

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»
ПО ПРОФИЛЮ «ИНЖЕНЕРНОЕ ДЕЛО»**

21261

Регистрационный номер

Секция: Математика и естественные науки

**Разработка и математическое моделирование системы водного
старта для сверхтяжелой ракеты-носителя**

Автор:

Баканов Иван Павлович
ГБОУ Школа № 1535, 11 класс

Научный руководитель:

Сидоренко Тимофей Владимирович
фамилия, имя, отчество

Ведущий инженер-конструктор
АО «Обуховский завод». Старший
преподаватель (кафедра Е4) БГТУ
Военмех имени Д. Ф. Устинова
место работы, должность

подпись научного руководителя

Разработка и математическое моделирование системы водного старта для сверхтяжелой ракеты-носителя

АННОТАЦИЯ

Целью проекта является создание математической модели динамики водного старта для сверхтяжелой ракеты-носителя и разработка прототипа системы водного старта для суборбитальной ракеты.

Для осуществления водного старта ракета-носитель находится вертикально погруженной в воду и удерживается на плаву за счет силы Архимеда. Толща воды одновременно выполняет роль стартового стола и направляющих, обеспечивая ровный подъем ракеты-носителя.

Водный старт позволит избежать использования дорогой инфраструктуры и запускать ракеты практически из любой точки мирового океана на выгодной широте, обеспечивая бóльшую массу выводимой полезной нагрузки за счет экономии топлива. Сверхтяжелая ракета-носитель грузоподъемностью до 100 тонн в перспективе имеет широкую область применения: с развитием космических транспортных систем возникнет необходимость в эффективных способах выведения крупногабаритной полезной нагрузки на околоземные орбиты.

Для решения поставленных задач была разработана циклограмма полета и определен порядок пусковых операций. В рамках проекта также были выведены уравнения статики и динамики для ракеты-носителя, движущейся под водой, на основании которых создана программа на языке Python, реализующая аналитический и численный методы решения системы дифференциальных уравнений. С помощью программы удалось решить задачу оптимизации по нахождению оптимального размера понтона для ракеты-носителя. Также построены графики параметров движения ракеты-носителя и проведено их исследование. Сравнение с компьютерной симуляцией показало, что созданная математическая модель рассчитывает параметры движения ракеты с достаточной точностью.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Основная часть	7
1. Водный старт сверхтяжелой ракеты-носителя	7
2. Математическая модель.....	10
2.1 Математические методы.....	10
2.2 Определение начальных условий. Уравнения движения.....	11
2.3 Решение дифференциального уравнения в Python.....	17
2.4 Верификация математической модели	21
3. Практическая часть. Прототип системы водного старта	22
Заключение	25
Список источников	26
Приложение – программное обеспечение	27

ВВЕДЕНИЕ

В космонавтике XXI века появилось множество амбициозных проектов по освоению Солнечной системы, большинство из которых предполагают создание нового транспортного средства – сверхтяжелой ракеты-носителя. Наибольшего успеха в создании подобных систем добилась американская компания SpaceX, чей космический корабль Starship имеет максимальную на сегодняшний день грузоподъемность – 100 тонн на Низкую околоземную орбиту. Сверхтяжелая ракета-носитель в перспективе имеет широкую область применения:

1. Вывод в космос крупногабаритной полезной нагрузки:

- Российская орбитальная станция РОС
- Пилотируемый корабль нового поколения «Орел»
- Международная научная лунная станция
- Космические телескопы с большими зеркалами
- Выведение российского ядерного буксира “Зевс”

2. Средство защиты от астероидов и других потенциально опасных небесных тел

3. Быстрые перелёты на Марс по коротким траекториям

В настоящий момент у России нет разрабатываемых проектов сверхтяжелой ракеты-носителя грузоподъемностью до 100 тонн (максимальная грузоподъемность Ангара-А5В – 37 тонн). Одна из основных проблем, помимо экономической, заключается в том, что такая ракета, имея огромные габариты и мощность, нуждается в космодроме, оборудованном специальной башней обслуживания и системой гашения пламени двигателей. После каждого пуска ракеты-носителя наземный стартовый комплекс придется восстанавливать, что связано с большими финансовыми затратами. Примером может послужить первый запуск Starship – Superheavy, имевший частичный успех¹.

¹ 20 апреля 2023 года состоялось первое совместное испытание космического корабля Starship и ускорителя Super Heavy. Из-за отказа нескольких двигателей и последующего неконтролируемого вращения ракета не

Система водного старта позволит избежать использования дорогой инфраструктуры и запускать ракеты практически из любой точки мирового океана на выгодной широте – на территории России это, например, Охотское и Берингово моря. Кроме того, водный старт позволит проводить запуски чаще, что также ускорит развитие многоразовых ракет-носителей в России. Что мы подразумеваем под “водным стартом”? К настоящему времени уже широко применяется старт с плавучей платформы². В предлагаемом же варианте ракета-носитель находится практически полностью погруженной в воду и удерживается на плаву за счет собственной силы Архимеда. Роль стартового стола и направляющих выполняет толща воды. Таким образом, система водного старта включает в себя модифицированную ракету-носитель и транспортно-обслуживающее судно с заправочными коммуникациями.

Данный проект является логическим продолжением работы нашей команды в летней смене Сириуса³, в ходе которой мы проводили эксперименты по запуску моделей ракет из аквариума, имевшие частичный успех. Нам необходимо было уложиться в сжатые сроки, поэтому во время работы над прототипами были выбраны не самые оптимальные конструктивные решения. Кроме того, вопрос самого водного старта ракеты не был всесторонне и тщательно изучен.

Таким образом, **цель** нашего проекта включает в себя:

1. Разработку математической модели динамики водного старта ракеты-носителя и сопутствующего программного обеспечения на языке программирования Python.
2. Проектирование системы водного старта для суборбитальной ракеты.

Уникальность разработки связана с тем, что в настоящее время подобных систем не было реализовано ни для космических, ни для суборбитальных ракет. Впервые водный старт был предложен в рамках проекта Sea Dragon по созданию сверхтяжелой ракеты-носителя морского базирования, разрабатываемого США в

достигла этапа разделения ступеней. Стартовый стол был полностью разрушен двигателями первой ступени из-за отсутствия системы гашения пламени.

² Например, S7 Sea Launch, SpaceX Falcon 9

³ Результаты работы по ссылке <https://bigchallenges.ru/projects2023/raketabdb>

1960-х годах. Проект так и не был реализован в связи с возникшими техническими трудностями и прекращением финансирования. Предлагаемый вариант системы водного старта для сверхтяжелой ракеты-носителя в России не имеет аналогов. Созданная на основании уравнений движения математическая модель позволит установить параметры движения (координата, скорость, ускорение) ракеты в разные моменты времени, а в дальнейшем – временные интервалы для команд, отправляемых центром управления полетами.

Для выполнения поставленной цели нам необходимо выполнить ряд задач:

1. Изучение процессов, происходящих при водном старте;
2. Определение исходных данных и постановка задачи математического моделирования;
3. Вывод уравнений движения ракеты-носителя;
4. Написание программы на языке Python;
5. Построение и анализ графиков движения;
6. Сравнение математической модели с компьютерной симуляцией;
7. Проектирование системы водного старта для суборбитальной ракеты;
8. Выводы, план дальнейшей работы

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. Водный старт сверхтяжелой ракеты-носителя

Ракета-носитель должна служить эффективным средством выведения космического аппарата на плановую траекторию. У каждого космического аппарата своя миссия – геодезическая, коммуникационная, исследовательская, поэтому они работают на разных типах орбит. В зависимости от типа орбиты меняется потребная характеристическая скорость ракеты, то есть изменение скорости, необходимое для выхода на целевую орбиту. Максимальная скорость, которую может достичь ракета, вычисляется из уравнения Циолковского:

$$V = I \cdot \ln \frac{M_1}{M_2}$$

Ф. 1

Однако реальная скорость отличается от характеристической и связано это прежде всего с гравитационными и аэродинамическими потерями. Если запускать ракету с экватора в восточном направлении, то к её скорости добавляется до 0,5 км/с за счет вращения Земли. Это позволяет увеличить массу выводимой нагрузки.

