

Олимпиада Шаг в Будущее по профилю Инженерное дело

Регистрационный номер: №22575

Секция: «Космические аппараты и ракеты-носители» СМ1

Сравнение физической и математической модели ракеты на твердом топливе.

Автор: Иванова Татьяна Павловна

ФМШ при МГТУ им. Баумана

Научный руководитель:

Товарных Геннадий Николаевич

Канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Москва - 2024

Содержание

Введение.....	2
Актуальность работы.....	2
Математическая модель.....	3
Вертикальный старт на небольшую высоту с учётом аэродинамического сопротивления.....	4
Предварительные расчетные данные.....	9
Физическая модель.....	10
Конструкция ракеты.....	10
Бортовая электроника.....	10
Электронные компоненты.....	10
Программное обеспечение.....	11
Система спасения.....	12
Пуск.....	13
Перспективы и результаты.....	14
Приложение.....	15
График предварительных результатов полета.....	15
Прототип программы.....	15
3D модель ракеты.....	15
Чертеж ракеты.....	16
Программа «Система спасение».....	16
Схема подключения.....	17
Фото с пуска.....	18
Литература.....	19

Введение

Актуальность работы

Физическая модель полета самодельной ракеты на РДТТ позволяет провести тесты на макете ракеты в реальных условиях, анализировать поведение ракеты в полете. Физическая модель позволяет получить реальные данные и проверить их соответствие изначальным ожиданиям.

Математическая модель полета самодельной ракеты на РДТТ, основывается на математических уравнениях и вычислительных методах. Математическая модель может учитывать различные факторы, такие как масса ракеты, силы сопротивления воздуха и другие параметры. Она позволяет провести теоретические расчеты и оптимизировать параметры ракеты для достижения наилучших результатов.

Сравнение физической и математической моделей полета самодельной ракеты на РДТТ является актуальным, поскольку оно позволяет:

1. Проверить точность и достоверность математической модели, сравнивая ее результаты с измеренными физическими данными.
2. Уточнить и скорректировать параметры модели для достижения более точных прогнозов и результатов.

Таким образом, сравнение физической и математической моделей полета самодельной ракеты на РДТТ является неотъемлемой частью процесса разработки и испытаний, обеспечивая более точные и безопасные результаты.

Результаты

Разработанная математическая модель (см. приложение «Прототип программы»). может быть использована для расчета запуска моделей ракет. Создана модель ракеты (см. приложение «Модель ракеты») и осуществлен запуск. В рамках проекта предлагается инструкция по созданию модели ракеты , модели для печати на 3д принтере и универсальная программа для расчетов. Результаты проекта могут быть использованы ракетомоделистами при создании их прототипов.

Продукты проекта: 1) Модель ракеты 2) Математическая модель 3) Инструкция по сборке 4) Программа для расчета предполагаемых результатов

Математическая модель.

Математическая модель проекта представлена в формате программы в Excel. Она учитывает:

- Силу сопротивления воздуха.
- Изменение массы ракеты при реактивном движении.

Математическая модель получается с помощью численного

интегрирования. Для нахождения $\Delta t < \frac{BV_{\max}}{M_{\min}}$, где $V_k = V_{\max}$ - скорость ракеты после отработки двигателя без учета изменения массы ракеты.

Вертикальный старт на небольшую высоту с учётом аэродинамического сопротивления.

Аналитическое нахождение скорости ракеты после отработки двигателя.

