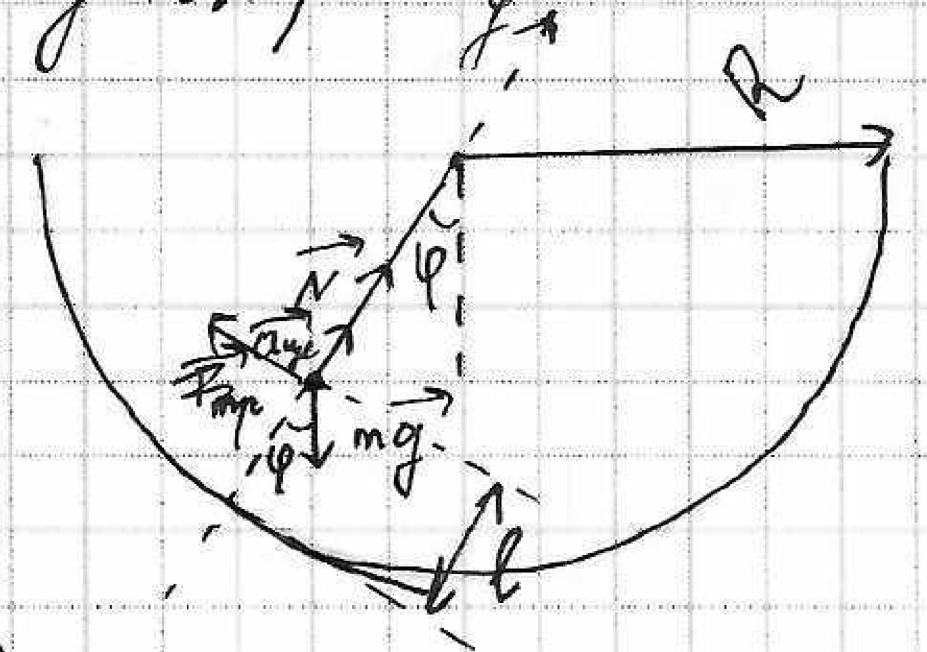
Задача 1:

Максимальная масса $m_{max} = 200$кг, которую выдерживает моноцикл связана с максимальным весом $\vec{P}$, с которым седок может действовать на моноцикл в покое.

$P_{max} = m_{max} g$

Рассмотрим движение центра масс водителя по полусфере.



$\vec{R} = m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр}$

$oy: \; ma_{цс} = N - mg\cos\varphi$

$N = m(a_{цс} + g\cos\varphi)$

максимальное значение N достигается при $\varphi = 0°$. При этом $\vec{N} = -\vec{P}$ (3 з-н Н.).

Тогда

$P_{max} = m(a_{цс\,max} + g) = m_{max} g \Rightarrow a_{цс\,max} = \frac{g(m_{max} - m)}{m}$

$a_{цс\,max} = \frac{v_{max}^2}{R-l}$ $\quad \frac{v_{max}^2}{R-l} = \frac{g(m_{max}-m)}{m} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{g(m_{max}-m)(R-l)}{m}} = 15 \frac{м}{с}$

Задача 2:

Область полной тени определяется по след. принципу (см. рис. 1).

Как видно из рисунка 1, область тени тем больше, чем меньше длина лампы в рассматриваемой плоскости зрения. Соответственно предельные случаи — $l=0$ (рис. 2) и $l=1$ м (рис. 3)