Итак, широта стартовой площадки оказывает немалое влияние на последующее наклонение орбиты космического аппарата. Орбитальная плоскость проходит через вектор скорости ракеты на момент выгорания топлива и центр Земли, поэтому наклонение орбиты примерно равно широте, на которой располагается стартовая площадка. Наклонение орбиты – один из важнейших параметров, от которого зависит форма подспутниковой траектории. Причем максимальное смещение подспутниковой точки в северном и южном полушариях равно наклонению орбиты. Как уже было сказано выше, не вдаваясь в математические расчеты, **возможность запуска ракеты из мирового океана позволит выбирать наиболее эффективные схемы выведения и безопасные районы падения отделяющихся частей ракеты.**

На существующих наземных стартовых площадках нет поворотного механизма для прицеливания ракеты из-за его громоздкости, поэтому вводится специальная программа разворота ракеты на активном участке полета. Водный старт позволит сократить вертикальный участок полета таким образом, что ракета выйдет из воды под нужным углом тангажа благодаря действию гидродинамических рулей и отсутствию жестких башен обслуживания. Это может быть особенно актуально для баллистических ракет.

Рассмотрим порядок проведения водного старта сверхтяжелой ракеты-носителя. Сборка ступеней ракеты-носителя происходит в монтажно-испытательном комплексе на суше. Далее части ракеты транспортируются в сухие доки, где устанавливается полезная нагрузка под обтекателем и происходит заправка и наддув баков. К хвостовому отсеку ракеты подсоединяется герметичный отсек для балласта, крепящийся с помощью пироболтов и резиновых уплотнителей. После всех проверок ракета-носитель спускается на воду и транспортируется в горизонтальном положении специальным судном на место старта.

Предполагаемая схема транспортировки выглядит следующим образом (см. рис. 1). К переходному отсеку ракеты пристыковываются два судна, соединенные между собой аркой. Ракета держится на плаву за счет собственной подъемной силы и подъемной силы основного понтона, расположенного в нижней части ракеты и заполненного газом наддува. Понтон имеет тороидальную форму из соображений симметрии.

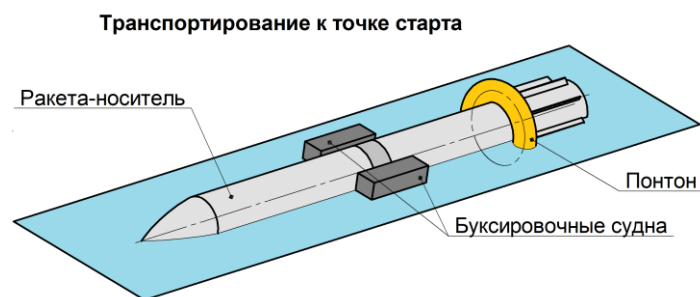


Рис. 1

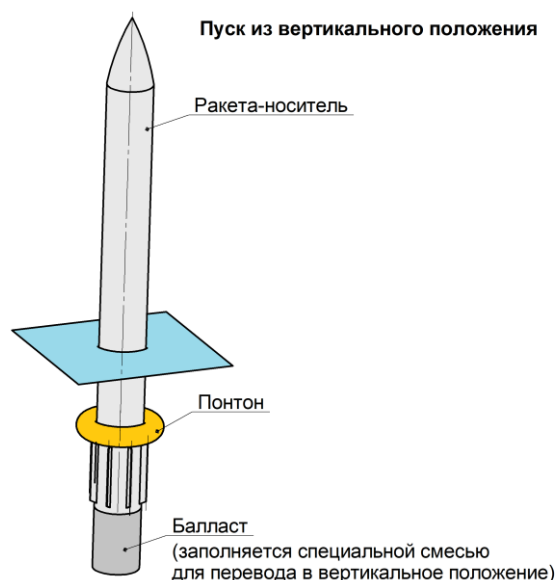


Рис. 2

По прибытии на место старта ракета приводится в вертикальное положение посредством заполнения отсека для балласта тяжелым составом (рис. 2). Ракета погружается в воду до тех пор, пока сила Архимеда не скомпенсирует силу тяжести. Основной понтон предварительно сдувается (сбросом давления через клапан) и поэтому не препятствует погружению ракеты. По окончании предполетных подготовительных работ начинается запуск.

Последовательность пусковых операций:

1. Наддув основного понтона с помощью внутренних ресурсов ракеты-носителя;
2. Всплытие ракеты-носителя в вертикальном положении. Ровный подъем обеспечивают стабилизаторы и гидродинамические рули;
3. Отсоединение балласта, сброс понтона;
4. Запуск маршевых двигателей;
5. Подъем ракеты из воды, выравнивание траектории рулевыми двигателями.

Циклограмма пуска изображена на рис. 3. Полет ракеты-носителя состоит из трех участков: водного ($t_0 - t_{\text{вых}}$), атмосферного ($> t_{\text{вых}}$) и орбитального. На схеме подробно изображен первый участок. В технике он является малоизученным, поэтому требует особого внимания. После выхода ракеты из воды производится корректировка курса, позволяющая выровнять реальную

траекторию так, чтобы она совпала с программной. Угол тангажа отсчитывается от нормали, проведенной к поверхности воды.

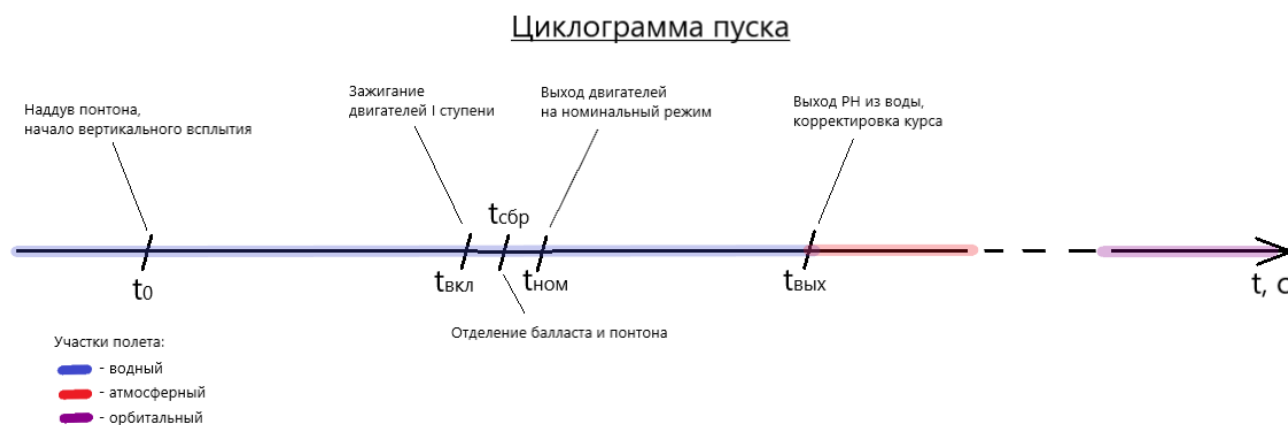


Рис. 3

2. Математическая модель

2.1 Введение. Математические методы

Математическое моделирование активно применяется в современной технике, причем наиболее трудоемкие вычисления выполняются с помощью программных пакетов. Данный подход, то есть представление исследуемого объекта с помощью математических символов, позволяет выделить наиболее важные свойства объекта. Также математическая модель позволяет проводить серии экспериментов с различными начальными условиями и находить оптимальные значения варьируемых величин.

