

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**Всероссийская олимпиада школьников  
«Шаг в будущее, Космонавтика»**

18042

*регистрационный номер*

**Вывод космического аппарата на орбиту в окрестностях  
точки либрации L1 системы Земля-Луна**

**Специальное машиностроение**

*название факультета*

**Космические аппараты и ракеты-носители**

*название кафедры*

**Автор:** Елисеев Сергей Алексеевич, МБОУ СОШ №7 г. Реутов, 10 класс

**Научный руководитель:** Товарных Геннадий Николаевич, кандидат  
технических наук, доцент кафедры СМ-1 МГТУ им Н. Э. Баумана

г. Москва  
2024 г.

### Обозначения:

$G = 6,6743 \times 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2 \text{кг}}$  - гравитационная постоянная

$M_3 = 5,9722 \times 10^{24} \text{ кг}$  - масса Земли

$M_{\text{лун}} = 7,35 \times 10^{22} \text{ кг}$  – масса Луны

$\mu = GM_3 = 3,986 \times 10^{14} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$  - гравитационный параметр Земли

$\mu' = GM_{\text{лун}} = 4,903 \times 10^{12} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$  - гравитационный параметр Луны

$r_3 = 6\,371\,000 \text{ м}$  – радиус Земли

$h_n = 200\,000 \text{ м}$  – высота начальной орбиты

$v_{\text{лун}} = 968 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  - скорость Луны

$r_n = 6\,571\,000 \text{ м}$  – расстояние от центра земли до перигелия переходной орбиты

$r_a = r_{\text{либ}} = 330\,399\,000 \text{ м}$  – расстояние от центра Земли до апогея переходной орбиты.

$h_n = 200\,000 \text{ м}$  – высота начальной орбиты от поверхности Земли

$r_{\text{лун}} = 367\,047\,000 \text{ м}$  – расстояние от центра Земли до Луны

$v_{\text{лун}} = 968 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  – скорость Луны на орбите

$\Delta v_g$  – гравитационные потери

$\Delta v_p$  - потери на противодействие

$\Delta v_{\text{хар}}$  - характеристическая скорость

$\Delta v_a$  - аэродинамические потери

$I_y$  - удельный импульс

$T_k$  - температура в камере сгорания

$p_k$  - давление в камере сгорания

$T_a$  - температура на срезе сопла

$p_a$  - давление на срезе сопла

$I_{\text{пН}_2}^{\text{Тп}} = -3\,828 \text{ кДж/кг}$  – энтальпия водорода при температуре подачи  $T_{\text{п}}=13 \text{ К}$

$I_{\text{пО}_2}^{\text{Тп}} = -398 \text{ кДж/кг}$  – энтальпия кислорода при температуре подачи  $T_{\text{п}}=54,2 \text{ К}$

$V_k$  - объём камеры сгорания

$R_k$  - радиус камеры сгорания

$R_a$ - радиус среза сопла

$R_{кр}$ - радиус критического сечения

$d_{кр}$ - диаметр критического сечения

$F_{кр}$ - площадь критического сечения

$F_a$ - площадь среза сопла

$F_k$ - площадь камеры сгорания

$L_k$ - длина камеры сгорания

## Оглавление

### Оглавление

Введение:.....	5
I. Краткий обзор характеристик существующего парка спутников и ракета-носителей.....	5
II. Баллистические расчёты.....	6
2.1. Схема полёта.....	6
2.2. Определение приращения скорости при выходе РН на эллиптическую орбиту без учёта гравитационного влияния Луны .....	7
2.3. Определение приращения скорости при выходе РН на эллиптическую орбиту с учётом гравитационного влияния Луны .....	8
2.4. Описание орбиты .....	15
III. Расчёт массово-энергетических характеристик 4-ого блока.....	16
3.1. Выбор топлива.....	16
3.2. Проведение термодинамических расчётов в камере ЖРД с целью выбора оптимального соотношения компонентов топлива. ....	17
3.3. Построение профиля камеры сгорания (КС). ....	18
3.4. Построение сопла по методу Рао.....	20
3.5. Расчёт массы 4-ого блока. ....	21
3.6. Расчёт оптимальной геометрической степени расширения сопла..	24
Приложение 1 .....	27
Приложение 2 .....	28
Приложение 3.....	30
Приложение 4.....	31
Литература.....	35

## Введение:

С каждым днём интерес к космосу повышается. На орбите Земли функционируют множество спутников. Каждый из них выполняет своё задачу. Спутниковая связь, интернет, прогнозирование погоды стали для человека неотъемлемой частью жизни. Исследование космоса и его объектов не стоит на месте, в будущем планируются высадки на Луну людей и создание на ней базы. Луна, на протяжении всего развития человечества, являлась объектом многих исследований. На её поверхность побывало множество космических систем и людей, на её орбиту отправлялось множество спутников и в будущем планируется создание лунной базы. Для этой задачи необходима качественная связь базы с Землёй. Для хорошей связи Земля-Луна-Земля предлагается запустить спутник ретрансляции в точку Либрации L1 системы Земля-Луна.

## Цели:

Проведение баллистических расчётов транспортировки космического аппарата (КА).

Оптимизация параметров энергосиловой установки.

## I. Краткий обзор характеристик существующего парка спутников и ракеты-носителей

На сегодняшний день существует множество спутников связи, например, серии «Ямал» (табл. 1).

Таблица 1

Спутники связи серии «Ямал»

Наименование	Масса, кг	Мощность, Вт	Оборудование
Ямал-201	1 330	2 000	9 транспондеров С-диапазона 6 транспондеров Ку-диапазона
Ямал-202	1 330	2 000	18 транспондеров С-диапазона
Ямал-300К	1 640	5 600	11 транспондеров С-диапазона 18 транспондеров Ку-диапазона
Ямал-401	3 270	10 600	17 транспондеров С-диапазона 36 транспондеров Ку-диапазона
Ямал-402	5 250	10 800	46 транспондеров Ку-диапазона
Ямал-601	5 400	7 400	18 транспондеров С-диапазона 32 транспондеров Ка-диапазона

Ямал 401 обладает оптимальными параметрами для радиосвязи Луна-Земля-Луна. Находясь в точке либрации L1, спутник сможет принимать и отправлять радиосигнал с Земли и Луны тем самым установить качественную радиосвязь с Луной.

На сегодняшний день в Российской Федерации существуют следующие ракетано- носители (РН) для вывода КА на орбиту (табл. 2):

Таблица 2

Некоторые характеристики российских РН

Название	Стартовая масса(т)	Масса ПГ на НОО(кг)	Стоимость запуска (млн руб.)	Надёжность (%)	Число запусков
Ангара-1.2	171	3500	9	100	3
Ангара-А5	773	24000	9	66	3
Днепр	210	3700	2	95	22
Енисей	3167	115000	-	-	-
Иртыш	535	17400	4,73	-	-
Квант	235	5800	-	-	-
Космос-3М	109	1500	-	96	440
Молния	306	3000	-	-	-
Протон-М	705	23700	6	89	426
Союз-Л	307,65	7100	2,7	100	3
Союз-М	307,65	7100	2,7	100	8
Союз-У	313	7100	2,7	97	793
Союз-2	313	9200	2,7	97	139
				99	70

Протон-М с 3-м блоком «Бриз-М» является сравнительно недорогим и качественным РН, который сможет доставить необходимый спутник и 4-й ракетный блок на необходимую низкую околоземную орбиту (НОО) Земли.

Космодром для запуска был выбран – Байконур (45,6914° с.ш, 63,2413° в.д.).

## II. Баллистические расчёты

### 2.1. Схема полёта

На первых этапах баллистических расчётов необходимо выбрать схему перелёта КА, которая является наиболее эффективной при данных условиях.

1-я, 2-я, 3-я ступень РН Протон-М выводит на начальную круговую орбиту высотой 200 км с наклоном  $i=87,6187^\circ$ , необходимый груз в составе 4-й ступени и спутника. После, 3-ая ступень «Бриз-М» частично формирует переходную эллиптическую орбиту. Затем 4-я ступень формирует полную эллиптическую орбиту. (рис. 1). В точке либрации L1, которая совпадает с апогеем, с помощью дополнительного импульса КА выходит на конечную орбиту в окрестностях точки либрации L1 системы Земля-Луна.

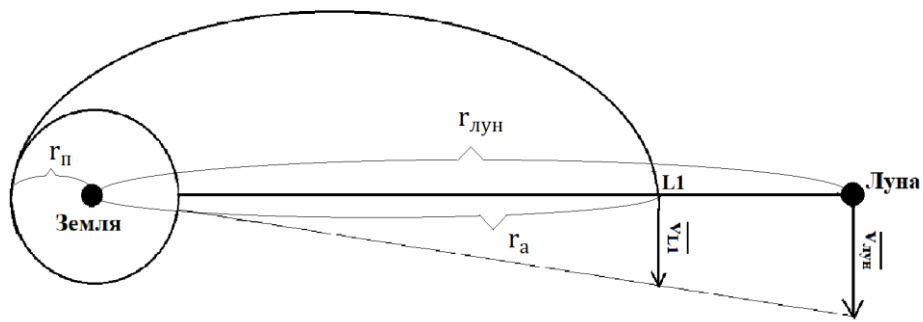


Рис. 1. Схема перелёта КА.

## 2.2 Определение приращения скорости при выходе РН на эллиптическую орбиту без учёта гравитационного влияния Луны

Все баллистические расчёты сводятся к определению приращений скорости в определённые моменты времени, благодаря которым будет выбрана конфигурация 4-го блока ракеты и достигнуты поставленные цели с наименьшими экономическими затратами.

Скорость на эллиптической орбите находится формулой:

$$v_{орб}^2 = \mu \left( \frac{2}{L_{орб}} - \frac{1}{a} \right) \quad [1, \text{стр.73}]$$

где:  $v_{орб}$  – скорость тела обращения в определённой точке орбиты;

$L_{орб}$  – расстояние от центра Земли до тела обращения;

$a = (r_{п} + r_{лун})/2$  – большая полуось переходной орбиты.

Для выбранной орбиты  $a = 168\,485\,000$  м - const будет справедлива следующая зависимость  $v_{орб} = f(L_{орб})$ , рис. 2.