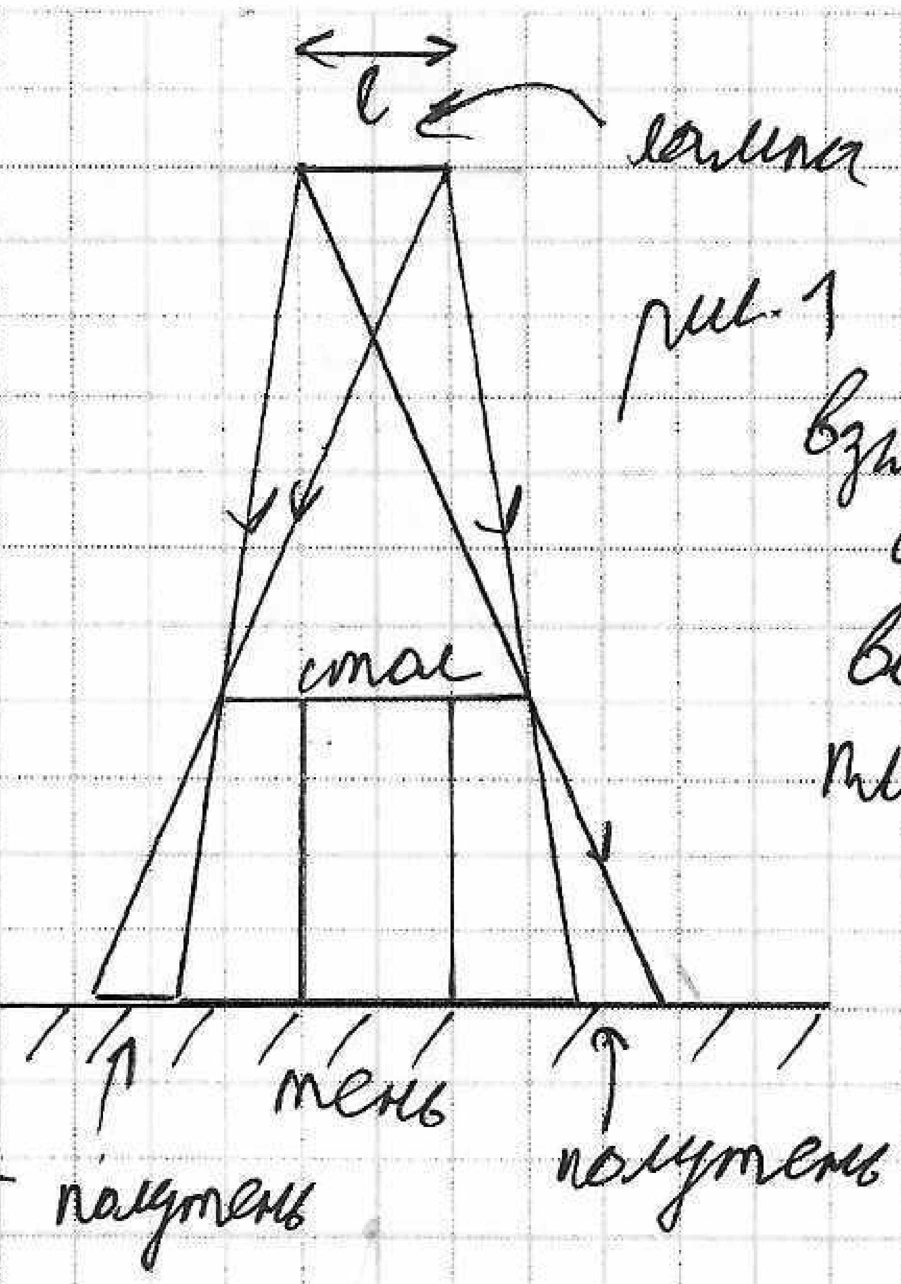


рис. 1

взгляд в одной из возможных плоскостей видения

$$tg\alpha = \frac{2}{0{,}5\text{м}} = \frac{3}{\frac{d_{max}}{2}} \Rightarrow d_{max} = 1{,}5\text{ м}$$