Для решения сложных математических задач применяются аналитические, графические и численные методы. В работе с библиотекой SymPy для символьных вычислений мы применим аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые подбираются функцией `dsolve()` в зависимости от вида исходного уравнения.

С помощью инструментов библиотеки SciPy решим задачу численно (методом Рунге-Кутты), после чего сравним результаты.

В своем проекте мы поставили задачу создать математическую модель, основанную на дифференциальных уравнениях движения, и сопоставить полученное решение с результатами компьютерной симуляции.

С помощью выведенных законов движения можно будет вычислить координату, скорость и ускорение ракеты в разные моменты времени, отмеченные на временной шкале (рис. 3).

В любой математической модели есть свои допущения и упрощения. Например, мы приняли, что поверхность водоема идеально гладкая и неподвижная, поджиг двигателей и отделение балласта происходят мгновенно в одно и тоже время. Также мы не стали рассматривать побочные процессы, происходящие при всплытии, это различные эффекты кавитации и вихреобразования в воде.

2.2 Определение начальных условий. Уравнения движения

Ниже представлена таблица констант и параметров ракеты-носителя, которые будут использоваться в последующих расчетах (далее РН – ракета-носитель).

Константы	$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды $g = 10 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения
Параметры ракеты-носителя	$L = 150 \text{ м}$ – длина РН $M = 10000 \text{ т}$ – масса РН $m = 5000 \text{ т}$ – масса балласта $D = 15 \text{ м}$ – диаметр РН $S = \frac{\pi D^2}{4} \approx 177 \text{ м}^2$ – площадь поперечного сечения $c_x = 0,8$ – коэффициент лобового сопротивления
Параметры тороидального понтона	$d_{\text{п}}, \text{ м}$ – наружный диаметр $S_{\text{п}} = \frac{\pi d_{\text{п}}^2}{4} \approx 450 \sim 600 \text{ м}^2$ – площадь поперечного сечения (площадь миделя) $r_{\text{п}} = \frac{d_{\text{п}} - D}{4}, \text{ м}$ – радиус образующей окружности $R = \frac{D}{2} + r_{\text{п}}, \text{ м}$ – радиус окружности вращения

$V_{\Pi} = 2\pi^2 R r_{\Pi}^2, \text{ м}^3 - \text{объем}$
--

Таблица 1. Основные константы и параметры ракеты-носителя и понтона

Рассмотрим физическую систему, находящуюся в равновесии, состоящую из частично погруженной ракеты и жестко присоединенного к ней балласта (рис. 3). Высотой балласта пренебрегаем. За инерциальную систему отсчета примем гладь воды. Ось Y направлена вниз, за “0” выбран уровень воды; поскольку в нашей модели ракета не является материальной точкой, ее положение будем отсчитывать от нижней части.

Уравнение статики выглядит следующим образом:

$Mg - F_{\text{Ар}} + R_{\text{бал}} = 0$, где $F_{\text{Ар}}$ – сила Архимеда ракеты, M – масса ракеты,

$R_{\text{бал}} = mg$ – сила, действующая со стороны жестко прикрепленного балласта.

ф. 2

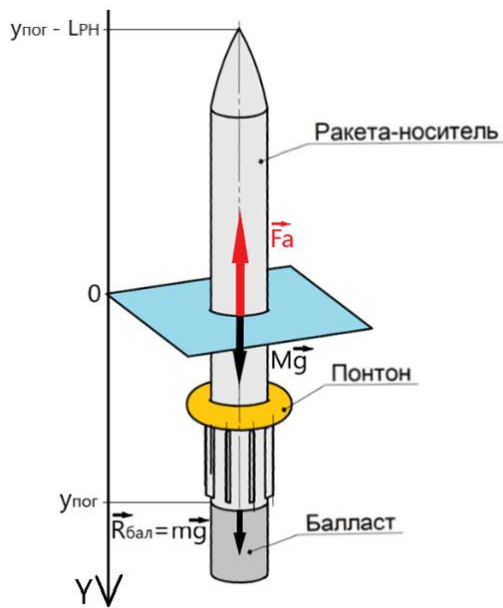


Рис. 4. Силы, действующие на РН в состоянии равновесия

Из ф. 2 находим глубину погружения $y_{\text{пог}}$, м:

$$y_{\text{пог}} = \frac{M + m}{\rho S} \approx 85 \text{ м}$$

ф. 3

Далее начинается вертикальное всплытие ракеты, обусловленное наддувом понтона (рис. 5). Балласт сбрасывается в последний момент, перед включением двигателей I ступени, обеспечивая герметичность двигательного

отсека на всем водном участке. Поскольку понтон жестко прикреплен к ракете, появляется дополнительная сила Архимеда со стороны понтона $F_{\text{АП}}$, нарушающая равновесие. Сила Архимеда ракеты $F_{\text{АР}}$ зависит от y -координаты:

$$F_{\text{АР}}(y) = \rho g V_{\text{пог}} = \rho g S |y|$$

Ф. 4

Так как ракета движется в среде, обладающей вязкостью, возникает сила вязкого трения, направленная противоположно вектору скорости. Учитывать эффект присоединённых масс в нашей модели мы не будем. Сила вязкого трения пропорциональна плотности среды, площади поперечного сечения движущегося тела и квадрату его скорости. Так как мгновенная скорость ракеты – это первая производная от координаты по времени, получаем:

$$\begin{cases} F_{\text{сопр}} = c_x S \frac{\rho v^2(t)}{2} \\ v(t) = \dot{y} \end{cases}$$

Ф. 5

Примечание:

Далее везде

$v(y) \equiv v_y(y)$ – проекция скорости;

$a(y) \equiv a_y(y)$ – проекция ускорения.

Соответственно уравнения динамики для ракеты-носителя в проекциях на Оу:

$$\begin{cases} a(t) = \frac{(M+m)g - \rho g S y(t) - \rho g V_{\text{п}} + c_x S \frac{\rho v^2(t)}{2}}{M+m} \\ v(t) = \dot{y} \\ a(t) = \ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2} y(t) \end{cases} \quad (3)$$

Ф. 6

Уравнение $a(t)$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

Перепишем его, понизив порядок – заменим функцию $y(t)$ в (3) на $v(y)$, теперь вместо функции $y(t)$ стоит переменная y . Запишем начальные условия:

$$\begin{cases} v'(y) * v(y) = \frac{(M+m)g - \rho g S y - \rho g V_{\Pi} + c_x S \frac{\rho v^2(y)}{2}}{M+m} & (1) \\ \ddot{y} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v'(y) * v(y) & \text{ф. 7} \\ y(0) = 85 \\ v(85) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, мы получили задачу Коши, содержащую начальные условия для координаты и скорости ракеты. Далее подразделах 2.3, 2.4 мы решим поставленную задачу: найдем частные решения дифференциального уравнения (1), то есть найдем функции $y(t)$, $v(y)$, $a(y)$ координаты, скорости и ускорения в явном виде. Поставленную задачу будем решать с помощью языка программирования Python, библиотек SymPy для символьных вычислений, SciPy для научных расчетов и среды Jupiter Notebook.

