для треугольника $BIB_0$ и точек P, $M_2$, K.

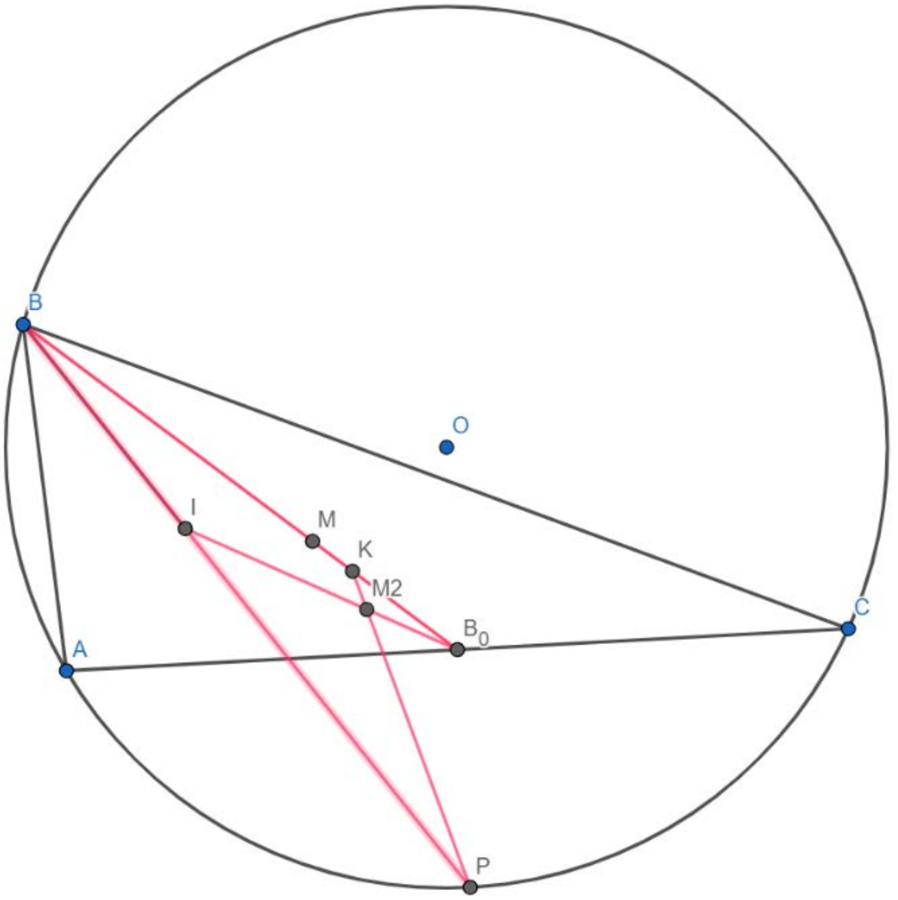


Рисунок 2.

Доказательство:

1.Рассмотрим треугольник $BIB_0$ и точки K, P, I и запишем относительно них отношение по теореме Менелая (рис.2):

$$BK/KB_0*B_0M_2\ /\ M_2\ I*IP/PB=1$$

Так как точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2/1 от вершины, следовательно

$$B_0M_2/M_2I=1/2,\ \text{отсюда}$$

$$BK/KB_0=2PB/I.$$

Теперь пересчитаем отношение $BK/KB_0$ в отношении $MK/KB_0$,

Используя то, что $BB_0$ - медиана, а M - точка пересечения медиан треугольника ABC, следовательно: $MB/MB_0=2/1$

$BK/KB_0 = (2MB_0 + MK)/KB_0 = (2*(MK+KB_0)+MK)/KB_0 = 3(MK/KB_0)+2$

Отсюда,

$3(MK/KB_0) = (BK/KB_0)-2 = 2(PB/PI)-2 = 2(PB-IP)/IP = 2BI/IP$,

обобщим это и получим $(MK/KB_0) = 2BI/3IP$.