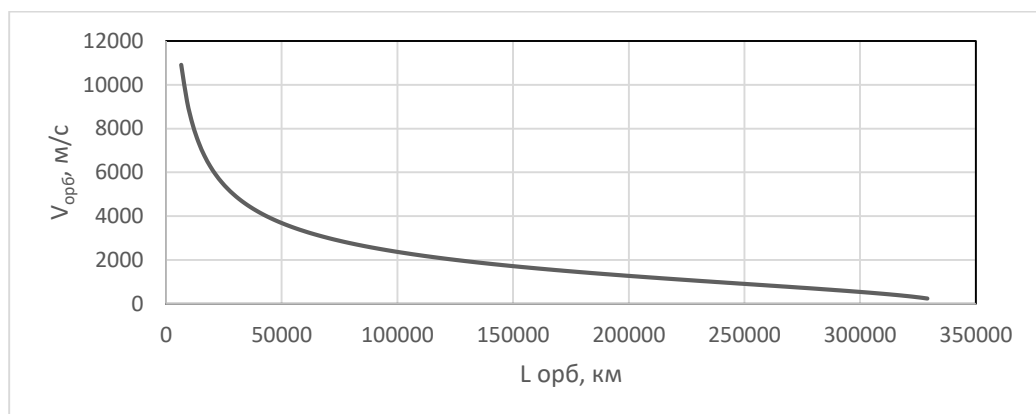


Рис. 2. Зависимость  $v_{орб} = f(L_{орб})$

Начальная скорость на круговой орбите высотой 200 км составляет:

$$v_H = \sqrt{\frac{GM_3}{r_3 + h_H}} = \sqrt{\frac{6,6743 \times 10^{-11} \times 5,9722 \times 10^{24}}{6\,371\,000 + 200\,000}} = 7788,5 \text{ м/с}$$

Квадрат скорости в перигелии переходной орбиты:

$$v_{\pi}^2 = \mu \left( \frac{2}{r_{\pi}} - \frac{1}{a} \right)$$

При  $a=168\,485\,000$  м и  $r_{\pi}=r_3+h_{\pi}=6\,571\,000$  м:

$$v_{\pi} = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_{\pi}} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \times \left( \frac{2}{6\,571\,000} - \frac{1}{168\,485\,000} \right)} = 10\,906,7 \text{ м/с}$$

Тогда первое приращение скорости по абсолютному значению составляет:

$$\Delta v_1 = v_{\pi} - v_H = 10\,906,7 - 7\,788,5 = 3\,118,2 \text{ м/с}$$

Скорость в апогее переходной орбиты вычисляется аналогично:

$$v_a = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{3,986 \times 10^{14} \times \left( \frac{2}{330\,399\,000} - \frac{1}{168\,485\,000} \right)} = 216,9 \text{ м/с}$$

Скорость в точке либрации:

$$v_{L1} = \frac{v_{\text{лун}}}{r_{\text{лун}}} r_{\text{либ}} = \frac{968}{367\,047\,000} \times 330\,399\,000 = 871,3 \text{ м/с}$$

Второе приращение скорости определяется следующим образом:

$$\overline{\Delta v_2} = \overline{v_{L1}} - \overline{v_a}$$

С учётом наклона орбиты, используя теорему косинусов находим второе приращение скорости по модулю:

$$\Delta v_2 = \sqrt{v_{L1}^2 + v_a^2 - (2 \times v_{L1} \times v_a \times \cos i)} = \sqrt{871,3^2 + 216,9^2 - (2 \times 871,3 \times 216,9 \times \cos 87,6186585^\circ)} = 889,1 \text{ м/с}$$

В итоге были подсчитаны необходимые изменения скорости для выполнения манёвров без учёта влияния Луны. Однако её влияние вносит существенный вклад в направление и значение скорости КА, поэтому возникает необходимость проведения баллистических расчётов с учётом гравитационного влияния Луны.

### 2.3. Определение приращения скорости при выходе РН на эллиптическую орбиту с учётом гравитационного влияния Луны

Решение задачи вычисления в общем случае кинематических характеристик тела на протяжении всего перелёта на эллиптической орбите, а в частности конечных данных о скорости в апогее переходной орбиты, сводится к решению задачи трёх тел, так как на местоположение КА, его скорость и его ускорение оказывает гравитационные поля как Земли, так и Луны. Нет общих методов точного решения задач данного типа, но



существуют приближенные методы решения с низкими погрешностями в конечных результатах, которые подходят для описания перелёта к точке либрации L1.

Для решения задачи была написана программа на языке программирования Python, позволяющая описать перелёт с учётом гравитационного влияния Земли и Луны (приложение 1).

Программа вычисляет скорость КА, его ускорение и расположение в изначально выбранной системе координат  $x, y, z$  (рис. 3) в момент времени, суммируя результаты вычисления ускорения, скорости, местоположения, составляется общая картина движения КА. На вход в программу, в качестве начальных данных, поступают координаты тела, его проекции скорости на координатные оси в начальный момент времени. В результате программа выводит значения проекций скоростей на оси в апогее переходной орбиты.

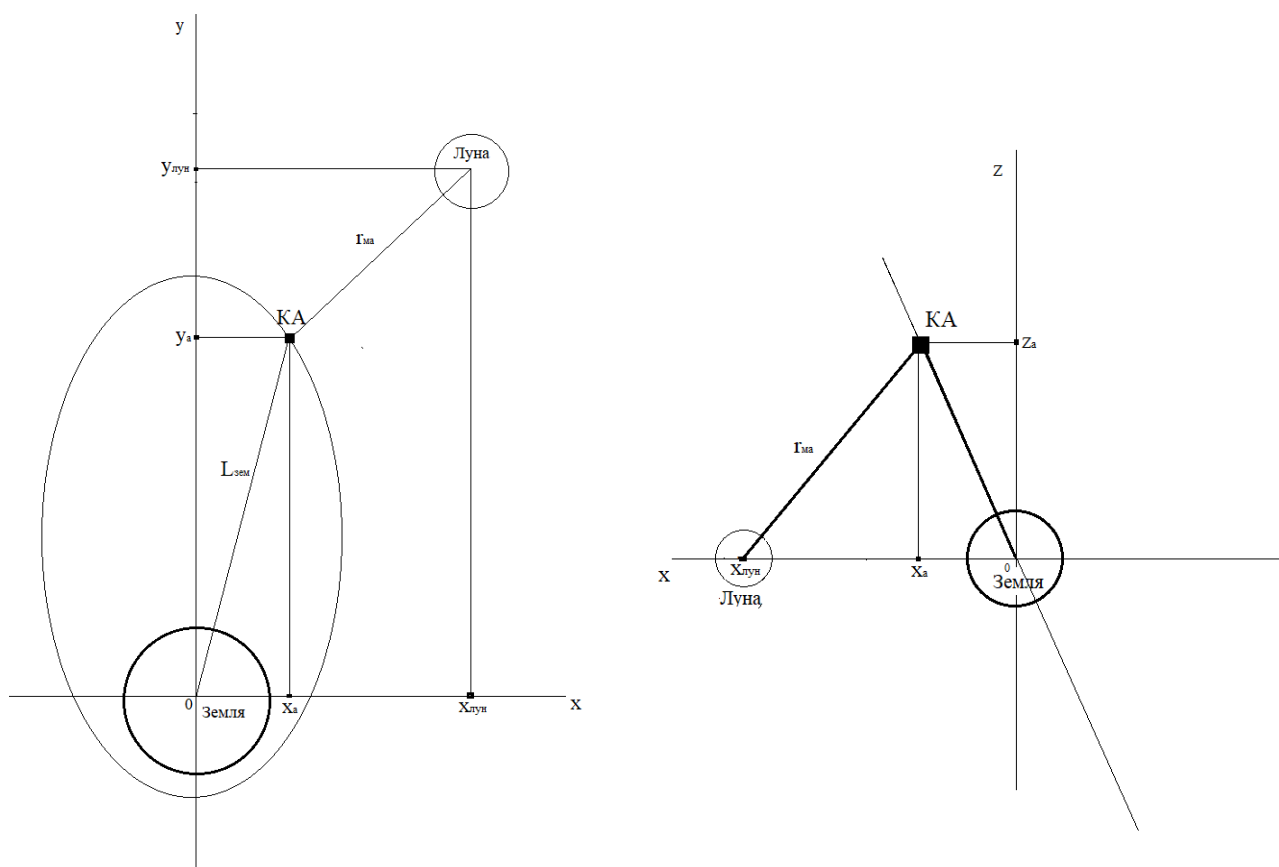


Рис. 3. Схема выбранной системы координат.

По начальным координатам вычисляется расстояние от центра Земли (начало координат):

$$L_{\text{зем}} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$

$x_a; y_a; z_a$  – координата тела по осям  $x, y, z$  соответственно.

Вычисляется ускорение тела, вызываемое Землёй:

$$g_z = \frac{\mu}{L_{зем}^2}$$

Вычисляются координаты Луны в системе:

На оси x:  $x_{лун} = r_{лун} \times \sin \alpha_{лун}$

На оси y:  $y_{лун} = r_{лун} \times \cos \alpha_{лун}$

$$z_{лун} = 0 - \text{const}$$

$\alpha_{лун}$  – угол между осью y и прямой, соединяющий центр Земли и Луны.