2.2 Определение положения ракеты в момент включения двигателей

Как было сказано выше, уравнения движения позволяют связать любой момент времени с параметрами движения ракеты. После начала движения ракеты-носителя следующая операция, согласно временной шкале, связана с включением маршевых двигателей. После подтверждения зажигания, с небольшой задержкой происходит отделение балласта и сброс понтона. Соответственно для дальнейших расчетов необходимо установить, в какой момент (время, координата) выгоднее всего включать двигатели под водой.

Согласно закону Паскаля, каждые 10 метров гидростатическое давление, то есть давление столба жидкости, увеличивается приблизительно на 1 атм.:

$$p_h[\text{Па}] = p_a + \rho g h, \text{ где } p_a \approx 101 \text{ кПа} - \text{нормальное атмосферное давление}$$

ф. 8

Рассмотрим действие ракетного двигателя. В сопловой части газовая струя ускоряется, а ее давление уменьшается и давление на срезе сопла может быть больше, меньше или равно атмосферному, что также зависит от режима расширения сопла. Рассмотрим уравнение тяги двигателя в атмосфере:

$$F [\text{Н}] = M * w + S(p - p_a), \text{ где } M - \text{массовый расход топлива, } w - \text{скорость истечения,}$$

p – давление на срезе сопла, p_a – атмосферное давление.

Ф. 9

Из уравнения следует, что чем больше давление окружающей среды, тем меньше тяга. Это справедливо также для двигателя, работающего под водой.

Окончательное уравнение тяги примет вид:

$$F_h = M * w + S(p - (p_a + \rho gh))$$

Ф. 10

На малой глубине эффект снижения тяги из-за разности давлений на срезе сопла и снаружи незначителен, однако при проектировании тяжелых ракет-носителей этот эффект придется учитывать. Также при работе в воде двигателя, рассчитанного на атмосферное давление, может возникнуть другой паразитный эффект, ведущий к снижению тяги. Из формулы 8 следует, что величина тяги зависит от скорости истечения газов из сопла, но при значительном превышении давления окружающей среды над давлением газового потока, возникает обратная ударная волна, которая распространяется против потока и тем самым сильно снижает эффективность двигателя. Из технической литературы⁴ известно, что с точки зрения удельного импульса самый оптимальный режим работы двигателя достигается, когда давление на срезе равно давлению внешней среды. Этот же принцип справедлив и для водного участка движения ракеты-носителя.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что для минимизации паразитных эффектов, возникающих при работе двигателей в воде, двигатели первой ступени лучше всего запускать на малой глубине сразу после окончания всплытия ракеты-носителя.

Примечание:

Под “окончанием всплытия” подразумевается максимальный подъем носовой части ракеты-носителя над уровнем воды под действием только гидростатических сил. Также это означает завершение водного участка полета.

⁴ Сердюк В. К. Проектирование средств выведения космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2009

Чтобы понять, как поведет себя конструкция ракеты после всплытия, были проведены несколько экспериментов с полым пластиковым стержнем, погруженным в аквариум с водой (рис. 5). Предварительно мы отметили положение центра тяжести стержня черной риской, оказавшейся посередине. Благодаря замедленной съемке удалось выяснить, что стержень всплывает практически вертикально до тех пор, пока его центр тяжести не окажется выше уровня воды. Далее возникает опрокидывающий момент, создаваемый силой тяжести и силой Архимеда относительно оси, проходящей через центр стержня у поверхности воды (на рисунке ц. в. – мгновенный центр вращения). К вертикальному поступательному движению добавляется вращательное, после чего стержень “ложится” на воду.

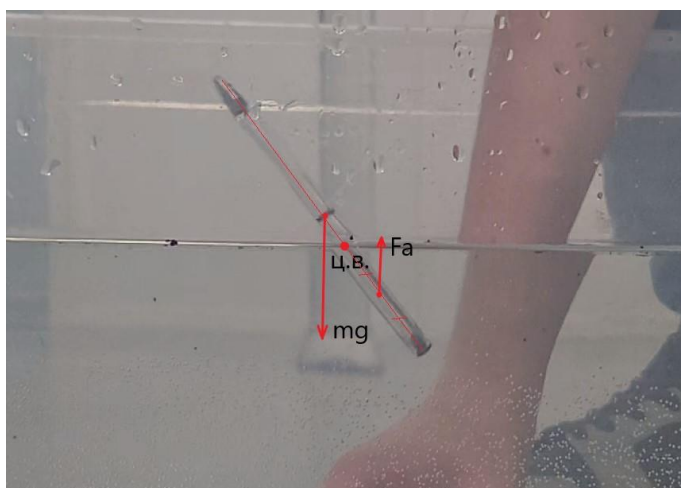


Рис. 5. Изучение поведения полого стержня во время всплытия

Воспользовавшись результатами наблюдений можем предположить две наиболее вероятные ситуации по окончании всплытия ракеты-носителя:

1. Центр тяжести окажется ниже уровня воды. В этом случае ракета-носитель придет в устойчивое равновесие в результате затухающих колебаний вокруг положения равновесия.
2. Центр тяжести окажется выше уровня воды. В этом случае равновесие будет неустойчивым, то есть достаточно незначительного поперечного воздействия на конструкцию ракеты, чтобы ее опрокинуть.

Итак, с одной стороны, как было сказано выше, двигатели первой ступени выгоднее всего запускать на малой глубине, но с другой стороны мы рискуем столкнуться с ситуацией №2, когда ракета сильно накренится и ляжет набок. Поскольку центр тяжести “идеальной” ракеты-носителя расположен приблизительно посередине со смещением в сторону хвостовой части, **для достижения устойчивого равновесия большая часть длины (минимум половина длины) ракеты должна находиться под водой.** Если принять положение центра тяжести ровно посередине, то оптимальным моментом для включения двигателей будет прохождение серединой ракеты уровня воды, т. е. Y-координата нижней части ракеты $y_{кр}$ в момент времени $t_{вкл}$ равна:

$$y_{кр} = \frac{L_{РН}}{2} = 75 \text{ м}$$

2.3 Решение дифференциального уравнения в Python

Вернемся к решению уравнения (1) из ф. 7 (подраздел 2.2).

Исходные данные:

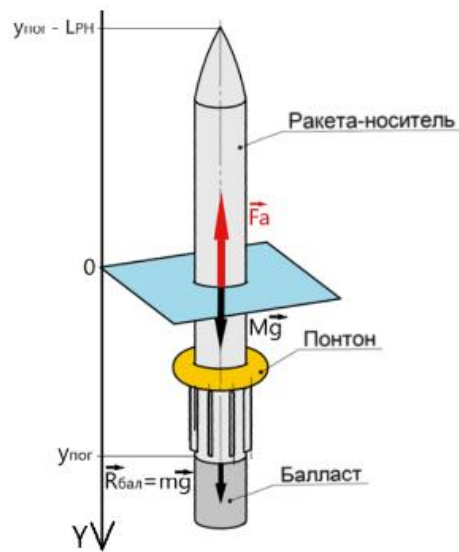
Ось координат направлена вниз. Начальные условия: $y_0 = 85$, $v_0 = 0$.

Целевая функция $v(y)$, параметр $d_{п}$, м – наружный диаметр понтона.

На рис. 6 представлен фрагмент кода с перечислением исходных данных.