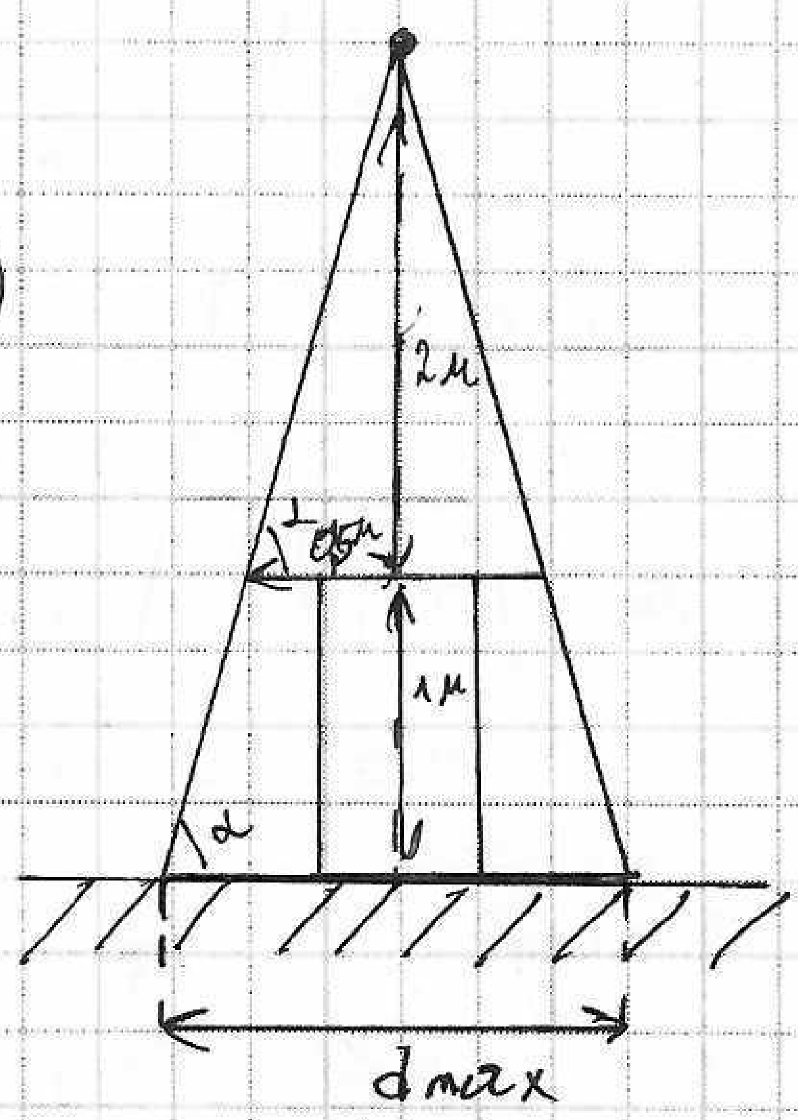


рис. 2

Из рис. 3 $d_{min} = 1$ м

Ответ: $d_{max} = 1{,}5$ м; $d_{min} = 1$ м

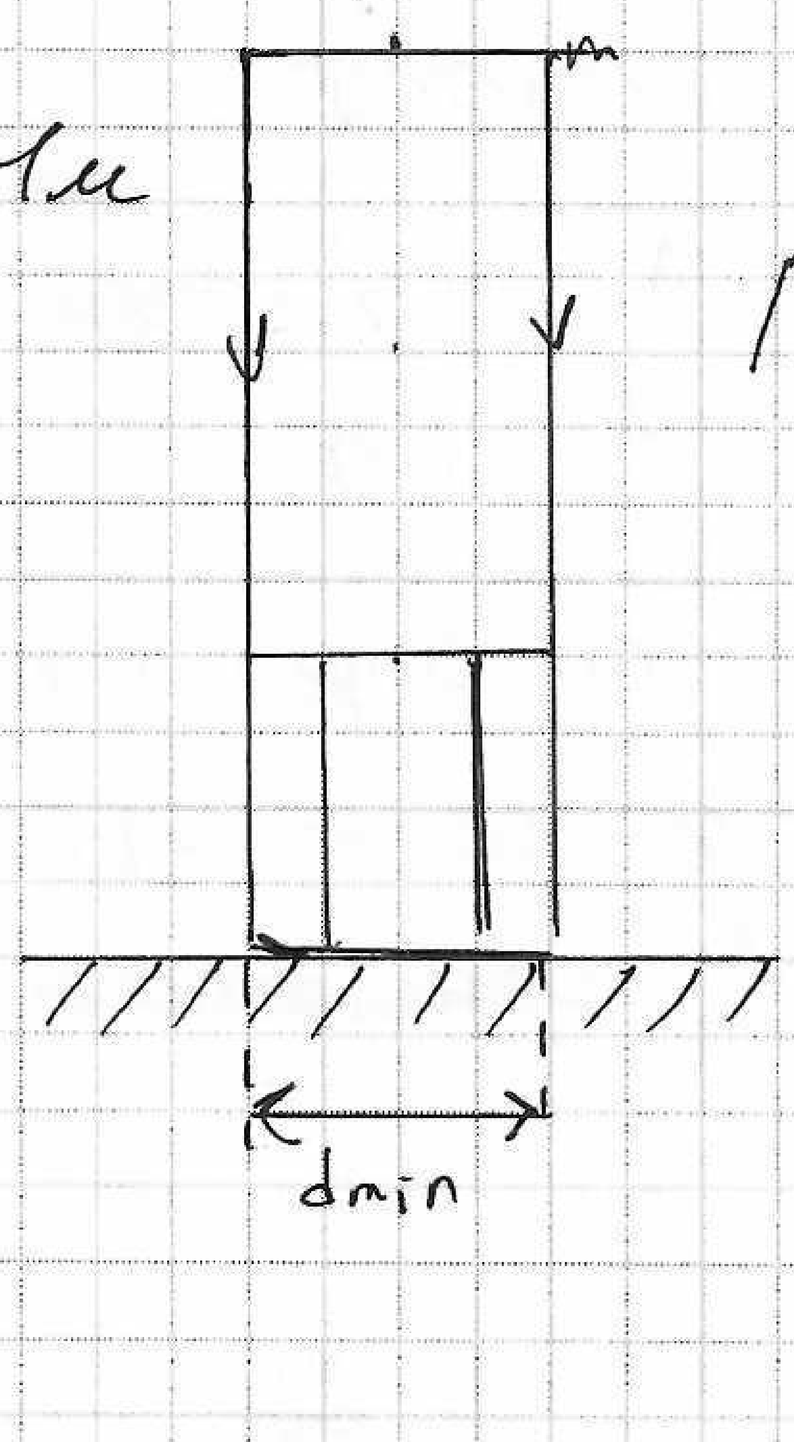


рис. 3

Задача 3:

~~В момент бросания огенка вода~~ масло ~~имеет температуру $t_м = t_0 + \Delta t = 10°C + 20°C = 30°C$.~~

Вся мощность, выделяемая нагревателем, уходит на нагревание смеси.

$$\begin{cases} P_п \Delta\tau = (C_м + cm)\Delta t \\ P_п = \eta \cdot P = \eta \cdot \dfrac{U^2}{R_0} \\ R_0 = \dfrac{R}{n} \text{ (пар. соед.)} \end{cases} \Rightarrow \eta \frac{U^2 n}{R} \Delta\tau = (C_м + cm)\Delta t$$

$$C_м = \frac{\eta U^2 n \Delta\tau}{R\,\Delta t} - cm$$

$$C_м = \frac{0{,}6 \cdot 220^2 В^2 \cdot 10 \cdot 60 с}{5 Ом \cdot 0{,}5°C} - 1.500 \frac{Дж}{кг \cdot °C} \cdot 2 \cdot 10^{3} кг =$$