Обозначим переменные:

$$M_0 = 370 \text{ г} = 0.37 \text{ кг}$$

$$M_T = 54 \text{ г} = 0.054 \text{ кг}$$

$$F_p = I \frac{M_t}{t_p} = 23 \text{ Н}$$

$$t_k = 1.2 \text{ с}$$

$$c_x = 0.2 \text{ (Для угла атаки } \alpha = 0^\circ)$$

$$S = \pi r^2 = 3.14 \times (0.02 \text{ м})^2 = 1.256 \times 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$ma = F_p - M_0 g - F_{\text{аэр}} \quad m \frac{dV}{dt} = F_p$$

$$F_{\text{аэр}} = c_x \frac{\rho V^2}{2} S = BV^2$$

$$m \frac{dV}{dt} = F_p - M_0 g - BV^2 = A - BV^2$$

Обозначим: $A = F_p - Mg$

$$A = F_p - M_0 g = 23 \text{ Н} - \left(0.37 \text{ кг} \times 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = 19.374 \text{ Н}$$

Обозначим: $B = c_x \frac{\rho S}{2}$

$$B = c_x \frac{\rho S}{2} = 0.2 \frac{1.288 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \times 1.256 \times 10^{-3} \text{ м}^2}{2} = 1.617728 \times 10^{-4} \frac{\text{кг}}{\text{м}}$$

$$mdV = (A - BV^2)dt$$

$$dt = \frac{mdV}{(A - BV^2)}; \quad A = -(Mg - F_p)$$

$$dt = \frac{mdV}{B(\frac{A}{B}-V^2)}$$

$$dt\left(\frac{B}{m}\right) = \frac{mdV}{B(\frac{A}{B}-V^2)} \quad ; \quad C = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

Проинтегрируем полученное соотношение.

$$\int_0^{V_k} \frac{dV}{C^2 - V^2} = \left(\frac{B}{m}\right) \int_0^{t_k} dt$$

$$\left[\frac{1}{2C} \ln \left| \frac{C+V}{C-V} \right| \right]_0^{V_k} = \left(\frac{B}{m}\right) [t]_0^{t_k}$$

$$\frac{1}{2C} \ln \left| \frac{C+V_k}{C-V_k} \right| - \frac{1}{2C} \ln \left| \frac{C+0}{C-0} \right| = \left(\frac{B}{m}\right) (t_k - 0)$$

$$\frac{1}{2C} \ln \left| \frac{C+V_k}{C-V_k} \right| = \left(\frac{B}{m}\right) t_k$$

$$\ln \left| \frac{C+V_k}{C-V_k} \right| = \left(\frac{2CB}{m}\right) t_k \quad ;$$

$$B = c_x \frac{\rho S}{2} > 0 \quad ; \quad A = F_p - M_0 g > 0$$

Обозначим: $C = \sqrt{\frac{A}{B}}$

$$C = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{19.374 \text{ Н}}{1.617728 \times 10^{-4} \frac{\text{кг}}{\text{м}}}} \approx 346.06438 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Обозначим: $K = e^{\left[\left(\frac{2CB}{m}\right)t_k\right]} = \frac{C+V_k}{C-V_k}$

$$K = e^{\left[\left(\frac{2CB}{m}\right)t_k\right]} = e^{\left[\left(\frac{2 \times 346.06438 \frac{\text{м}}{\text{с}} \times 1.617728 \times 10^{-4} \frac{\text{кг}}{\text{м}}}{0.37 \text{ кг}}\right)\right] 1.2 \text{ с}} \approx 1.4378$$

$$KC - KV_k = C + V_k$$

$$(K - 1)C = V_k(K + 1)$$

$$V_k = \frac{|(K-1)|C}{(K+1)} = \frac{|(1.4378-1)| \times 346.06438 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{(1.4378+1)} \approx 62.16946 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$V_k = V_{max}$$

Численное нахождение скорости и высоты подъёма

$$V_{n+1} = V_n + \left(\frac{F_p}{M_n} - g - \frac{B}{M_n} \cdot V_n^2 \right) \cdot \Delta t \quad (1)$$

Здесь v_n - скорость в предыдущий момент времени,

v_{n+1} - скорость в последующий момент времени.