Исходные данные

Расчётная схема:



Ось координат направлена вниз, начальные условия: $y_0 = 85$ м, $v_0 = 0$ м/с

Целевая функция $v_y(y)$, параметр d , м - наружный диаметр понтона.

$$v_y(y) \equiv v(y)$$

Уравнение движения:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = \frac{(M + m)g - \rho g S \cdot y(t) - \rho g V_{\Pi} + \frac{1}{2} c_x S_{\Pi} \rho \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}{M + m}$$

Рис. 6. Исходные данные математического моделирования

Окончательно задачи матмоделирования формулируются так:

Задача 1: определить вертикальную скорость по модулю ракеты-носителя в момент прохождения ее центром уровня воды: $y = y_{кр} = 75$ м. Ответ представить в виде таблицы с возможными значениями.

Задача 2: найти минимальный диаметр понтона, при котором проекция ускорения в момент $y = 75$ м будет неположительной, в граничном случае равной нулю.

Задача 3: определить зависимость $y(t)$ координаты от времени, показать, что ракета-носитель будет совершать затухающие механические колебания около поверхности воды. Найти время всплытия, равное $t_{вкл} - t_0$ (см. рис. 3).

Для решения задачи 1 воспользуемся методами библиотеки SymPy для символьных вычислений. Предложенное функцией `dsolve()` аналитическое решение получилось довольно громоздким, к тому же дальнейшие улучшения уравнения движения значительно затруднят аналитический вывод функции. Поэтому для решения задач 2, 3 целесообразно использовать численные методы интегрирования, такие, как, например, метод Адамса или Рунге-Кутты разного порядка точности.

Программный код написан в среде Jupyter Notebook. Код программы .py и .html файл доступны на диске по [ссылке](#).

Первая часть программы, посвященная аналитическому решению, состоит из последовательности действий:

1. Объявляем символьные переменные и константы
2. Записываем уравнение движения
3. Понижаем порядок уравнения, делая подстановку
4. Определяем начальные условия и решаем задачу в явном виде
5. Создаем серию решений для разных значений параметра $d_{\text{п}}$
6. Визуализация результатов (рис. 7, 8)
7. Построение таблицы числовых значений скорости и ускорения в зависимости от выбранного $d_{\text{п}}$ (таблица 2). Красной рамкой выделено оптимальное значение $d_{\text{п}} = 27$ м – ответ на задачу 2.

Для решения задачи 2 вводим параметр $d_{\text{п}}$, м – наружный диаметр понтона. Построим графики $v(y)$, $a(y)$ проекций скорости и ускорения для разных значений параметра. Решив простую задачу оптимизации **найдем наименьшее $d_{\text{п}}$, при котором ускорение ракеты при всплытии будет направлено вверх и в дальнейшем не изменит своего знака. Это условие обеспечит максимальную скорость ракеты в конце водного участка при минимальной массе понтона.**

Примечание:

Поскольку функция $a(y)$ – производная от $v(y)$, в граничном случае мы ищем $d_{\text{п}}$, при котором экстремум функции $v(y)$ лежит в окрестности точки $y = 75$ м.

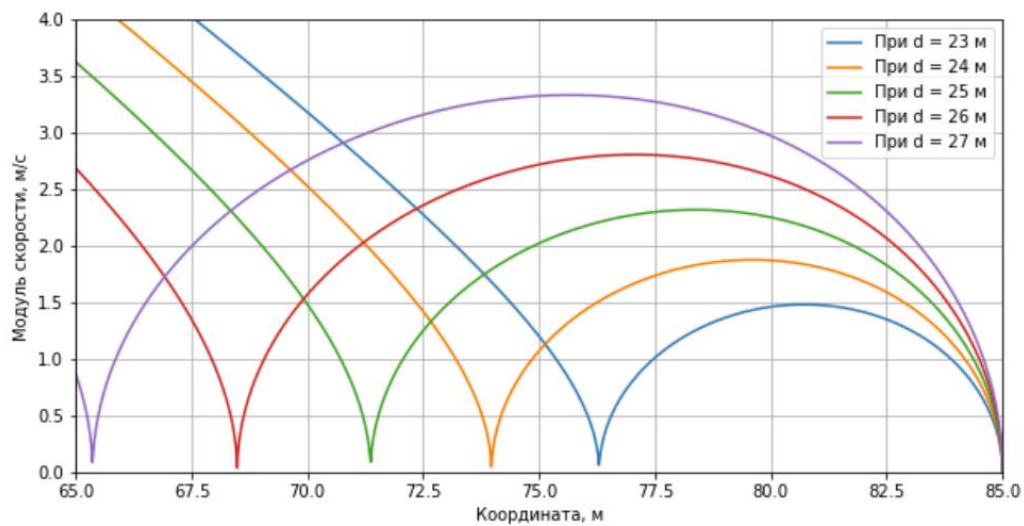


Рис. 7. График зависимости модуля вертикальной скорости от координаты для разных значений параметра

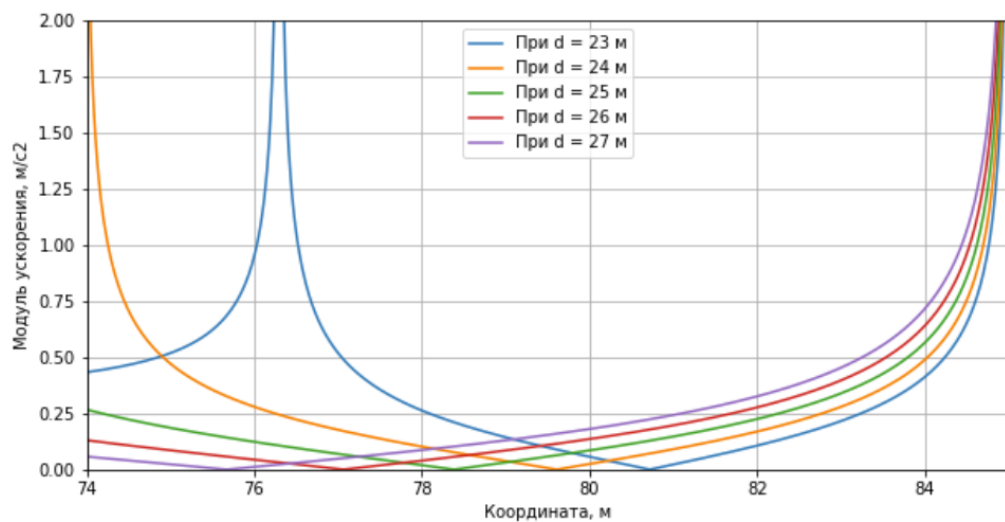


Рис. 8. График зависимости модуля вертикального ускорения от координаты для разных значений параметра

	$d, \text{ м}$	$v, \text{ м/с}$	$a, \text{ м/с}^2$
0	23	-1.2	0.5
1	24	1.1	0.5
2	25	2.0	0.2
3	26	2.7	0.1
4	27	3.3	0.0
5	28	3.9	-0.0
6	29	4.4	-0.1
7	30	4.9	-0.1
8	31	5.4	-0.1
9	32	5.9	-0.1

При $d < 23.5 \text{ м}$ скорость отрицательная, что противоречит требованиям задачи 2.

Таблица 2. Числовые значения скорости и ускорения в момент окончания всплывтия $y = 75 \text{ м}$.