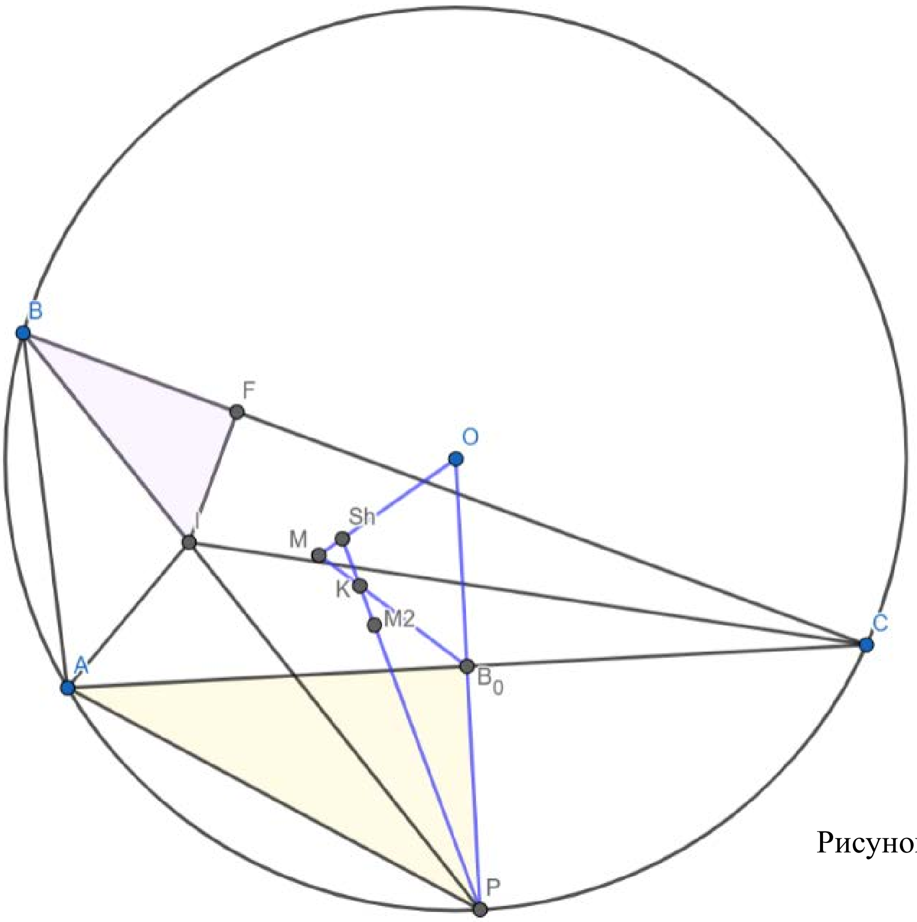


Рисунок 3.

2.Рассмотрим треугольник $OMB_0$ и точки Sh, K, P I и запишем относительно них отношение по теореме Менелая (рис. 3):

$MSh/Sh0*KB_0/MK*PO/B_0P=1$, OP – R радиус описанной окружности

$MSh/ShO = PB_0/OP*MK/KB_0 = PB0/OP*2/3*BI/IP = 2/3R*BI*PB_0/PI$.

По лемме Мансиона: IP=AP.

Рассмотрим треугольник $AB_0P$, он прямоугольный, углы $PAB_0$ и $PBC$ опираются на одну и ту же дугу $PC$, следовательно они равны, следовательно их синусы тоже равны,

$\sin B_0AP = \sin CBP = \sin B/2 = B_0P/AP$

Из треугольника $ABC$ следует, что $BI * \sin B/2 = r$

Получаем:

$MSh/ShO = 2/3R * BI * PB_0/PI = 2/3R * BI * PB_0/PA = 2/3R * BI * \sin B/2 = 2r/3R$.

## Итоги и выводы:

Положение отрезка OM не зависит от порядка вершин треугольника. Тогда прямые Эйлера треугольников AIC, AIB, CIB и ABC попарно пересекутся на нем и поделят в отношении 3R:2r. Из чего можем сделать вывод, что все эти прямые пересекутся в одной точке. Это и есть точка Шиффлера.

## Заключение

Еще двадцать лет назад во многих школах теоремы Чевы и Менелая практически не затрагивали, и задачи на эти темы редко встречались на выпускных экзаменах, но уровень школьной геометрии постепенно повышается. Кто знает, может и точке Шиффлера найдется место в решении некоторых задач? В будущем мы планируем придумать задачи, использующие данную теорему, и представить их Вам.