Проводим последовательные вычисления при заданном

$$\Delta t = \frac{BV_{max}}{2M_{min}} \approx 0.02 \text{с} \text{ (см. приложение «Прототип программы») до тех}$$

пор, пока двигатель работает $F_p \neq 0$:

$$V_1 = V_0 + \left(\frac{F_p}{M_0} - g - \frac{B}{M_0} \cdot V_0^2 \right) \cdot \Delta t$$

$$V_2 = V_1 + \left(\frac{F_p}{M_1} - g - \frac{B}{M_1} \cdot V_1^2 \right) \cdot \Delta t$$

$$V_3 = V_2 + \left(\frac{F_p}{M_2} - g - \frac{B}{M_2} \cdot V_2^2 \right) \cdot \Delta t$$

.....

Пока работает двигатель масса ракеты изменяется:

$$M_{n+1} = M_n - \left(\frac{M_t}{t_k} \right) \Delta t \quad (2)$$

Проводим последовательные вычисления при заданном

$$\Delta t = \frac{BV_{\max}}{2M_{\min}} \approx 0.02\text{с} \text{ (см. приложение «Прототип программы»)} \text{ до тех}$$

пор, пока $M_{\text{т}} \neq 0$:

$$M_1 = M_{\text{т}} - \left(\frac{M_{\text{т}}}{t_k} \right) \Delta t$$

$$M_2 = M_1 - \left(\frac{M_{\text{т}}}{t_k} \right) \Delta t$$

$$M_3 = M_1 - \left(\frac{M_{\text{т}}}{t_k} \right) \Delta t$$

.....

Проведем расчет высоты подъема пока $F_p \neq 0$.

$$h_{n+1} = h_n + V_{n+1} \Delta t \quad (3)$$

$$h_1 = h_0 + V_1 \Delta t$$

$$h_2 = h_1 + V_2 \Delta t$$

$$h_3 = h_2 + V_3 \Delta t$$

.....

Численно находим максимальную высоту подъема. $F_p = 0$; $M_{\text{т}} = 0$

$$V_{n+1} = V_n - \left(g + \frac{B}{M_n} V_{n-1}^2 \right) \Delta t = 0$$

$$h_{k+1} = h_k + V_{k+1} \Delta t$$

$$h_{n+1} = h_n + \left[V_n - \left(g + \frac{B}{M_n} V_{n-1}^2 \right) \Delta t \right] \Delta t$$

.....

Пока $V_{k+1} \neq 0$

Рассмотрим падение вниз из точки максимального подъема до $h_{max} - \Delta h$, где $\Delta h = 10\text{м}$. (Эти данные будут использоваться при написании программы запасной системы спасения)

$$V_{n+1} = V_n + \left(g - \frac{B}{M_n} V_n^2 \right) \cdot \Delta t$$

Так же численно находим высоту спуска до $h_{max} - \Delta h$, где $\Delta h = 10\text{м}$:

$$V_n = \left(\frac{dh}{dt} \right)_n = \frac{h_n - h_{n-1}}{\Delta t}$$

$$h_{n+1} = h_n + V_{n+1} \Delta t$$

.....

Когда высота $h_{n+1} = h_{max} - \Delta h$. Срабатывает система спасения и ракета начинает спуск на парашюте. Аэродинамическая сила сопротивления воздуха теперь равна $F_{\text{аэр1}} = c_x \frac{\rho V^2}{2} S_1 = B_1 V^2$

Поскольку ракета опускается с установившейся скоростью, сила сопротивления $F_{\text{аэр1}} = Mg$ равна силе тяжести.

$V_{\text{спуска}} = \text{const}$, пока $h \neq 0$.

Предварительные расчетные данные.

Стадии полета	Скорость	Высота подъема	Масса	Время
Старт	$0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	0 м	370 г	0 с
Двигатель отработал	$67 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	39 м	316 г	1.2 с
Апогей	$0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	246 м	316 г	7.6 с
Выброс парашюта	$14 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	236 м	316 г	9 с
Приземление	$4.5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	0 м	315 г	61.2 с

(см. приложение [«График предварительных результатов полета»](#))

Физическая модель

Одна из целей проекта - создание и запуск модели ракеты.