При составлении таблицы ось Oy для удобства направлена вверх

Вторая часть программного кода реализует численное решение. В программе выполняется следующая последовательность действий:

1. Записываем исходное уравнение движение в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Для решения задачи 3 зафиксируем диаметр понтона, равный полученному ранее $d_{\text{п}} = 27$ м.
3. Указываем начальные условия, создаем массив времени с заданным числом разбиений $N = 1000$.
4. Решаем систему уравнений. В функции численного интегрирования `odeint()` реализован метод LSODA из Fortran-библиотеки ODEPACK.
5. Добавляем столбцы времени и ускорения к массиву с решением
6. Визуализация расчетов (рис. 9)
7. По графику координаты от времени (рис. 10) определяем время всплытия ракеты – 4,5 с (см. перекрестие пунктирных линий).

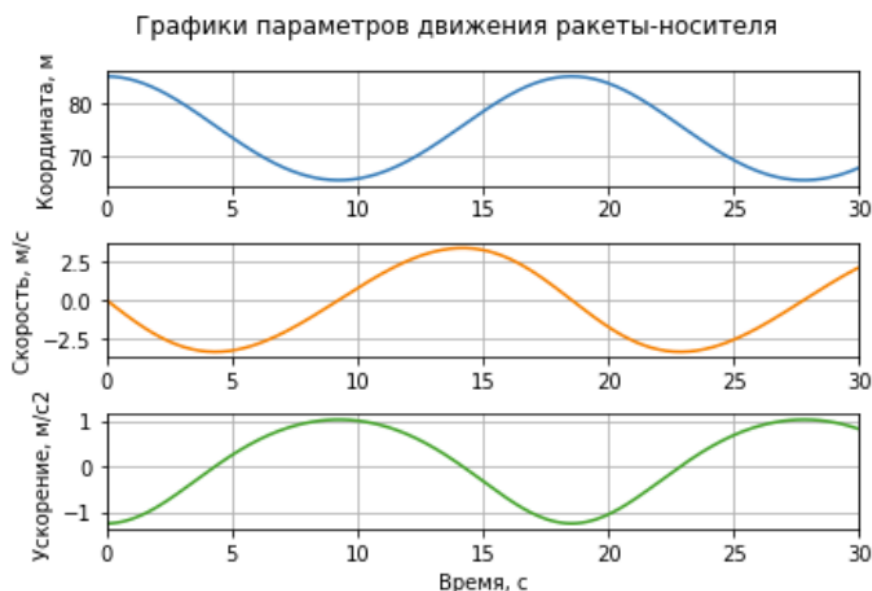


Рис. 9. Графики параметров движения ракеты-носителя

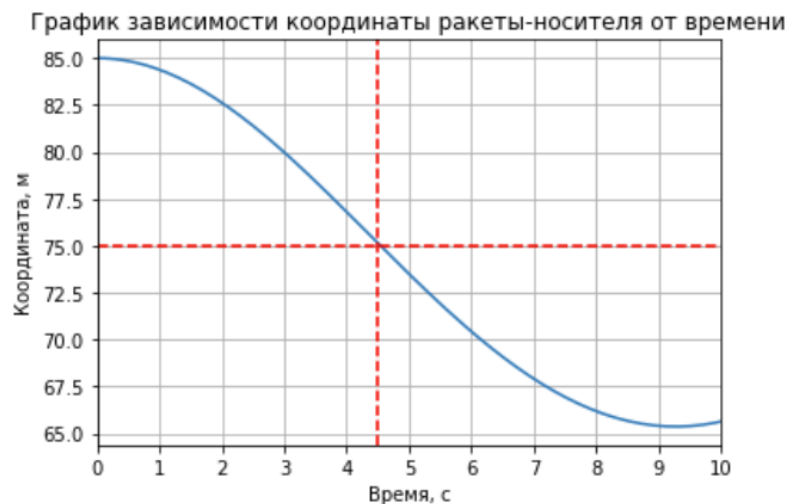


Рис. 10. График зависимости координаты ракеты-носителя от времени

Результатами выполнения программы являются:

- А) Функция $v(y)$ (ф. 11), полученная в явном виде
- Б) Графики $v(y)$, $a(y)$ проекций скорости и ускорения, рис. 7, 8
- В) Таблица 2 с числовыми значениями скорости и ускорения
- Г) Значение параметра $d_n = 27$ м, удовлетворяющего требованиям задачи 2
- Д) Графики $v(t)$, $a(t)$, $y(t)$, рис. 9
- Е) Ответ к задаче 3, полученный в ходе графического анализа, рис. 10

Сравним значения скорости и ускорения, полученные в первом и во втором решениях:

	Аналитическое	Численное
Модуль скорости, м/с	3,30	3,35
Модуль ускорения, м/с ²	0,05	0,05

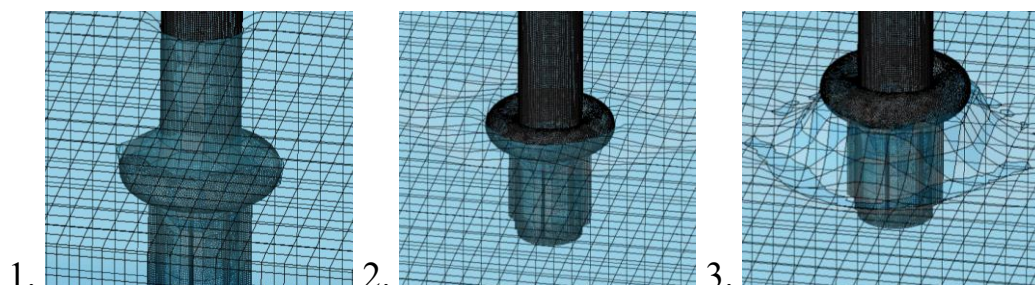
Таблица 3. Сравнение результатов аналитического и численного решений

2.5 Верификация математической модели

Валидация и верификация – важнейшие этапы в построении математической модели, задача которых – проверить, насколько результат соответствует ожиданиям и отвечает ли нашим требованиям. Научный руководитель помог смоделировать процесс вертикального всплытия ракеты в программном

обеспечении Abaqus, специализирующемся на методе конечных элементов. Файл с анимацией доступен на диске по [ссылке](#). Моделирование проводилось для абсолютно жесткого тела, размер элементов разбиения – 1 м.

Рис. 11. Кадры из анимации, созданной в системе компьютерного моделирования Abaqus



Оказалось, что скорость ракеты по окончании всплытия равна 3,12 м/с при диаметре понтона 27 м. Значение скорости 3,35 м/с (таблица 3) отличается от полученного в симуляции на 6,9 %. **Таким образом, мы можем полагать, что созданная математическая модель с достаточно высокой точностью соответствует действительности.** Расхождение в 6,9 % связано с тем, что в нашей упрощенной модели мы не учитывали эффект присоединенных масс, вызванный вязким трением жидкости, из-за чего результат выполнения программы оказался несколько выше, чем в симуляции.

3 Прототип системы водного старта

В рамках проекта Sea Dragon проводилось множество экспериментов на макетах, чтобы **испытать основные части системы водного старта без дополнительных затрат на их реализацию в реальном размере.** Мы решили следовать тому же принципу, поэтому сосредоточили внимание на системе водного старта для суборбитальной ракеты.

Прежде всего, **система водного старта должна обеспечивать герметичность двигателей и запуск ракеты из воды.** Водный старт суборбитальной ракеты выглядит следующим образом: ракета погружена в водоем и держится на тросе, привязанном ко дну водоема. Внутри ракеты проходит провод, который подключается к запалу. После срабатывания запала происходит

поджиг двигателя ракеты и отделение “баростакана” – детали, крепящейся к нижней части ракеты. Далее ракета поднимается из воды за счет тяги двигателей и силы Архимеда. Когда ракета полностью поднялась из воды, полет продолжается по обычной схеме сухого старта.