Вычисляются проекции расстояния от КА до центра Луны:

На ось x:  $x_{ма} = x_{лун} - x_a$

На ось y:  $y_{ма} = y_{лун} - y_a$

На ось z:  $z_{ма} = z_{лун} - z_a$

$$z_{ма} = -z_a$$

Вычисляется расстояние от КА до центра Луны

$$r_{ма} = \sqrt{x_{ма}^2 + y_{ма}^2 + z_{ма}^2}$$

Вычисляется ускорение тела, вызываемое Луной:

$$g_{лун} = \frac{\mu'}{r_{ма}^2}$$

Вычисляется проекции ускорений тела на оси, вызываемые Землёй:

На ось x:  $g_{земx} = g_{зем} \times \sin \left( \arctg \left( \frac{x_a}{\sqrt{z_a^2 + y_a^2}} \right) \right)$

На ось y:  $g_{земy} = g_{зем} \times \sin \left( \arctg \left( \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2 + z_a^2}} \right) \right)$

На ось z:  $g_{земz} = g_{зем} \times \sin \left( \arctg \left( \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}} \right) \right)$

Вычисляются проекции ускорений тела на оси, вызываемые Луной:

На ось x:  $g_{луnx} = g_{лун} \times \sin \left( \arctg \left( \frac{x_{ма}}{\sqrt{z_{ма}^2 + y_{ма}^2}} \right) \right)$

На ось y:  $g_{луny} = g_{лун} \times \sin \left( \arctg \left( \frac{y_{ма}}{\sqrt{x_{ма}^2 + z_{ма}^2}} \right) \right)$

На ось z:  $g_{луnz} = g_{лун} \times \sin \left( \arctg \left( \frac{z_{ма}}{\sqrt{x_{ма}^2 + y_{ма}^2}} \right) \right)$

Вычисляются результирующие ускорения по осям:

$$x: g_{0x} = g_{\text{лун}x} - g_{\text{зем}x}$$

$$y: g_{0y} = g_{\text{лун}y} - g_{\text{зем}y}$$

$$z: g_{0z} = g_{\text{зем}z} + g_{\text{лун}z}$$

Суммируя полученные данные о проекции скорости на каждой оси и на каждом промежутке времени, получается конечные проекции скорости по осям:

$$x: v_{xk} = \int_0^t g_{0x} dt = v_{x1} + g_{0x1} \Delta t + g_{0x2} \Delta t + \dots + g_{0xn-1} \Delta t + g_{0xn} \Delta t$$

$$y: v_{yk} = \int_0^t g_{0y} dt = v_{y1} + g_{0y1} \Delta t + g_{0y2} \Delta t + \dots + g_{0yn-1} \Delta t + g_{0yn} \Delta t$$

$$z: v_{zk} = \int_0^t g_{0z} dt = v_{z1} + g_{0z1} \Delta t + g_{0z2} \Delta t + \dots + g_{0zn-1} \Delta t + g_{0zn} \Delta t$$

$g_{0xn}$ ,  $g_{0yn}$ ,  $g_{0zn}$  – проекции ускорений в n-ый промежуток времени на оси x, y, z соответственно;

$v_{x1}$ ,  $v_{y1}$ ,  $v_{z1}$  – проекции скорости в начальный момент времени на оси x, y, z соответственно;

$\Delta t = 0,005$  с – шаг приращения аргумента.

Суммируя данные изменения пространственного положения КА, получается конечные координаты тела по осям:

$$x: x_{ak} = \int_0^t v_x dt = x_{a1} + v_{x1} \Delta t + \frac{g_{0x1} \times \Delta t^2}{2} + v_{x2} \Delta t + \frac{g_{0x2} \times \Delta t^2}{2} + \dots + v_{xn-1} \Delta t + \frac{g_{0xn-1} \times \Delta t^2}{2} + v_{xn} \Delta t + \frac{g_{0xn} \times \Delta t^2}{2}$$

$$y: y_{ak} = \int_0^t v_y dt = y_{a1} + v_{y1} \Delta t + \frac{g_{0y1} \times \Delta t^2}{2} + v_{y2} \Delta t + \frac{g_{0y2} \times \Delta t^2}{2} + \dots + v_{yn-1} \Delta t + \frac{g_{0yn-1} \times \Delta t^2}{2} + v_{yn} \Delta t + \frac{g_{0yn} \times \Delta t^2}{2}$$

$$z: z_{ak} = \int_0^t v_z dt = z_{a1} + v_{z1} \Delta t + \frac{g_{0z1} \times \Delta t^2}{2} + v_{z2} \Delta t + \frac{g_{0z2} \times \Delta t^2}{2} + \dots + v_{zn-1} \Delta t + \frac{g_{0zn-1} \times \Delta t^2}{2} + v_{zn} \Delta t + \frac{g_{0zn} \times \Delta t^2}{2}$$

$v_{x1}$ ,  $v_{y1}$ ,  $v_{z1}$  – координаты КА в начальный момент времени на оси x, y, z соответственно;  $v_{xn}$ ,  $v_{yn}$ ,  $v_{zn}$  – проекции скоростей в n-й промежуток времени на оси x, y, z соответственно.

Для проверки корректности работы программы были рассмотрены два частных случая:

1. Движение тела по круговой орбите Земли, не учитывая влияние Луны (приложение 2). Данная проверка помогает удостовериться в корректном расчёте гравитационного влияния Земли.

Скорость КА на круговой орбите Земли высотой 200 км составляет 7788,5 м/с и при движении КА она остаётся постоянной. Для проверки достаточно вывести данные о скорости КА в любой момент времени и сравнить результат с начальной скоростью.

2. Движение тела по круговой орбите Луны, не учитывая влияние Земли (приложение 3). Данная проверка помогает удостовериться в корректном расчёте гравитационного влияния Луны. Скорость КА на круговой орбите высотой 1 104 км составляет 2 107 м/с и при движении КА она остаётся постоянной. Для проверки достаточно вывести данные о скорости КА в любой момент времени и сравнить результат с начальной скоростью.

По результатам тестовых расчетов получено, что разность скоростей КА, полученных с использованием программы и полученных аналитическим способом при движении тела вокруг Луны и Земли составляла не более 2 м/с или менее 0,1 % от начальной скорости, что свидетельствует о корректности работы алгоритма программы.

Программа позволяет определить скорость КА в апогее переходной орбиты с учётом гравитационного влияния Луны и Земли. Для рассматриваемой задачи получено  $v_a^{\text{дейст}}=217,4$  м/с.

С учётом  $v_a=217,4$  м/с действительное приращение скорости  $\Delta v_2$  составляет:

$$\Delta v_2 = \sqrt{v_{L1}^2 + v_a^2 - (2 \times v_{L1} \times v_a \times \cos i)} = 889,2 \text{ м/с}$$

### **Вывод на орбиту:**

Для выполнения необходимых ЛТХ первого этапа-это выход на НОО, необходимо в конце активного участка обеспечить определённую величину и направление скорости, которая существенно зависит от массово-энергетических характеристик РН.

Описание движения и расчёта конечной скорости использование только формулы Циолковского некорректно, из-за влияния на конечную скорость гравитационных (>75% всех потерь), аэродинамических потерь (<10% всех потерь) и потерь на противодействие при движении в атмосфере (<10% всех потерь). Данные потерь скорости на участке выведения представлены в табл. 3.

## Потери скорости некоторых РН, км/с

N	$\Delta v_i$	$\Delta u_i$	$\Delta u_g$	$\Delta u_c$	$\Delta u_a$	$\Delta u_p$	$\Delta u_{\omega}$	$\Delta u_{\square}$
<b>Saturn V</b>								
1	2.760	3.760	1.220	–	0.045	0.125	– 0.390	1.000
2	4.175	4.695	0.335	0.185	–	–	–	0.520
3	0.855	0.865	0.005	0.005	–	–	–	0.010
4	3.055	3.170	0.115	–	–	–	–	0.115
$\Delta$	10.845	12.490	1.675	0.190	0.045	0.125	– 0.390	1.645
<b>Titan II</b>								
1	2.500	3.820	1.090	–	0.120	0.110	0.000	1.320
2	4.705	5.260	0.410	0.145	–	–	–	0.555
$\Delta$	7.205 <sup>2)</sup>	9.080	1.500	0.145	0.120	0.110	0.000	1.875
<b>Одноступенчатый носитель (ОН)</b>								
1	7.790	9.090	1.075	0.145	0.100	0.265	– 0.285	1.300
<b>Зенит-2SLB</b>								
1	3.090	3.955	0.960	–	0.130	0.060	– 0.285	0.865
2	4.815	5.280	0.320	0.145	–	–	–	0.465
$\Delta$	7.905 <sup>3)</sup>	9.235	1.280	0.145	0.130	0.060	– 0.285	1.330

$v_k = \Delta v_{\text{хар}} - \Delta v_g - \Delta v_c - \Delta v_a - \Delta v_p$ , без учёта потерь на управление получаем:

$$\Delta \dot{v}_g = \dot{v}_s \cos \alpha - g \sin \theta \quad [2, \text{стр.66}]$$

$$\Delta v_g = \int_0^t v_s \cos \alpha dt - \int_0^t g \sin \theta dt$$

$$\dot{v}_s = \frac{P(t)}{M} - \frac{S_a p_{Hx}}{M} - \frac{c_{x_a} q S_M}{M} \quad [2, \text{стр.66}]$$

$$v_s = \int_0^t \frac{P(t)}{M} dt - \int_0^t \frac{S_a p_{Hx}}{M} dt - \int_0^t \frac{c_{x_a} q S_M}{M} dt$$

Где,  $\dot{v}_s$  – кажущееся ускорение,  $\alpha$ -угол между вектором скорости и ускорения,  $\theta$ -угол между вектором скорости и горизонтом,  $\mu$ -относительная масса летательного аппарата,  $M$ -масса ЛА,  $P$  - тяга двигателя, комплекс  $S_a = g m_k (n - n_0)$ ,  $n - n_0$ -соответственно начальная перегрузка в пустоте и у Земли,  $k_x$ -относительное давление на высоте,  $c_{x_a} q$  – произведение коэффициента аэродинамического сопротивления на скоростной напор,  $S_M$ -площадь миделя,  $p_{Hx}$  – относительное давление на высоте  $H$ .

С учётом, что  $\cos \alpha \approx 1$ , получаем:

$$v_k = \int_0^t \frac{P(t)}{M} dt - \int_0^t \frac{S_a p_{Hx}}{M} dt - \int_0^t \frac{c_{xa} q S_M}{M} dt - \int_0^t g \sin \theta dt$$

$$v_k = \Delta v_{\text{хар}} - \Delta v_p - \Delta v_a - \Delta v_g$$

$\Delta v_{\text{хар}}$  зависит от количества топлива и удельного импульса:

$$\Delta v_{\text{хар}} = -I_y \ln \mu_k$$

$\mu_k = \frac{m_k}{m_0}$  – относительная масса,

$m_k$  – конечная масса,

$m_0$  – начальная масса.

При движении РН со временем изменяется угол  $\theta$  и  $M$ , но считая  $\theta = \text{const}$  и  $M = \text{const}$  в каждый небольшой промежуток времени  $dt$  и считая все изменения скорости для данного промежутка времени, то получится общая картина движения, точность которой зависит от выбранного значения времени  $dt$ . Учитывая, что потери на сопротивление учитываются в изначальных характеристиках РН в виде изменения удельного импульса с высотой, то изменение скорости и расстояния для каждого маленького промежутка времени можно вычислить. Данный способ вычисления называется численным интегрированием.

Для вычислений была написана программа на языке программирования Python (приложение 4), которая может посчитать все кинематические параметры РН на каждом моменте полёта, от старта до отработки 2 ступени.