Конструкция ракеты.

Ракеты состоит из трех основных частей: Двигатель, бортовая электроника, “Система спасения”.

(см. приложение [3D модель ракеты](#) и [чертеж ракеты](#))

Модельный ракетный двигатель РД1-30-5

Диаметр наружный 20 мм, длина 130 мм, масса 54-55 гр, импульс тяги суммарный 30 Н•с, тяга максимальная 37 Н, тяга средняя 23 Н. Задержка вышибного заряда – 5 сек.

Бортовая электроника.

Электронные компоненты

(см. приложение [Схема подключения](#))

Контроллер Arduino Nano:

Микроконтроллер ATmega328P-AU, Напряжение питания 4-6 вольт

Датчик давления BMP280 :

- Диапазон давления: 300-100 hPa
- Диапазон температур: -40 - +85 °C
- Точность измерения: Давление - 0.01 hPa (< 10 cm), Температура - 0.01° C

- Интерфейс подключения: шины I²C и SPI
- Размер: 15*12 мм.

Аккумуляторы:

- Питание микроконтроллера: Литиевый полимерный аккумулятор Robiton, напряжение 3.7 вольт, емкость 110 мАч
- Активация вышибного заряда: Литиевый полимерный аккумулятор Robiton, напряжение 3.7 вольт, емкость 2000мАч

Релейный модуль:

- Рабочее напряжение модуля 5В. Максимальное напряжение нагрузки 30 В, 250 В, Максимальный ток на канал 10А.

Программное обеспечение

Для написания программы удобно разбить полет на стадии.

Первая стадия: Ракета на земле. Заводится SD карта, если нет, то сигнализируем синим светодиодом. Заводится барометр BMP280, если нет, то сигнализируем синим светодиодом. Открывается файл на запись, если нет, то сигнализируется миганием синего светодиода.

Вторая стадия: Ракета поднялась на 5 метров, в этот момент начинается стадия активного полета, логирование данных (запись на SD карту значений получаемых с датчика BMP280), начало отсчета таймера лога. Она продолжается до того как ракета не достигнет апогея.

Третья стадия: Ракета начинает снижаться.

Четвертая стадия: Ракета снизилась на 5 метров или прошло 9000 мс с начала отсчета таймера лога. Подаем напряжение на реле в течении 4 секунд. Начало отсчета таймера парашюта.

Пятая стадия: Ракета на земле. Файл закрывается, когда переполняется счетчик лога.

(с.м. приложение [Программа «Система спасение»](#))

Система спасения

Один из критериев успешного пуска является раскрытие парашюта. В моей ракете я использую пиротехнический способ реализации системы спасения. С отсеке «Система спасение» находится прозаряд, который срабатывает, когда ракета находится на высоте на 10 метров ниже апогея. В результате взрыва порохового заряда происходит скачок давления и головной обтекатель и парашют вылетают.

Пуск

Пуск считается успешным:

1. Если был вертикальный старт с направляющей.
2. Ракета поднялась на высоту приблизительно равную значению полученному с помощью математической модели.
3. После прохождения точки, где высота на 10 м меньше максимальной, ракета начала спуск на парашюте.
4. Ракету удалось найти целой после приземления.
5. Получилось записать извлечь данные об изменении высоты с SD карты.

Результаты пуска:

Ракета успешно сошла с направляющей. К сожалению, из-за возникших трудностей пуск происходил уже в темноте и зафиксировать что-то, кроме факта самого полета не удалось. Была предпринята попытка найти ракету, но она не увенчалась успехом. (см. приложение [фото с пуска](#))

Выводы:

1. Брать несколько ноутбуков и иметь готовую копию программы на нескольких устройствах.
2. Брать запасные части электроники, где наиболее вероятно может отойти контакт.
3. При сборке электроники учитывать погодные условия. При минусовых температурах вероятнее разрушение провода.
4. Для запуска лучше выбирать теплое время года и вдали от леса.
5. Предусматривать систему, которая упрощает поиски ракеты

Перспективы и результаты

Перспективы:

- Доработка математической модели для более удобного использования
- Запуск ракеты с устройством, которое бы оптимизировало дальнейший поиск.
- Повторный запуск ракеты и получение данных об изменении высоты.