Структурная схема комплекса наземной и бортовой аппаратуры



Рис. 12. Принципиальная схема устройства суборбитальной ракеты с водным стартом

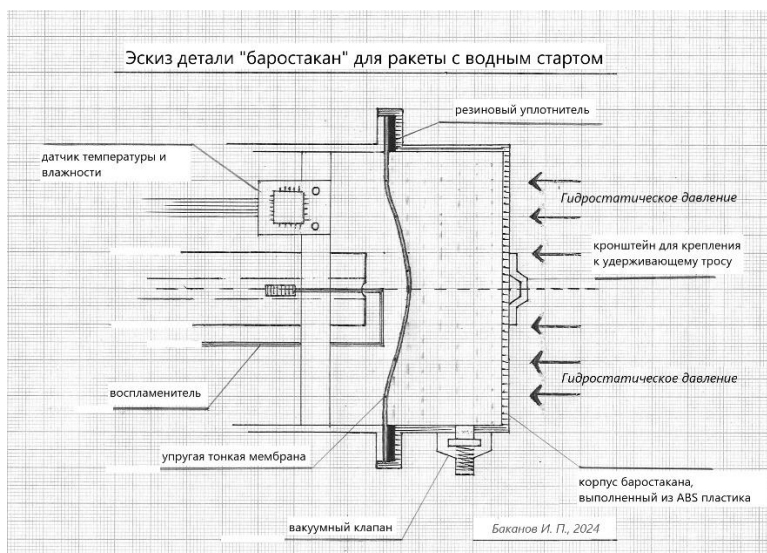


Рис. 13. Эскиз основного конструктивного элемента системы водного старта

В предлагаемом варианте системы водного старта электронные приборы представлены полетным контроллером, датчиками давления, температуры и влажности. Главной деталью является “баростакан” – герметичный отсек с созданным внутри неглубоким вакуумом, который крепится снизу к корпусу ракеты и удерживается за счет сил гидростатического давления (см. рис. 13).

Вспомогательные устройства – это устройство для поджига двигателя и силовой трос, тянущийся к ракете со дна водоема. В качестве полетного контроллера (на рис. 12 обозначен ПК) можно использовать модульный полетный контроллер для сверхлегких суборбитальных ракет⁵.

В будущем планируется проведение испытаний и отработка основных узлов конструкции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения проектной работы были достигнуты следующие значимые результаты:

1. Разработана циклограмма полета и определена последовательность пусковых операций;
2. Выведены уравнения статики и динамики для ракеты-носителя, движущейся под водой, на основании которых создана программа на языке Python, реализующая аналитический и численный методы решения дифференциального уравнения движения.
3. Проанализировав построенные графики мы определили скорость ракеты-носителя в конце водного участка и оптимальный размер понтона, а также время всплытия ракеты.
4. Верификация математической модели показала, что созданная математическая модель позволяет с достаточно высокой точностью рассчитывать параметры движения ракеты-носителя.
5. В инженерной части проекта была предложена уникальная конструкция системы водного старта для суборбитальной ракеты, нарисована принципиальная схема устройства суборбитальной ракеты и выполнен эскиз основного элемента конструкции – “баростакана”.

⁵ Баканов И. П. “Универсальный полетный контроллер для сверхлегких суборбитальных ракет” конкурс научно-технологических проектов «Большие вызовы», 2023

Развитие космического транспорта неизменно будет сопровождаться увеличением габаритов и массы полезной нагрузки, что, в свою очередь, потребует применения более гибких схем выведения. Исследования в области водного старта для сверхтяжелых ракет-носителей помогут развить эту перспективную технологию и сделать ее доступной для применения в ракетно-космической технике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ершов Н. М. Практическое введение в решение дифференциальных уравнений в Python. М.: ДМК Пресс, 2022
2. П. Фортескью, Дж. Старк, Г. Суинерд Разработка систем космических аппаратов. Перевод с английского. стр. 259 – 268. М.: Альпина Паблишер, 2021
3. И. И. Ануреев Ракеты многократного использования. стр. 35-63. М.: Воениздат, 1975
4. Сердюк В. К. Проектирование средств выведения космических аппаратов. стр. 117-145, 373-389. М.: Машиностроение, 2009
5. Куренков В. И. Конструкция и проектирование изделий ракетно-космической техники. стр. 202-213. Самара, 2012
6. Ф. Боно, К. Гатланд Перспективы освоения космоса. Перевод с английского. М.: Машиностроение, 1975

Контактные ссылки

Файлы проекта:

https://drive.google.com/drive/folders/1yqxa4_NuuPPV2Ikn2BGAp5qSWE828FnI?usp=sharing

Адрес эл. почты: ivanbakanov115@gmail.com

Сайт, посвященный проектам автора: www.altimion.com

ПРИЛОЖЕНИЕ – ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

```
#!/usr/bin/env python
# coding: utf-8
# **Разработка и математическое моделирование системы водного старта для
сверхтяжелой ракеты-носителя**
# 21261 Баканов Иван Павлович
# ГБОУ Школа № 1535, 11 класс

# _Версия от 08.03.2024_

# **Код программного обеспечения для математической модели динамики водного
старта**

# **Задача 1**:
# определить вертикальную скорость по модулю ракеты-носителя в момент прохождения
ее центром уровня воды ( $y = 75$  м).

# **Задача 2**:
# решить задачу оптимизации, найти минимальный наружный диаметр понтона, при
котором проекция ускорения в момент  $y = 75$  м будет неположительной, в граничном
случае равной нулю.

# **Задача 3**
# определить зависимость  $y(t)$  координаты от времени, показать, что ракета-
носитель будет совершать затухающие механические колебания около поверхности
воды. Найти время всплытия.

import math

import sympy
from sympy import Function, dsolve, Eq, diff, symbols, simplify, solve, plot

import numpy as np

from IPython.display import display

from scipy import constants as const

import matplotlib.pyplot as plt

import pandas as pd

# ### Начальные условия:

y_0 = 85 # м, начальное смещение
v_0 = 0 # м/с, начальная скорость
d_min = 23 # минимальный диаметр понтона

# ## Аналитическое решение

# Объявляем символьные переменные
ro, g, D, d, S, Sp, Vp, M, m, cx, vx = symbols("ρ g D d S S_п V_п M m c_x v_x",
positive=True)

t = symbols("t")
y = Function("y")(t)

# Здесь и далее все размерности в единицах СИ
```

```

constants = {ro: 1000, # плотность воды
             g: const.g, # ускорение свободного падения
             D: 15, # диаметр РН
             S: 177, # площадь поперечного сечения РН
             M: 10000*10**3, # масса РН
             m: 5000*10**3, # масса балласта
             cx: 0.8, # коэффициент лобового сопротивления
            }

# Площадь поперечного сечения, объем понтона
Spont = 3.14*d**2/4
Vpont = 2*const.pi**2*(constants[D]/2+(d-constants[D])/4)*((d-constants[D])/4)**2
display(Spont, Vpont)

# Правая часть уравнения движения
func = ((M+m)*g-ro*g*S*y-ro*g*Vp+cx*Sp*ro*(diff(y, t)**2)/2)/(M+m)
simplify(func)
display(func)

# Уравнение движения
equ1 = Eq(diff(y, t, t), func)
display(equ1)

# Понижаем порядок уравнения, создаем символ Y вместо функции y(t)
Y = symbols("Y")
V = Function("v")(Y)
# Выполняем подстановку
equ2 = equ1.subs({diff(y, t, t): diff(V, Y)*V, diff(y, t): V, y: Y})
display(equ2)

# Описание дифференциального уравнения:
sympy.classify_ode(equ2)

# Определяем начальные условия (параметр ics) и решаем задачу в явном виде
dsol = dsolve(equ2, V, ics={V.subs(Y, y_0): v_0}, simplify=True)
display(dsol[0])

# Выделим правую часть полученной формулы
sol = solve(dsol[1], V)[0]
table = []
f_vy = []
f_ay = []

v_d = sol.subs({*constants, Sp: Spont, Vp: Vpont})

def iround(ans):
    if ans * 10 % 10 == 0:
        ans = math.trunc(ans)
    else:
        ans = round(ans, 1)
    return ans

# Создадим серию решений для разных значений параметра d
for j in range(10):
    # Подставляем значения параметров
    v_y = v_d.subs(d, d_min+j)
    f_vy.append([v_y, d_min+j])
    # Продифференцируем функцию v(y) по координате, найдем a(y)
    a_y = diff(v_y, Y)
    f_ay.append([a_y, d_min+j])
    # Находим числовой ответ для случая прохождения центром ракеты уровня воды (y
    = 75 м)
    ans_v = iround(float(abs(v_y.subs({Y:75}))))