Принимаются изначальные данные:

Начальная масса ракеты	Тяга 1-й и 2-й ступени
Масса 1-ой ступени	Расход топлива 1-ой ступени
Масса 2-ой ступени	Расход топлива 2-ой ступени
Сухая масса 1-ой ступени	Промежуток времени $dt$

Данная программа вычисляет конечную скорость и высоту орбиты. Для проверки корректности работы программы использовались данные полезной нагрузки, которую может вывести РН Протон-М на ГПО (геопереходная орбита). В программе заложена программа тангажа, при которой достигается нулевой угол атаки в каждом промежутке времени.

Протон-М: в результате проверки программы относительная погрешность в конечной скорости составляет менее 3%, (10 005 м/с – по программе, 10 243 м/с – необходимая скорость в апогее ГПО).

Базовая масса 4-ого блока составляет 6 000 кг, тогда в результате расчёта в программе получаем 6 194 м/с после завершения работы 2-ой ступени (рис. 4). Приращение скорости, создаваемое блоком «Бриз-М» по формуле Циолковского составляет 3 791 м/с.

$$\Delta v_3 = -I_{\text{уп3}} \times \ln\left(\frac{M_{\text{кз}}}{M_{\text{нз}}}\right) = -3\,220 \times \ln\left(\frac{8\,370}{27\,170}\right) = 3\,791 \text{ м/с}$$

$\Delta v_3$  – приращение скорости 3-й ступени,  $I_{\text{уп3}}$  – удельный импульс 3-й ступени,  $M_{\text{кз}}$  – масса КА после отработки 3-й ступени,  $M_{\text{нз}}$  – масса КА в начале работы 3-й ступени.

Тогда скорость после отработки 3-й ступени составляет  $6\,194 + 3\,791 = 9\,985$  м/с, следовательно, приращение скорости для образования переходной орбиты составляет:

$$\Delta v_{1д} = v_{\text{п}} - v_2 = 10\,906,7 - 9\,985 = 921,7 \text{ м/с}$$

Тогда общее приращение скорости составляет  $\Delta v_2 + \Delta v_1 = 1\,810,9$  м/с.

1170.5335233242442 64423.343032824945 1643.467282514123  
606.3524355206927 199323.61541888647 6194.560394304338

Рис. 4. Результаты расчёта программы

## 2.4 Описание орбиты

$$\varepsilon = \frac{r_a - r_{\text{п}}}{r_a + r_{\text{п}}} = \frac{367\,047\,000 - 6\,571\,000}{367\,047\,000 + 6\,571\,000} = 0,964825035$$

$$b = a \times \sqrt{(1 - \varepsilon^2)} = 168\,485\,000 \times \sqrt{(1 - 0,964825035^2)} = 44\,293\,502,3 \text{ м}$$

$\varepsilon$  – эксцентриситет орбиты,  $b$  – малая полуось орбиты.

Траектория вывода на начальную орбиту и сама орбита представлены на рис. 5 и рис.6:

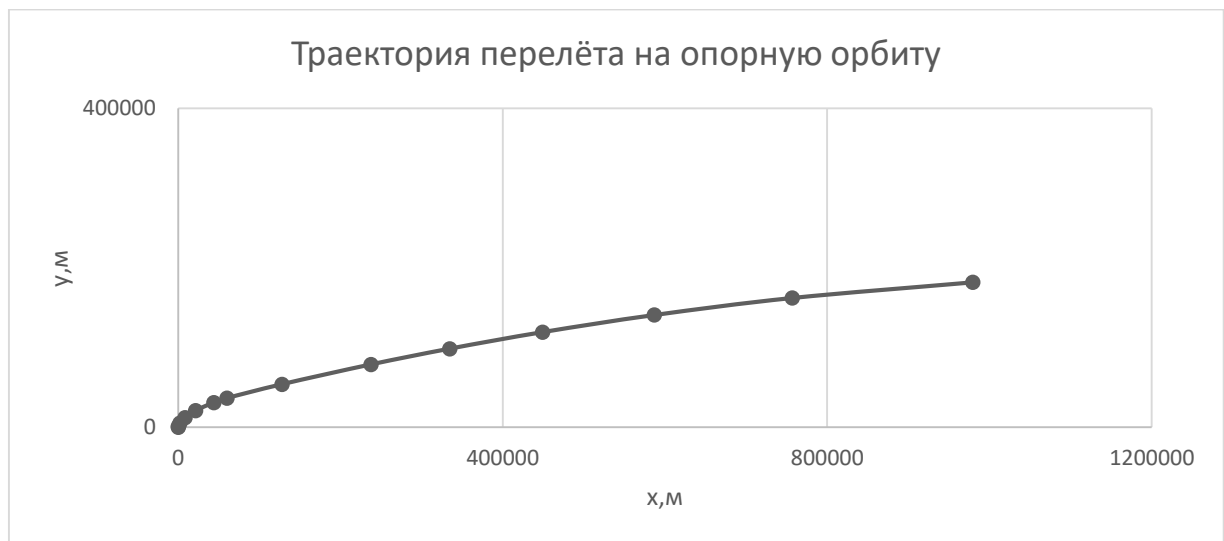


Рис. 5 Траектория перелёта на опорную орбиту.



Рис.6. Схема переходной орбиты.

### III. Расчёт массово-энергетических характеристик 4-ого блока.

#### 3.1 Выбор топлива

Удельный импульс является важнейшим показателем эффективности ракетного двигателя (РД) и достижение наибольшего значения является важной задачей проектирования РД.

Для достижения максимальной скорости из формулы Циолковского необходим наибольший удельный импульс в пустоте.

$$v_k = -I_{\text{уп}} \times \ln\left(\frac{M_k}{M_H}\right)$$

$$I_{\text{уп}} = w_a + \frac{(RT)_a}{w_a}$$

$M_k$ - масса конечная,  $M_H$ - масса начальная,  $w_a$ - скорость рабочего тела на срезе сопла.



$$w_a = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_k \left[ 1 - \left( \frac{p_a}{p_k} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

$$R = \frac{R_\mu}{\mu}$$

Где,  $\gamma$ -показатель адиабаты,  $\mu$ -молярная масса рабочего тела,  $R$  – удельная газовая постоянная,  $R_\mu$ -универсальная газовая постоянная.

Из формул видно, что конечная скорость ракеты обратно зависит от молярной массы рабочего тела, следовательно, в безвоздушном пространстве на 4-ой ступени, наиболее эффективным топливом для 4-ого блока является пара жидкие  $H_2$  и  $O_2$ . Данные компоненты топлива будут использованы в дальнейшем.

### 3.2 Проведение термодинамических расчётов в камере ЖРД с целью выбора оптимального соотношения компонентов топлива.

Рассмотрена зависимость изменения пустотного удельного импульса от изменения  $\alpha$  (коэффициента избытка окислителя).

$$\alpha = \frac{k_M}{k_M^0}$$

$$k_M = \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_r}$$

Где,  $k_M$ -действительное соотношение расходов окислителя и горючего,  $\dot{m}_o$ - расход окислителя,  $\dot{m}_r$ - расход горючего,  $k_M^0$ -стехиометрическое соотношение расходов окислителя и горючего (кислород-водород),  $k_M^0=8$ ,

Начальные условия расчёта:  $p_k=10$  МПа,  $I_{H_2}^{13K} = -3\,828$  кДж/кг,  $I_{O_2}^{54,2K} = -398$  кДж/кг,  $p_a=0,001$  МПа.

При использовании программы для термодинамических расчётов «Астра» была получены следующие результаты, таблица 4.

Таблица 4

$\alpha$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,72	0,74	0,76
$I_y$	4 168,9	4 433,6	4 581,7	4 668,8	4 718,9	4 743,7	4 746,2	4 747,9	4 748,9

$\alpha$	0,78	0,79	0,8	0,9	1	1,1	1,2
$I_y$	4 749,3	4 749,2	4 748,9	4 736,7	4 699,6	4 529,5	4 372,7

Данная зависимость была аппроксимирована с коэффициентом аппроксимации 0,9447 и была получена формула, описывающая зависимость на графике, рис. 7.

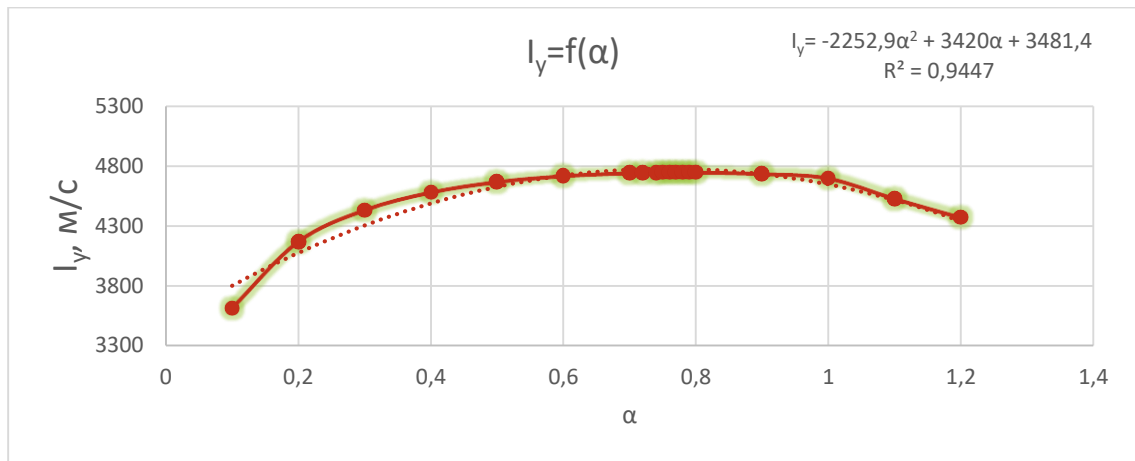


Рис. 7 Зависимость удельного импульса от коэффициента избытка окислителя  
Максимальное значение  $I_{уп} = 4\,749,3$  м/с обеспечивается при  $\alpha=0,78$ .

### 3.3 Построение профиля камера сгорания (КС).

$$L_{пр} = \frac{V_{кр}}{F_{кр}}$$

Величина приведённой длины камеры сгорания  $L_{пр}$  зависит от природы топлива и условий смесеобразования. Для пары кислород-водород  $L_{пр}=0,25-0,5$  м. Усредняя  $L_{пр}=0,3$  м.

$$G_f = \frac{\dot{m}}{F_{кр}}$$

Где  $G_f$  –расходнапряжённость КС,  $\dot{m}$  – расход топлива.