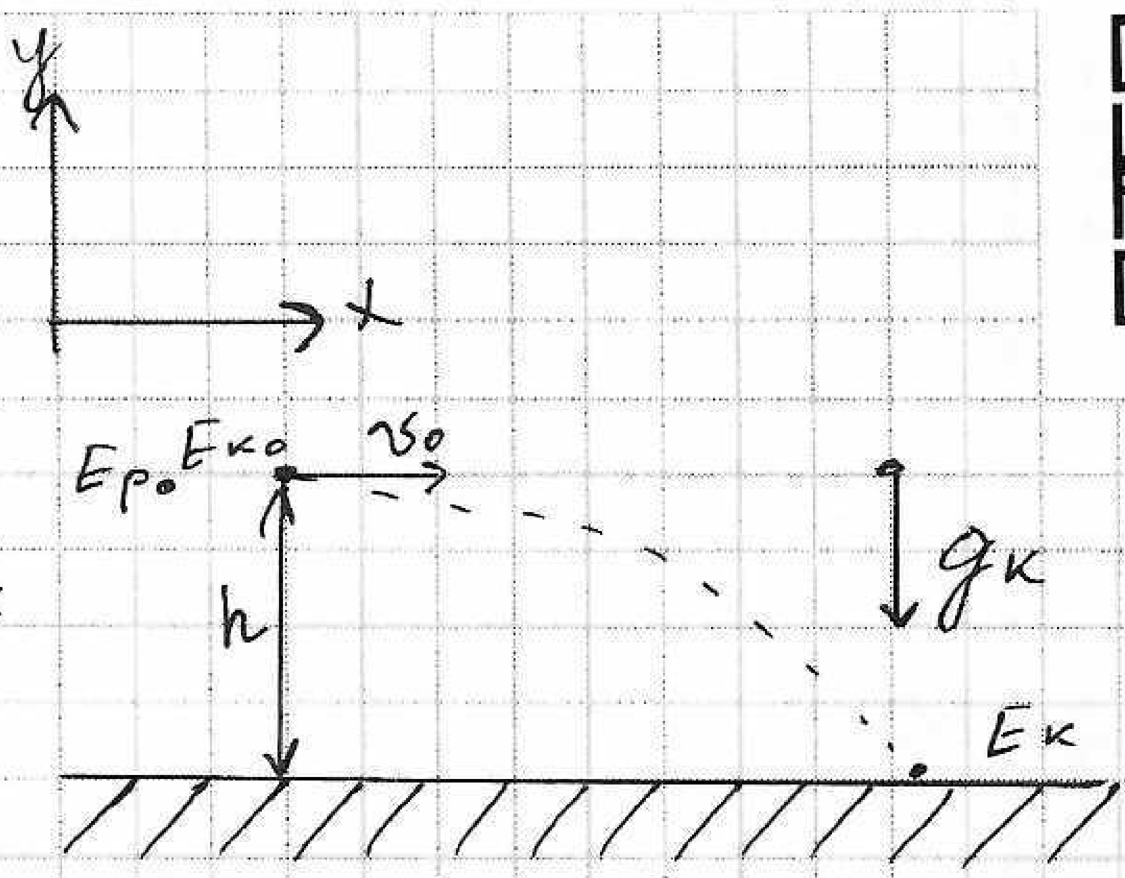
$$= 3.969.600 \frac{Дж}{°C}$$

Ответ: $C_м = 3.969.600 \frac{Дж}{°C}$

$$\begin{cases} c - \text{уд. тепл. кролика} \\ m - \text{масса огенка} \\ n = 10 \\ R = 5 Ом \\ \eta = 60\% = 0{,}6 \\ \Delta\tau = 60 с = 1 мин \\ \Delta t = 0{,}5°C \end{cases}$$

Задача 4:

Движение зонда после отключения двигателей происходит под действием $\vec{F}_{тяж}$ Каллисто. Запишем З.С.Э. для зонда



$$E_{p0}+E_{k0}=E_к \quad ; \quad m g_к h + \frac{m v_0^2}{2} = E_к \quad \Big| \Rightarrow \frac{m g_к^2 t^2}{2} + \frac{m v_0^2}{2} = E_к$$

$$h = \frac{g_к t^2}{2} \quad (v_{0y}=0)$$

$$\boxed{g_к^2 = \frac{2E_к - m v_0^2}{m t^2}}$$

Из закона В.с. тяг.:

$$\begin{cases} g = \frac{GM}{R^2} \\ g_к = \frac{G M_к}{R_к^2} \\ M = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \\ M_к = \rho_к V_к = \rho_к \frac{4}{3}\pi R_к^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = \frac{G\rho R}{3} 4\pi \\ g_к = \frac{G R_к \rho_к}{3} 4\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{g_к}{g} = \frac{\rho_к R_к}{\rho R}$$

$$g_к^2 = \left(\frac{\rho_к R_к}{\rho R}\right)^2 g^2$$

$$g_к^2 = \left(\frac{\rho_к R_к}{\rho R}\right)^2 g^2 = \frac{2E_к - m v_0^2}{m t^2}$$

$$\frac{\rho_к R_к}{\rho R} = \sqrt{\frac{2E_к - m v_0^2}{m t^2}} \frac{1}{g} \Rightarrow \frac{\rho_к}{\rho} = \frac{R}{R_к}\sqrt{\frac{2E_к - m v_0^2}{m t^2}} \frac{1}{g}$$

$$\frac{\rho_к}{\rho} = 2{,}6\sqrt{\frac{2\cdot 947{,}56 - 121{,}68\cdot 9}{121{,}68 \cdot 4}} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}33 \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_к} = 3$$