```

```

ans_a = iround(float(abs(a_y.subs({Y:75}))))
if j > 0 and ans_v < table[j-1][1] and ans_v != 0:
    table[j-1][1] *= -1
if j > 1 and ans_a >= table[j-1][2] and ans_a != 0:
    table[j-1][2] *= -1
if j == 9:
    ans_a *= -1
table.append([d_min+j, ans_v, ans_a])

# ### Визуализация результатов

N = 1000 # число разбиений
y_arr = np.linspace(65, 85, N)

fig = plt.figure(figsize=(10, 5))
ax = fig.add_subplot(1,1,1)

for i in range(5):
    v_arr = [float(abs(f_vy[i][0].subs({Y: y_val}))) for y_val in y_arr]
    ax.plot(y_arr, v_arr, label=f"При d = {f_vy[i][1]} м")

plt.xlabel('Координата, м')
plt.ylabel('Модуль скорости, м/с')

ax.set_xlim(65, 85);
ax.set_ylim(0, 4);
plt.grid(); plt.legend(); plt.show()

fig = plt.figure(figsize=(10, 5))
ax = fig.add_subplot(1,1,1)

for i in range(5):
    a_arr = [float(abs(f_ay[i][0].subs({Y: y_val}))) for y_val in y_arr]
    ax.plot(y_arr, a_arr, label=f"При d = {f_ay[i][1]} м")

plt.xlabel('Координата, м')
plt.ylabel('Модуль ускорения, м/с2')

ax.set_xlim(74, 85);
ax.set_ylim(0, 2);
plt.grid(); plt.legend(); plt.show()

# Таблица числовых значений в точке y = 75 м
# **Внимание!** здесь ось Oy для удобства направлена вверх
print(pd.DataFrame(table, columns=["d, м", " v, м/с", " a, м/с2"]))

# При d < 23.5 м скорость отрицательная, что противоречит требованиям задачи 2.

# ### Задача 2
# **Примечание**: <br>
# Поскольку функция a(y) - производная от v(y), в граничном случае мы ищем d, при
# котором экстремум функции v(y)
# лежит в окрестности точки y = 75 м.

# Из графиков v(y), a(y) и из таблицы видно, что нуль производной скорости
# находится в окрестности точки y = 75 м при d ≈ 27 м.
# Ответ: ≈ 27 м

# ## Численное решение

# ### Задача 3

```

```

from scipy import constants as const
from scipy.integrate import odeint

d = 27 # зафиксирова́ем найденный ранее диаметр понтона
Sp = 3.14*d**2/4
Vp = 2*const.pi**2*(constants[D]/2+(d-constants[D])/4)*((d-constants[D])/4)**2

ro = 1000 # плотность воды
g = const.g # ускорение свободного падения
D = 15 # диаметр РН
S = 177 # площадь поперечного сечения РН
M = 10000*10**3 # масса РН
m = 5000*10**3 # масса балласта
cx = 0.8 # коэффициент лобового сопротивления

def ode_func(v_arr, t):
    y = v_arr[0]
    y_1 = v_arr[1]

    f0 = y_1
    f1 = ((M+m)*g-ro*g*S*y-ro*g*Vp+cx*Sp*ro*(y_1**2)/2)/(M+m)
    return [f0, f1]

initial_condition = [y_0, v_0] # начальные условия

# Создаем массив времени
t_end = 100 # время окончания расчёта
N = 1000 # количество участков разбиения
t_arr = np.linspace(0, t_end, N)

# Решаем дифференциальное уравнение
'''
odeint() - функция модуля scipy.integrate, возвращает двумерный массив значений
функции,
начальное значение хранится в первой строке.
Синтаксис: odeint(func, y0, x)
func - массив правых частей уравнений первого порядка, в левой части производные.
'''
ode_sol = odeint(ode_func, initial_condition, t_arr)

# Массив значений ускорения
a_arr = ode_func([ode_sol[:, 0], ode_sol[:, 1]], t_arr)[1]
print(a_arr.reshape(1000, 1)[0:10])

# Добавление столбцов времени и ускорения к массиву с решением
ode_sol = np.hstack([ode_sol, a_arr.reshape(N, 1)])
print(ode_sol)

# ### Визуализация результатов

fig1, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(3, 1)

t_right = t_end / 10 * 3

ax1.plot(t_arr, ode_sol[:, 0], color='C0')
ax2.plot(t_arr, ode_sol[:, 1], color='C1')
ax3.plot(t_arr, ode_sol[:, 2], color='C2')

ax1.set_xlim(0, t_right);
ax2.set_xlim(0, t_right);
ax3.set_xlim(0, t_right);

fig1.suptitle("Графики параметров движения ракеты-носителя");

```

```

fig1.tight_layout()

ax3.set_xlabel("Время, с")
ax1.set_ylabel("Координата, м")
ax2.set_ylabel("Скорость, м/с")
ax3.set_ylabel("Ускорение, м/с2")

ax1.grid(); ax2.grid(); ax3.grid(); plt.show()

fig1.savefig("graphs_t.pdf", dpi=600)

fig1, ax1 = plt.subplots(1, 1)

ax1.plot(t_arr, ode_sol[:, 0], color='C0')

ax1.set_xlim(0, t_end / 10);

ax1.set_title("График зависимости координаты ракеты-носителя от времени")
ax1.set_xlabel("Время, с")
ax1.set_ylabel("Координата, м")
ax1.locator_params('x', nbins=10)

plt.axvline(4.5, color='r', linestyle='--')
plt.axhline(75, color='r', linestyle='--')

ax1.grid(); plt.show()

fig1.savefig("graph_y_t.pdf", dpi=600)

# Ответ к задаче 3 найдем по графику  $y(t)$ : время всплытия составляет около  $4.5$ 
с** (см. перекрестие пунктирных линий).

fig1, ax3 = plt.subplots(1, 1)

ax3.plot(t_arr, ode_sol[:, 2], color='C2')

ax3.set_xlim(0, t_end / 10);

ax3.set_title("График зависимости ускорения ракеты-носителя от времени")
ax3.set_xlabel("Время, с")
ax3.set_ylabel("Ускорение, м/с2")

ax3.locator_params('x', nbins=10)

plt.axvline(4.5, color='r', linestyle='--')
plt.axhline(0.05, color='r', linestyle='--')

ax3.grid(); plt.show()

```