Результаты:

- Разработанная математическая модель может быть использована для расчета предварительных результатов запуска моделей ракеты.
- Создана действующая модель ракеты.
- Приведена инструкция по сборке модели ракеты.
- Осуществлен частично успешный запуск.

Приложение

График предварительных результатов полета

График предварительных результатов полета

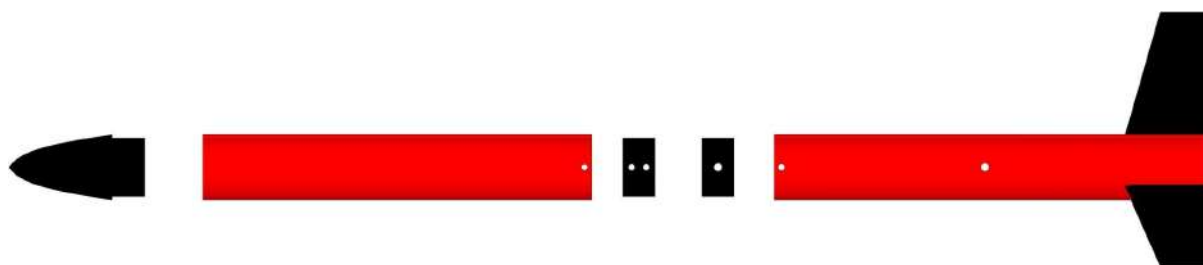


Прототип программы

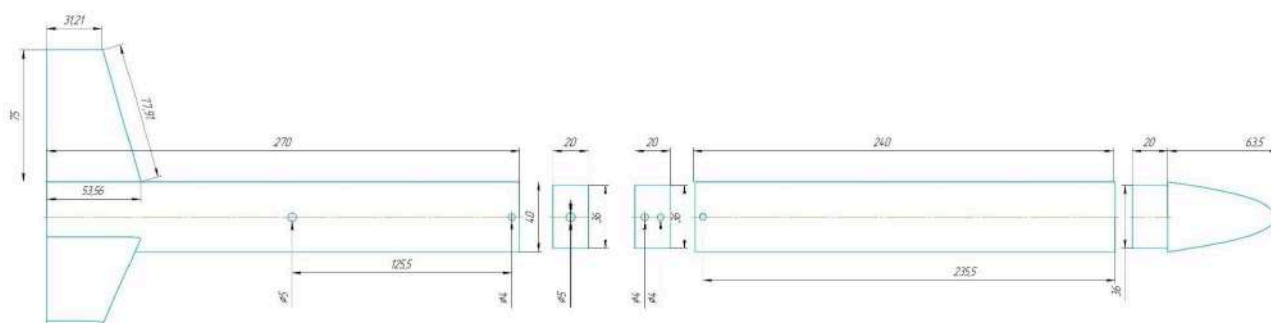
✚ Прототип. математическая модель (1)

3D модель ракеты

<https://drive.google.com/file/d/1o78IkLZ2oqpbOewIDZmMPR7UetrsHrxw/view?usp=sharing>



Чертеж ракеты



📎 чертеж .jpg

Программа «Система спасение»

<https://drive.google.com/file/d/1VvXoq279HP9Ikp311a5-IfJvWDnD8XbQ/view?usp=sharing>