Для кислородного класса двигателя  $\frac{G_f}{p_{кр}} \times 10^4 = 1,1 - 1,3$ , усредняя  $\frac{G_f}{p_{кр}} \times 10^4 = 1,2$ .

В результате расчётов в программе «Астра» где,  $p_{кр}=10$  МПа,  $p_a=1500$  Па ,  $F_{тяги}=70\,000$  н получаем:  $\dot{m}=14,739$  кг/с,  $F_a/F_{кр}=311,058$ . Из уравнения Менделеева-Клайперона:

$$nR_{\mu}T = pV$$

$n$  - количество молей вещества,  $V$ -объём,  $T$ -температура.

$$\rho = \frac{p\mu}{R_{\mu}T}$$

Для расхода газа:

$$\dot{m} = (\rho w F)_a$$

$\rho$ -плотность газа.

Приравнивая по плотности получаем:

$$F_a = \frac{R_{\mu}T_a\dot{m}}{(p\mu w)_a} = \frac{8,314 \times 869,354 \times 14,7394}{1500 \times 0,0144953 \times 4640,16} = 1,0559 \text{ м}^2$$

$$F_{кр} = F_a / 311,058 = 0,0033946 \text{ м}^2$$

$$F_K = \frac{\dot{m}}{1,2p_K} 10^4 = \frac{14,7394}{12\,000\,000} 10^4 = 0,012283 \text{ м}^2$$

$$\overline{F}_K = \frac{F_K}{F_{кр}} = \frac{L_{пп}}{L_K} = 3,6184, L_K = \frac{F_{кр} \times L_{пп}}{F_K} = \frac{0,00339457 \times 0,3}{0,012283} = 0,0829 \text{ м}$$

$\overline{F}_K$ -относительная площадь камеры.

$$R_1 = 2R_{кр} = 0,06574 \text{ м}$$

$$\rho_x = \frac{R_2}{R_K} = 0,25 \times 10^{-6} p_K = 2,5$$

$$R_2 = R_K \times 0,25 \times 10^{-6} p_K = 0,06253 \times 0,25 \times 10 = 0,156325 \text{ м}$$

$$l_{BX} = R_{кр} \sqrt{\left(2 + \rho \sqrt{\overline{F}_K}\right)^2 - \left[(\rho - 1) \sqrt{\overline{F}_K} + 3\right]^2} = 0,03287 \times$$

$$\sqrt{\left(2 + 2,5 \sqrt{3,6184}\right)^2 - \left[(2,5 - 1) \sqrt{3,6184} + 3\right]^2} = 0,11086 \text{ м}$$

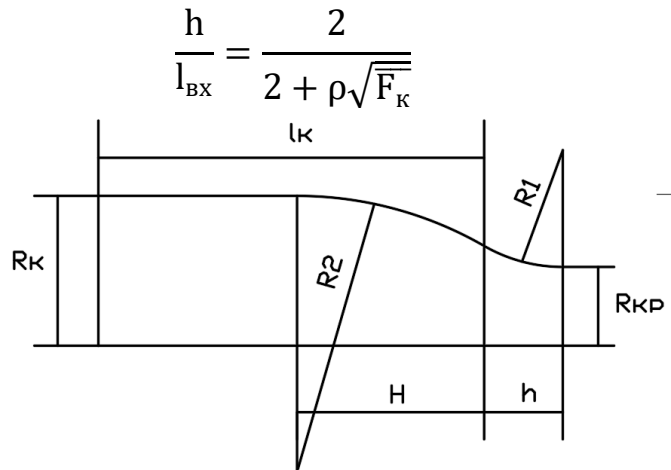


Рис. 8 Построение профиля камеры сгорания.

$$h = \frac{2l_{BX}}{2 + \rho \sqrt{\overline{F}_K}} = \frac{2 \times 0,11086}{2 + 2,5 \sqrt{3,6184}} = 0,03282 \text{ м}$$

$$H = l_{BX} - h = 0,11086 - 0,03282 = 0,078 \text{ м}$$

Считая значения габаритных размеров КС при разных  $p_a$  получаем (табл. 5).

Таблица 5

№	1	2	3	4	5	6
$p_a$ , па	1500	1200	1000	900	800	700
$F_K$ , м2	0,01228	0,01224	0,01220	0,01218	0,01216	0,01214
$R_K$ , м	0,06253	0,06241	0,06232	0,06227	0,06222	0,06216
$L_K$ , м	0,08291	0,08291	0,08288	0,08291	0,08291	0,08291
$F_{кр}$ , м2	0,00339	0,00338	0,00337	0,00337	0,00336	0,00335
$R_{кр}$ , м	0,03287	0,03281	0,03276	0,03274	0,03271	0,03268

$F_{a, м2}$	1,05590	1,24529	1,42489	1,54020	1,68016	0,76826
№	1	2	3	4	5	6
$R1, м$	0,06574	0,06562	0,06551	0,06548	0,06542	0,06536
$R2, м$	0,15632	0,15603	0,15581	0,15568	0,15555	0,15540
$L_{BX}, м$	0,11087	0,11066	0,11051	0,11042	0,11032	0,11022
$h, м$	0,03282	0,03276	0,03271	0,03269	0,03266	0,03263
$H, м$	0,07805	0,07790	0,07780	0,07773	0,07766	0,07759
$I_{y,с}$	484,126	485,925	487,322	488,100	488,945	489,873

### 3.4 Построение сопла по методу Рао.

Для построения газодинамического профиля камеры ЖРД и сопла на чертеже, необходимо воспользоваться специальной методикой [4].

Для построения сопла необходимо знать показатель адиабаты( $\gamma$ ),угол касательной на срезе ( $\beta_a$ ),относительный диаметр среза ( $\bar{D}_a$ ).

$$\bar{D}_a = \frac{R_a}{R_{кр}} = \frac{0,57976}{0,03287} = 17,637$$

При  $\beta_a = 8^\circ$ ,  $\gamma = 1,2$  (по термодинамическим расчётам в «Астра»), находим  $\bar{x}_a$  и  $\beta_m$  методом интерполяции из таблицы учебника Кудрявцева  $\bar{x}_a = 52,782$ ,  $\beta_m = 41,1^\circ$ .

$$\bar{x}_a = \frac{x_a}{R_{кр}} = \frac{x_a}{0,03287} = 52,782$$

$$x_a = 52,782 \times 0,03287 = 1,735 \text{ м}$$

$x_a$ - длина сопла.

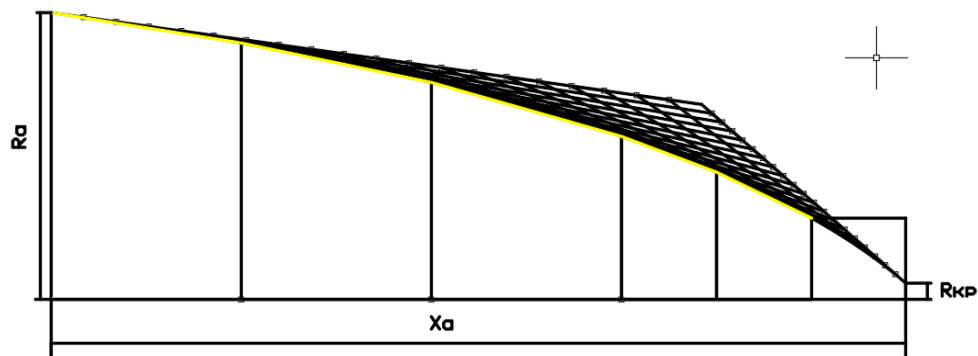


Рис. 9 Построение профиля сопла.

В таблице 6 приведены  $x_a$  и  $\beta_a$  при разных  $p_a$ .

Таблица 6

№	1	2	3	4	5	6
$p_a, \text{па}$	1500	1200	1000	900	800	700
$\bar{x}_a$	52,782	57,684	61,965	64,611	67,680	71,336
$\bar{D}_a$	17,637	19,189	20,555	21,388	22,358	23,510
$x_a, \text{м}$	1,735	1,893	2,030	2,115	2,214	2,331
$\beta_a, ^\circ$	41,1	41,7	42,1	42,4	42,7	43,0

--	--	--	--	--	--	--

В программе AutoCad было построено сопло по исходным данным.

Для определения массы данного сопла, оно было поделено на 5 усечённых конусов неохлаждаемой части. После критического сечения присутствует охлаждаемая часть, радиус основания усечённого конуса охлаждаемой части равен  $5R_{кр}$ .

Площадь поверхности неохлаждаемой части:  $41\,649\text{ см}^2$ , тогда при толщине стенок  $1,5\text{ мм}$  и плотности материала  $8,4\text{ г/см}^3$  (нержавеющая сталь) масса неохлаждаемой части сопла –  $52,477\text{ кг}$ .

Применяя аналогичную методику для определения массы других сопел получается, таблица 7:

Таблица 7

№	1	2	3	4	5	6
$p_a, \text{ па}$	1500	1200	1000	900	800	700
масса сопла, кг	52,477	62,491	71,897	77,980	85,413	94,615

### 3.5 Расчёт массы 4-ого блока.

Для приблизительной оценки массы конструкции 4-ого блока, при массе топлива  $m_{\text{топ}}=2200\text{ кг}$ , воспользуемся следующими формулами [2]:

Масса горючего, при  $\alpha = 0,78$  составляет:

$$k_M = \frac{m_{\text{ок}}}{m_{\text{гор}}} = \alpha \times k_M^0 = 0,78 \times 8 = 6,24$$

$$k_M + 1 = \frac{m_{\text{ок}} + m_{\text{гор}}}{m_{\text{гор}}} = \frac{m_{\text{топ}}}{m_{\text{гор}}} = 7,24$$

$$m_{\text{гор}} = \frac{m_{\text{топ}}}{k_M + 1} = 303,867\text{ кг}$$

$$m_{\text{ок}} = m_{\text{топ}} - m_{\text{гор}} = 1896,133\text{ кг}$$

$m_{\text{ок}}$ -масса кислорода в баке окислителя,  $m_{\text{гор}}$ -масса водорода в баке горючего,  $m_{\text{топ}}$ -общая масса топлива в баках.

$$V_{\text{гор}} = \frac{m_{\text{гор}}}{\rho_{\text{гор}}} = 4,28\text{ м}^3$$

$$V_{\text{ок}} = \frac{m_{\text{ок}}}{\rho_{\text{ок}}} = 1,662\text{ м}^3$$

$V_{\text{гор}}$ -объём водорода в баке горючего,  $\rho_{\text{гор}}=71\text{ кг/м}^3$ -плотность водорода,  $V_{\text{ок}}$ -объём кислорода в баке окислителя,  $\rho_{\text{ок}}=1\,141\text{ кг/м}^3$ -плотность кислорода.