Схема подключения

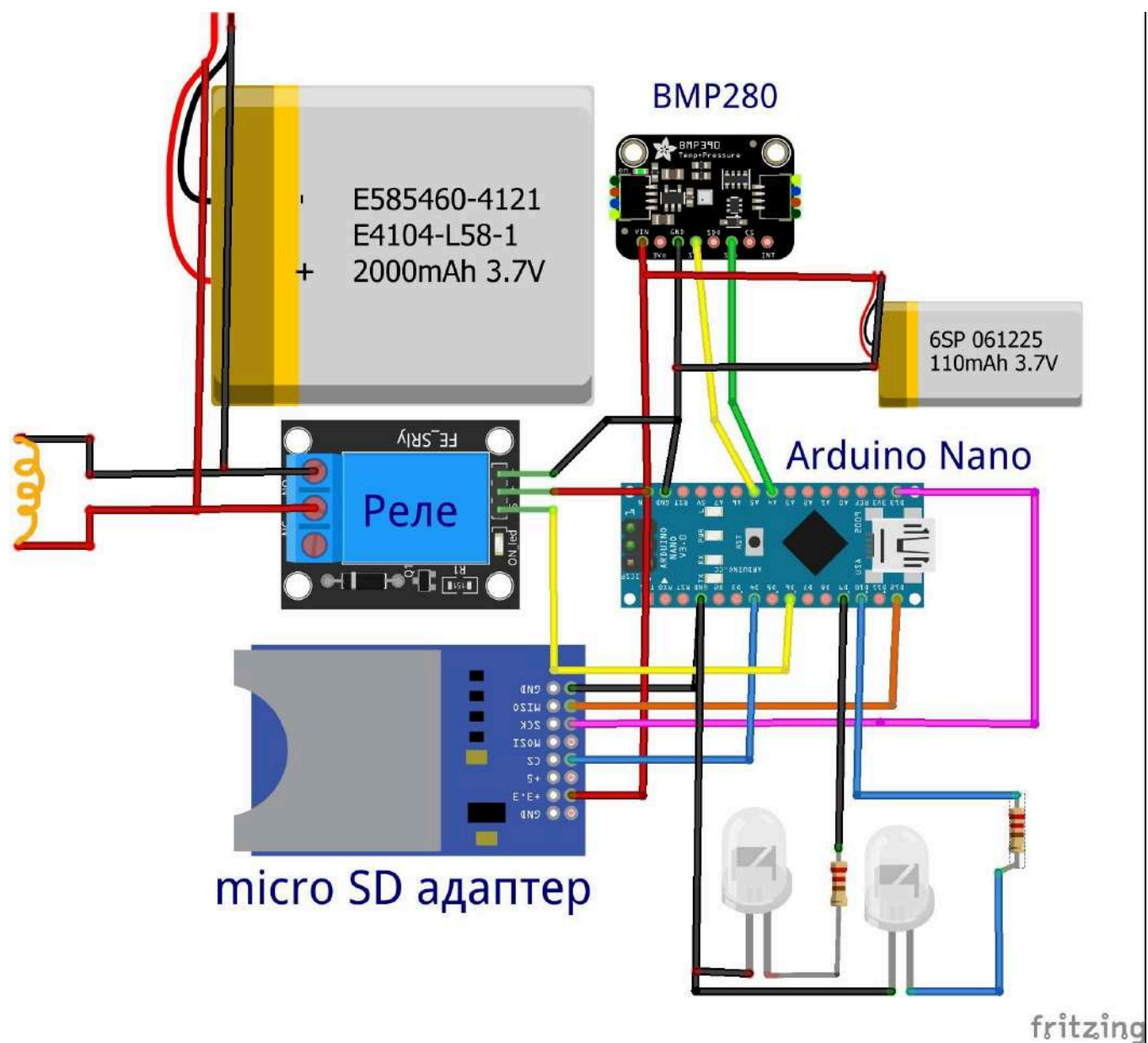


Фото с пуска



Литература

1. Авилов М.Н. - Модели ракет. Проектирование и полет. 1968
2. Всеволод Канаев - Ключ на старт 1972
3. <https://alexgyver.ru/>
4. <https://arduino.ru/>
5. <https://forums.airbase.ru/2023/07/t21253--dlya-tekh-kto-vpervye-na-forume-pravila-faq-poleznye-ssylki-.8128.html>