Заполняемость топливных баков составляет 97% объёма, тогда объёмы баков:

$$V_{\text{гор}}=4,412 \text{ м}^3, V_{\text{бок}}=1,713 \text{ м}^3$$

Форма бака горючего была выбрана цилиндрическая со сферическими днищами, а форма бака окислителя – сферическая.

Радиус сферического бака составляет:

$$r_{\text{ок}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times V_{\text{бок}}}{4 \times \pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 1,713}{4 \times 3,1415}} = 0,742 \text{ м}$$

Тогда толщина стенки бака составляет:

$$\delta_{\text{ок}} = \frac{p_{\text{над ок}} r_{\text{ок}}}{2\sigma} = \frac{155\,000 \times 1,5 \times 0,742}{2 \times 190\,000\,000} = 0,000454 \text{ м} = 0,454 \text{ мм}$$

Где  $p_{\text{над ок}}$ -максимальное давление наддува бака окислителя (для бака кислорода составляет примерно 1,55 атм.),  $f$ -коэффициент безопасности,  $\sigma$ -предел текучести материала бака (для АЛ27, алюминиево-магниевый сплав, составляет 190 МПа).

Значит масса бака окислителя составляет:

$$m_{\text{б ок}} = k_{\text{сф}} \pi D_{\text{ок}}^2 \rho_{\text{бак}} \delta_{\text{ок}} = 1,3 \times 3,1415 \times 1,484^2 \times 2550 \times 0,000454 = 10,412 \text{ кг}$$

Где  $k_{\text{сф}}$ -эмпирический коэффициент(составляет 1,2-1,3),  $D_{\text{ок}} = 2r_{\text{ок}} = 1,484 \text{ м}$  - диаметр бака,  $\rho_{\text{бак}}$ -плотность материала бака (для АЛ27 составляет 2550 кг/м<sup>3</sup>)

Радиус бака горючего должен примерно совпадать с радиусом бака окислителя, тогда  $r_{\text{гор}}=0,8 \text{ м}$ .

Радиус сфер днищ составляет  $r_{\text{дн}}=1,3r_{\text{гор}}=1,04 \text{ м}$ , тогда можно определить высоту днищ  $h_{\text{дн}}$ .

$$(r_{\text{дн}} - h_{\text{дн}})^2 + r_{\text{гор}}^2 = r_{\text{дн}}^2$$
$$h_{\text{дн}} = r_{\text{дн}} - \sqrt{r_{\text{дн}}^2 - r_{\text{гор}}^2} = 1,04 - \sqrt{1,04^2 - 0,8^2} = 0,376 \text{ м}$$

Объём днища бака составляет:

$$V_{\text{дн}} = \pi h_{\text{дн}}^2 \left( r_{\text{дн}} - \frac{1}{3} h_{\text{дн}} \right) = 3,1415 \times 0,376^2 \left( 1,04 - \frac{1}{3} \times 0,376 \right) = 0,406 \text{ м}^3$$

В баке 2 днища, тогда длина бака  $L_{\text{бг}}$  составляет:

$$L_{\text{бг}} = \frac{V_{\text{гор}} - 2V_{\text{дн}}}{\pi r_{\text{гор}}^2} + 2h_{\text{дн}} = \frac{4,412 - 2 \times 0,406}{3,1415 \times 0,8^2} + 2 \times 0,376 = 2,603 \text{ м}$$

Тогда масса бага горючего составляет:

$$m_{\text{б гор}} = k_{\text{ц.б.}} \frac{\pi \rho_{\text{бак}} f}{2 \sigma} p_{\Sigma o} D_{\text{гор}}^3 \left[ \lambda - \frac{1}{n} + \frac{n n^2 + 1}{4 n^2} \right] = 75,5 \text{ кг}$$

Где  $k_{\text{ц.б.}}=1,3$  – коэффициент, учитывающий массу шпангоутов и арматуры бака,  $p_{\Sigma o} = p_{\text{над ок}} + h_{\text{пол}} \rho_{\text{гор}} g_0 n_x$ ,  $p_{\text{над ок}}=2,39$  атм – давление наддува бака горючего,  $h_{\text{пол}}=2,603$  м - высота столба жидкости,  $g_0=9,81$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения,  $n_x \approx 5$  – максимальная продольная перегрузка перегрузка,  $n = \frac{D_{\text{гор}}}{2h_{\text{дн}}} = 2,128$ ,  $D_{\text{гор}} = 2r_{\text{гор}} = 1,6$  – диаметр бака,  $\lambda = \frac{L_{\text{бг}}}{D_{\text{гор}}} = 1,627$ .

Масса рабочего тела бака окислителя наддува (гелий) при холодной системе наддува определяется формулой:

$$m_{\text{над ок}} = \frac{p_{\text{над ок}} V_{\text{бок}}}{R_{\text{He}} T_{\text{He}}} z = \frac{155\,000 \times 1,713}{2\,078 \times 273} \times 1,03 = 0,482 \text{ кг}$$

$R_{\text{He}} = 2\,078 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  – газовая постоянная гелия,  $T_{\text{He}} = 273$  К – температура гелия,  $z \approx 1,03$  – коэффициент сжимаемости гелия.

Масса рабочего тела бака горючего:

$$m_{\text{над гор}} = \frac{p_{\text{над гор}} V_{\text{бгор}}}{R_{\text{He}} T_{\text{He}}} z = \frac{239\,000 \times 4,412}{2\,078 \times 273} \times 1,03 = 1,915 \text{ кг}$$

Площадь поверхности бака окислителя:

$$S_{\text{ок}} = 4\pi r_{\text{ок}}^2 = 4 \times 3,1415 \times 0,742^2 = 6,918 \text{ м}^2$$

Площадь поверхности бака окислителя:

$$S_{\text{гор}} = 4\pi r_{\text{дн}} h_{\text{дн}} + 2\pi r_{\text{гор}} (L_{\text{бг}} - 2h_{\text{дн}}) = 14,218 \text{ м}^2$$

Масса теплозащиты при общей площади поверхности  $S_{\text{общ}} = S_{\text{ок}} + S_{\text{гор}} = 6,918 + 14,218 = 21,136 \text{ м}^2$ :

$$m_{\text{тпз}} = \overline{m}_{\text{тпз}} S_{\text{общ}} = 21,136 \text{ кг}$$

$\overline{m}_{\text{тпз}} = 1 \text{ кг/м}^2$ - для теплозащиты (многослойная теплоизоляция на основе экранно-вакуумной изоляции(ЭВТИ)).

Масса гаргротов:

$$m_{\text{гар}} = \overline{m}_{\text{гар}} L_{\text{корп}} = 3 \times 4 = 12 \text{ кг}$$

$$\overline{m}_{\text{гар}} = 3 \frac{\text{кг}}{\text{м}}, L_{\text{корп}} \approx 4 \text{ м} - \text{длина корпуса}$$

Масса окраски:

$$m_{\text{окр}} = \overline{m}_{\text{окр}} S_{\text{общ}} = 0,2 \times 21,136 = 4,227 \text{ кг}$$

$\overline{m}_{\text{окр}} = 0,2 \text{ кг/м}^2$  – относительная масса окраски.

Масса двигателя:

$$m_{\text{дв}} = \gamma_{\text{дв}} F_{\text{тяг}} = 1,4 \times 70\,000 = 98 \text{ кг}$$

$\gamma_{\text{дв}}$  – относительная масса двигателя, при  $F_{\text{тяг}} = 70\,000 \text{ Н}$   $\gamma_{\text{дв}} \approx 1,4 \text{ г/Н}$ .

Суммарная масса оборудования:

$$m_{\text{об}} = 300 + 0,9 \times 10^{-3} m_0 = 300 + 0,9 \times 10^{-3} \times 6\,000 = 305,4 \text{ кг}$$

$m_0 \approx 6\,000 \text{ кг}$  – стартовая масса.

Масса коммуникаций:

$$m_{\text{ком}} = (0,5) \frac{m_{\text{ок}}}{\rho_{\text{ок}}} + (0,5) \frac{m_{\text{гор}}}{\rho_{\text{гор}}} = 3 \text{ кг}$$

Масса неучтённых элементов:

Крепёжные узлы и детали:

$$m_{\text{креп}} = (0,8) 10^{-4} F_{\text{тяг}} = 5,6 \text{ кг}$$

Стабилизаторы:

$$m_{\text{стаб}} = (0,7) 10^{-3} m_0 = 4,2 \text{ кг}$$

Элементы системы разделения:

$$m_{\text{с.р.}} = (0,3) 10^{-3} m_0 = 1,8 \text{ кг}$$

Другие неучтённые элементы:

$$m_{\text{стаб}} = (4) 10^{-3} m_0 = 24 \text{ кг}$$

Итого масса конструкции составляет:

$$m_{\text{конс}} = m_{\text{б ок}} + m_{\text{б гор}} + m_{\text{над ок}} + m_{\text{над гор}} + m_{\text{тпз}} + m_{\text{гар}} + m_{\text{окр}} + m_{\text{дв}} + m_{\text{об}} + m_{\text{ком}} + m_{\text{креп}} + m_{\text{стаб}} + m_{\text{с.р.}} + m_{\text{стаб}} \approx 567,6 \text{ кг}$$

Масса конечная, после использования всего топлива:

$$m_{\text{кон}} = m_{\text{конс}} + m_{\text{груза}} = 567,6 + 3\,270 = 3\,837,6 \text{ кг}$$

$m_{\text{груза}} = 3\,270 \text{ кг}$  – масса спутника.

Полная масса 4-ой ступени:

$$m_{40} = m_{\text{кон}} + m_{\text{топ}} = 3\,837,6 + 2\,200 = 6\,037,6 \text{ кг}$$

### **3.6 Расчёт оптимальной геометрической степени расширения сопла.**

Увеличение площади среза сопла ведёт к увеличению удельного импульса двигателя, но при этом приводит к увеличению массы сопла и, следовательно, конечной



массы 4-ого блока (ф. Циолковского). Тогда функция  $v_k=f(F_a)$ , будет возрастать до определённого значения, достигнет своего максимума и начнёт убывать. Необходимо найти максимум данной функции, при котором достигается максимальная конечная скорость.

Таким образом максимальная конечная скорость КА при разных соплах будут отличаться:  $\Delta v_{\max}$

Таблица 8

$p_a$ , па	1500	1200	1000	900	800	700
$\Delta v_{\max}$	2152	2156	2158	2158	2159	2159
$F_a/F_{кр}$	311,1	368,2	422,5	457,5	499,9	552,7

Максимальное приращение скорости получается для сопла №5, оно составляет 2158,73 м/с.

На графике показана зависимость приращения скорости от давления на срезе. Зависимость была аппроксимирована с коэффициентом аппроксимации 0,9953.

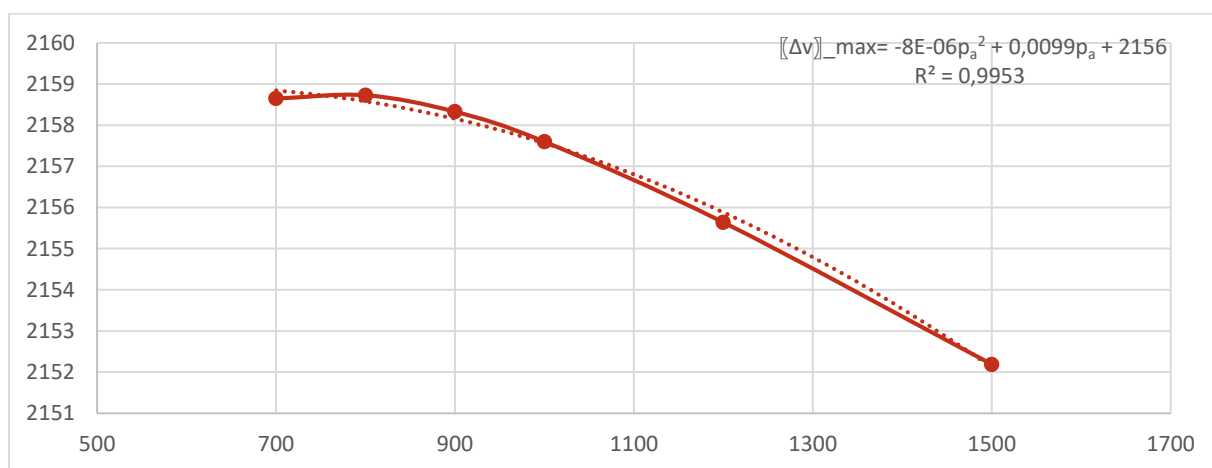


Рис. 10. Зависимость максимального приращения скорости от давления на срезе сопла.

В итоге 4-й блок выглядит следующим образом, рисунок 11:

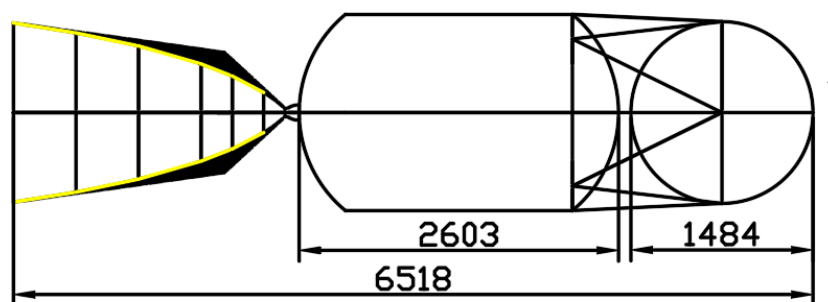


Рис. 11. Итоговый чертёж 4-ого блока

## **Итоги:**

Проведены баллистические расчёты вывода КА на орбиту в точке либрации L1 системы Земля-Луна.

Написана и протестирована баллистическая программа на языке программирования Python для вывода КА на начальную орбиту.

Написана и протестирована баллистическая программа на языке программирования Python для решения частного случая задачи 3-х тел Земля-КА-Луна.

Создан вариант 4-ого блока, который подходит для выполнения задачи.

Найден оптимальный вариант геометрического расширения сопла, который позволит достичь наибольшей конечной скорости.

## Приложение 1

Программа решения задачи ограниченной задачи трёх тел.

```
import math
```

```
v3=217.4 #скорость в апогее
```

```
t=0.05 #маленький промежуток времени
```

```
xa=0 #начальная координата КА по оси x
```

```
ya=330399000 #начальная координата КА по оси y
```

```
za=0.0000001 #начальная координата КА по оси z
```

```
T=0 #начальный момент времени
```

```
vxa=v3*math.cos(1.52923376) #вычисление скорости по оси x
```

```
vya=-0.0000001 # скорость по оси y
```

```
vza=v3*math.sin(1.52923376) #вычисление скорости по оси z
```

```
uglun=0 #начальный угол Луны
```

```
xlun=0 #начальная координата Луны по x
```

```
ylun=363104000 #начальная координата Луны по y
```

```
zlun=0 #начальная координата Луны по z
```

```
rze=200000000000 #вспомогательная переменная
```

```
vo=0
```

```
for i in range(10596000000):
```

```
    kx=rze #вспомогательная переменная
```

```
    T=T+t #вычисление времени
```

```
    a=rze #вспомогательная переменная
```

```
    rze=((xa**2)+(ya**2)+(za**2))**0.5 #вычисление расстояния от КА до Земли
```

```
    g=-39858919599999.94/(rze**2) #вычисление ускорения КА от Земли
```

```
    V1=vo #вспомогательная переменная
```

```
    uglun=uglun+0.0000001330794 #изменение угла Луны
```

```
    xlun=363104000*math.cos(uglun) #вычисление координаты x Луны
```

```
    ylun=363104000*math.sin(uglun) #вычисление координаты y Луны
```

```
    zlun=0 #вычисление координаты z Луны
```

```
    xma=xlun-xa #вычисление расстояние от Луны до КА по x
```

```
    yma=ylun-ya #вычисление расстояние от Луны до КА по y
```

```
    zma=zlun-za #вычисление расстояние от Луны до КА по z
```

```
    rlun=((xma**2)+(yma**2)+(zma**2))**0.5 #вычисление расстояние от Луны до
```

КА

```
    glun=4902450000000/(rlun**2) #вычисление ускорения КА вызываемого
```

Луной

```
    azlun=math.sin(math.atan(zma/(((yma**2)+(xma**2))**0.5)))*glun #вычисление  
    ускорения КА вызываемого Луной по x
```

```

aylun=math.sin(math.atan(yma/(((zma**2)+(xma**2))**0.5)))*glun #вычисление
ускорения КА вызываемого Луной по y
axlun=math.sin(math.atan(xma/(((yma**2)+(zma**2))**0.5)))*glun #вычисление
ускорения КА вызываемого Луной по z

```

```

ug1=math.atan(za/(((ya**2)+(xa**2))**0.5)) #вычисление угла для поиска
ускорения действующего от Земли на КА на оси
ug2=math.atan(ya/(((za**2)+(xa**2))**0.5)) #вычисление угла для поиска
ускорения действующего от Земли на КА на оси
ug3=math.atan(xa/(((ya**2)+(za**2))**0.5)) #вычисление угла для поиска
ускорения действующего от Земли на КА на оси

```

```

axze=g*math.sin(ug3)+axlun #вычисление общего ускорения КА на оси x
ayze=g*math.sin(ug2)+aylun #вычисление общего ускорения КА на оси y
azze=g*math.sin(ug1)+azlun #вычисление общего ускорения КА на оси z

```

```

vxa=vxa+axze*t #вычисление скорости на оси x
vya=vya+ayze*t #вычисление скорости на оси y
vza=vza+azze*t #вычисление скорости на оси z

```

```

xa=xa+vxa*t+(axze*(t**2))/2 #вычисление координаты на оси x
ya=ya+vya*t+(ayze*(t**2))/2 #вычисление координаты на оси y
za=za+vza*t+(azze*(t**2))/2 #вычисление координаты на оси z

```

```

vo=((vxa**2)+(vya**2)+(vza**2))**0.5 #вычисление скорости КА
if rze>kx:
    break
else:
    g=g
print(vxa,vya,vza,xa,ya,za,rze,uglun,glun,g,kx)

```

## Приложение 2

Тестовая задача 1.

Определение скорости КА на круговой орбите Земли после половины витка.

```

import math
t=0.005 #маленький промежуток времени
xa=0 #начальная координата по оси x
ya=6571000 #начальная координата по оси y
za=0.0000000000000001 #начальная координата по оси z
T=0 #начальный момент времени
vxa=7788.5 #начальная скорость по x
vya=0 #начальная скорость по y
vza=0 #начальная скорость по z
uglun=0 #начальный угол Луны
xlun=0 #начальная координата Луны по x
ylun=363104000 #начальная координата Луны по y
zlun=0 #начальная координата Луны по z

```

```

rze=0 #вспомогательное переменная
vo=0 #вспомогательное переменная
for i in range(65881181):
    T=T+t #вычисление времени
    a=rze #вспомогательная переменная
    rze=((xa**2)+(ya**2)+(za**2))**0.5 #вычисление расстояния до Земли
    g=-398589195999999.94/(rze**2) #вычисление ускорения КА от Земли
    V1=vo #вспомогательная переменная
    xlun=363104000*math.sin(uglun) #расстояние от Земли до луны по x
    ylun=363104000*math.cos(uglun) #расстояние от Земли до луны по y
    zlun=0 #расстояние от Земли до луны по z

```

```

xma=xlun-xa #вычисление расстояние от Луны до КА по x
yma=ylun-ya #вычисление расстояние от Луны до КА по y
zma=zlun-za #вычисление расстояние от Луны до КА по z

```

```

rlun=((xma**2)+(yma**2)+(zma**2))**0.5 #вычисление расстояние от Луны до
КА

```

```

glun=0 #без учёта гравитационного влияния Луны

```

```

axlun=math.sin(math.atan(xma/(((yma**2)+(zma**2))**0.5)))*glun #вычисление
ускорения КА вызываемого Луной по x
aylun=math.sin(math.atan(yma/(((zma**2)+(xma**2))**0.5)))*glun #вычисление
ускорения КА вызываемого Луной по y
azlun=math.sin(math.atan(zma/(((yma**2)+(xma**2))**0.5)))*glun #вычисление
ускорения КА вызываемого Луной по z

```

```

ug1=math.atan(za/(((ya**2)+(xa**2))**0.5)) #вычисление угла для поиска
ускорения действующего от Земли на КА на оси
ug2=math.atan(ya/(((za**2)+(xa**2))**0.5)) #вычисление угла для поиска
ускорения действующего от Земли на КА на оси
ug3=math.atan(xa/(((ya**2)+(za**2))**0.5)) #вычисление угла для поиска
ускорения действующего от Земли на КА на оси

```

```

axze=g*math.sin(ug3)+axlun #вычисление общего ускорения КА на оси x
ayze=g*math.sin(ug2)+aylun #вычисление общего ускорения КА на оси y
azze=g*math.sin(ug1)+azlun #вычисление общего ускорения КА на оси z

```

```

vxa=vxa+axze*t #вычисление скорости на оси x
vya=vya+ayze*t #вычисление скорости на оси y
vza=vza+azze*t #вычисление скорости на оси z

```

```

xa=xa+vxa*t+(axze*(t**2))/2 #вычисление координаты на оси x
ya=ya+vya*t+(ayze*(t**2))/2 #вычисление координаты на оси y
za=za+vza*t+(azze*(t**2))/2 #вычисление координаты на оси z

vo=((vxa**2)+(vya**2)+(vza**2))**0.5 #вычисление скорости КА
if vya>0: #условия остановки программы
    break
else:
    g=g

print(vxa,vya,vza,xa,ya,za,rze,uglun,glun,g)

```

### *Приложение 3.*

#### Тестовая задача 2.

Определение скорости КА на круговой орбите Луны после половины витка.

```

import math
t=0.005 #маленькие промежутки времени
xa=0 #начальная координата по оси x
ya=362000000 #начальная координата по оси y
za=0.000000000000000001 #начальная координата по оси z
T=0 #начальный момент времени
vxa=2107 #начальная скорость по x
vya=0 #начальная скорость по y
vza=0 #начальная скорость по z
uglun=0 #начальный угол Луны
xlun=0 #начальная координата Луны по x
ylun=363104000 #начальная координата Луны по y
zlun=0 #начальная координата Луны по z
rze=0 #вспомогательная переменная
vo=0 #вспомогательная переменная
for i in range(65881181):
    T=T+t #вычисление времени
    a=rze #вспомогательная переменная
    rze=((xa**2)+(ya**2)+(za**2))**0.5 #вычисление расстояния до Земли
    g=0 #проверка без учёта гравитационного влияния Земли

    V1=vo #вспомогательная переменная

    xlun=363104000*math.sin(uglun) #расстояние от Земли до луны по x
    ylun=363104000*math.cos(uglun) #расстояние от Земли до луны по y
    zlun=0 #расстояние от Земли до луны по z

    xma=xlun-xa #вычисление расстояние от Луны до КА по x
    yma=ylun-ya #вычисление расстояние от Луны до КА по y
    zma=zlun-za #вычисление расстояние от Луны до КА по z

```

```

    rlun=((xma**2)+(yma**2)+(zma**2))**0.5 #вычисление расстояние от Луны до
КА

    glun=4902450000000/(rlun**2)      #вычисление ускорения КА вызываемого
Луной

    axlun=math.sin(math.atan(xma/(((yma**2)+(zma**2))**0.5)))*glun #вычисление
ускорения КА вызываемого Луной по x
    aylun=math.sin(math.atan(yma/(((zma**2)+(xma**2))**0.5)))*glun #вычисление
ускорения КА вызываемого Луной по y
    azlun=math.sin(math.atan(zma/(((yma**2)+(xma**2))**0.5)))*glun #вычисление
ускорения КА вызываемого Луной по z

    ug1=math.atan(za/(((ya**2)+(xa**2))**0.5))      #вычисление угла для поиска
ускорения действующего от Земли на КА на оси
    ug2=math.atan(ya/(((za**2)+(xa**2))**0.5))      #вычисление угла для поиска
ускорения действующего от Земли на КА на оси
    ug3=math.atan(xa/(((ya**2)+(za**2))**0.5))      #вычисление угла для поиска
ускорения действующего от Земли на КА на оси
    axze=g*math.sin(ug3)+axlun #вычисление общего ускорения КА на оси x
    ayze=g*math.sin(ug2)+aylun #вычисление общего ускорения КА на оси y
    azze=g*math.sin(ug1)+azlun #вычисление общего ускорения КА на оси z

    vxa=vxa+axze*t #вычисление скорости на оси x
    vya=vya+ayze*t #вычисление скорости на оси y
    vza=vza+azze*t #вычисление скорости на оси z

    xa=xa+vxa*t+(axze*(t**2))/2 #вычисление координаты на оси x
    ya=ya+vya*t+(ayze*(t**2))/2 #вычисление координаты на оси y
    za=za+vza*t+(azze*(t**2))/2 #вычисление координаты на оси z

    vo=((vxa**2)+(vya**2)+(vza**2))**0.5 #вычисление скорости КА
    if vya<0: #условия остановки программы
        break
    else:
        g=g
    print(vxa,vya,vza,xa,ya,za,rze,uglun,glun,g)

```

#### *Приложение 4*

```
import math
```

```
m=654370 #стартовая масса
```

```
M=m
```

```
f=10024000 #тяга двигателей 1-ой ступени
```

```
d=3429.46 #расход двигателей 1-ой ступени
```

```
vve=0 #начальная вертикальная скорость
```

```

sve=0 #начальная высота взлёта
vvp=0 #начальная горизонтальная скорость
t=0.001 #маленький промежуток времени dt
Q=0 #начальная сила сопротивления воздуха
Qmx=0
T=0 #начальный момент времени
while m>(M-428300): #условия полёта 1 ступени

    T=T+t

    g=3984791400000000/((6371000+sve)**2) #расчёт ускорения свободного падения

    if sve<500: #плотности воздуха от высоты
        plot=1.25
    elif 500<=sve<1000:
        plot=1.11
    elif 1000<=sve<1500:
        plot=1.058
    elif 1500<=sve<2000:
        plot=1
    elif 2000<=sve<2500:
        plot=0.95
    elif 2500<=sve<3000:
        plot=0.9
    elif 3000<=sve<3500:
        plot=0.81
    elif 3500<=sve<4000:
        plot=0.84
    elif 4000<=sve<4500:
        plot=0.8
    elif 4500<=sve<5000:
        plot=0.73
    elif 5000<=sve<6000:
        plot=0.66
    elif 6000<=sve<7000:
        plot=0.59
    elif 7000<=sve<8000:
        plot=0.525
    elif 8000<=sve<9000:
        plot=0.467
    elif 9000<=sve<10000:
        plot=0.41
    elif 10000<=sve<11000:
        plot=0.37
    elif 11000<=sve<12000:
        plot=0.31

```



```

elif 12000<=sve<14000:
    plot=0.23
elif 14000<=sve<16000:
    plot=0.16
elif 16000<=sve<18000:
    plot=0.1216
elif 18000<=sve<20000:
    plot=0.0889
elif 20000<=sve<24000:
    plot=0.0469
elif 24000<=sve<28000:
    plot=0.0251
elif 28000<=sve<32000:
    plot=0.0136
else:
    plot=0

if T<10: #промежуток времени с вертикальным направлением вектора тяги
    gr=1.57079

else:
    gr=gr-(60*3.1415927/180/(111350))

f=10024000-Q #учёт силы сопротивления воздуха

fve=f*math.sin(gr) #расчёт вертикальной силы
fvn=m*g #вычисление силы тяжести
ave=(fve-fvn)/m #вычисление ускорения
sve=sve+vve*t+((ave*(t**2))/2) #вычисление высоты
vve=vve+ave*t #вычисление вертикальной скорости

fvp=f*math.cos(gr) #вычисление горизонтальной силы
avp=fvp/m #вычисление горизонтального ускорения
vvp=vvp+avp*t #вычисление горизонтальной скорости
m=m-d*0.001
v=((vve**2)+((vvp)**2))**0.5 #вычисление общей скорости
if v<100:
    Q=(0.3*(v**2)*40*plot)/2 #расчёт сопротивления воздуха
elif 100<=v<200:
    Q=(0.4*(v**2)*40*plot)/2
elif 200<=v<340:
    Q=(0.3*(v**2)*40*plot)/2
elif 340<=v<680:
    Q=(0.3*(v**2)*40*plot)/2
elif 680<=v<1000:

```

```

    Q=(0.2*(v**2)*40*plot)/2
else:
    Q=(0.2*(v**2)*40*plot)/2

if Q>Qmx:
    Qmx=Q
else:
    Q=Q

print(vve,sve,vvp)
sve=sve+((vve**2)/(2*g)) #вычисление максимальной высоты

m=m-30600 #сброс 1 ступени
vve=0 #начальные условия
ave=0
avp=0
fve=0
fvp=0
d=732.2 #расход двигателей 2 ступени
f=2400000 #тяга двигателей 2 ступени
gr=(55*3.1415927/180) #начальный угол

while (M-458900)>=m>(M-616200): #условия работы 2 ступени

    gr=gr-(39*3.1415927/180/211100) #программа угла тангажа

    g=398479140000000/((6371000+sve)**2) #расчёт ускорения свободного падения

    fve=f*math.sin(gr) #расчёт вертикальной силы
    fvn=m*g #вычисление силы тяжести
    ave=(fve-fvn)/m #вычисление ускорения
    sve=sve+vve*t+((ave*(t**2))/2) #вычисление высоты
    vve=vve+ave*t #вычисление вертикальной скорости

    fvp=((f**2)-(fve**2))**0.5 #вычисление горизонтальной силы
    avp=fvp/m #вычисление горизонтального ускорения
    vvp=vvp+avp*t #вычисление горизонтальной скорости
    m=m-d*0.001

sve=sve+((vve**2)/(2*g)) #вычисление максимальной высоты
print(vve,sve,vvp,gr)

```

## Литература

1. Балк М.Б. Элементы динамики космического полёта. - М.: Наука, 1965
2. Проектирование средств выведения космических аппаратов: учеб. пособие для вузов / под ред. А. А. Медведева. М: Машиностроение, 2009. 504 с.
3. Основы проектирования летательных аппаратов (транспортные системы). Учебное пособие для технических вузов / В. П. Мишин, В. К. Безвербый, Б. М. Панкратов, В. И. Зернов; Под ред. А. М. Матвеевко и О. М. Алифанова. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 2005. – 375 с.
4. Основы теории и расчёта жидкостных ракетных двигателей / Под ред. В. М. Кудрявцева. – 3-е изд. М.: Высш. школа, 1983.-703 с., ил.