Ответ: плотность Каллисто в 3 раза меньше земной

$M_к, R_к, \rho_к, g_к$ - данные Калисто; M, R, ρ, g - Земли

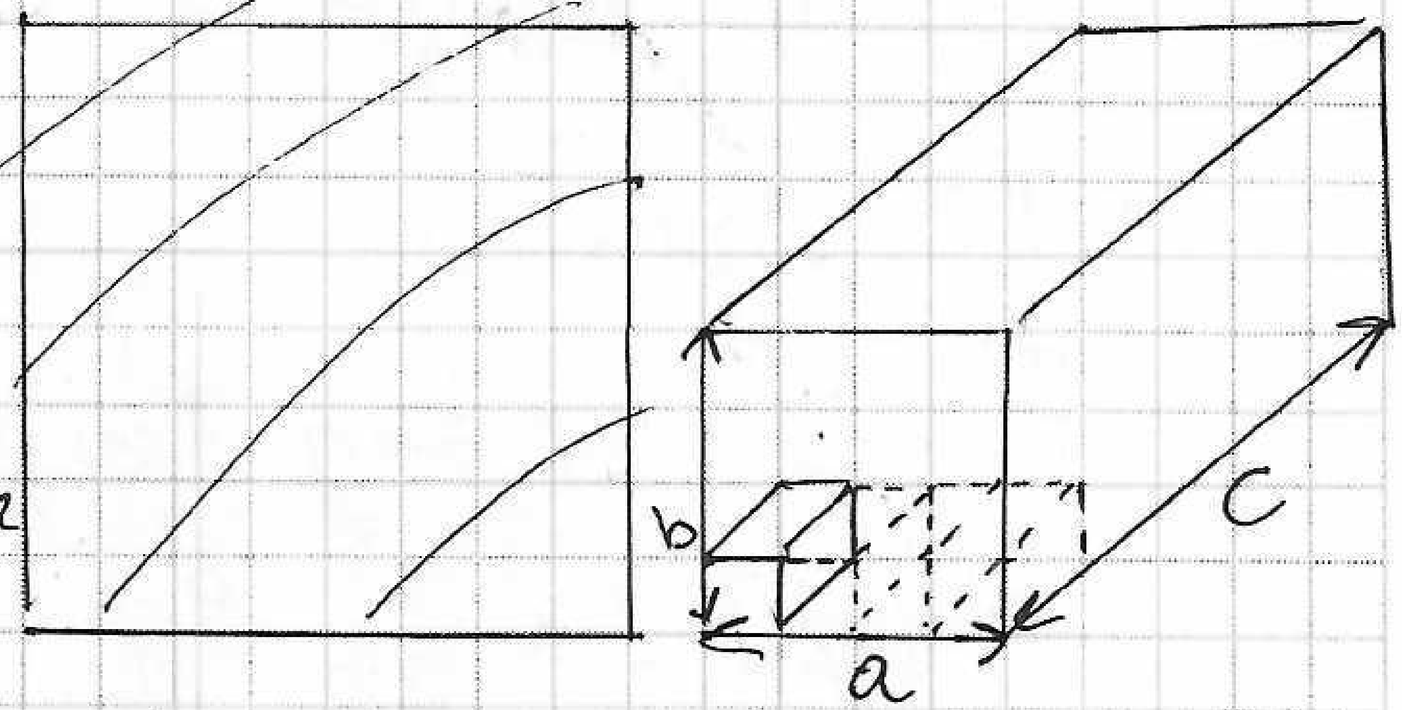
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

Задача 5:

Т.к. кубики упакованы плотно, будем считать, что между ними нет свободных пространств. Нам известно, что $a=4l_0$ ($a \le b \le c$). Объём всей упаковки:



$$V=abc=240l_0^3 \Rightarrow bc=60l_0^2$$

И b, и c должны нацело делиться на l_0, чтобы кубики были упакованы плотно. При этом, т.к. a – наименьшее ребро, $b \geq 4l_0$. Этим условиям удовлетворяют следующие три соотношения:

$b=4l_0;\ c=15l_0 \Rightarrow l_0=\frac{c}{15}$

$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m\cdot 15^3}{c^3\cdot 240}=2{,}83\ \frac{г}{см^3}$

($c=15$ см)

$b=5l_0;\ c=12l_0$, $l_0=\frac{c}{12}$

$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m\cdot 12^3}{c^3\cdot 240}=1{,}45\ \frac{г}{см^3}$

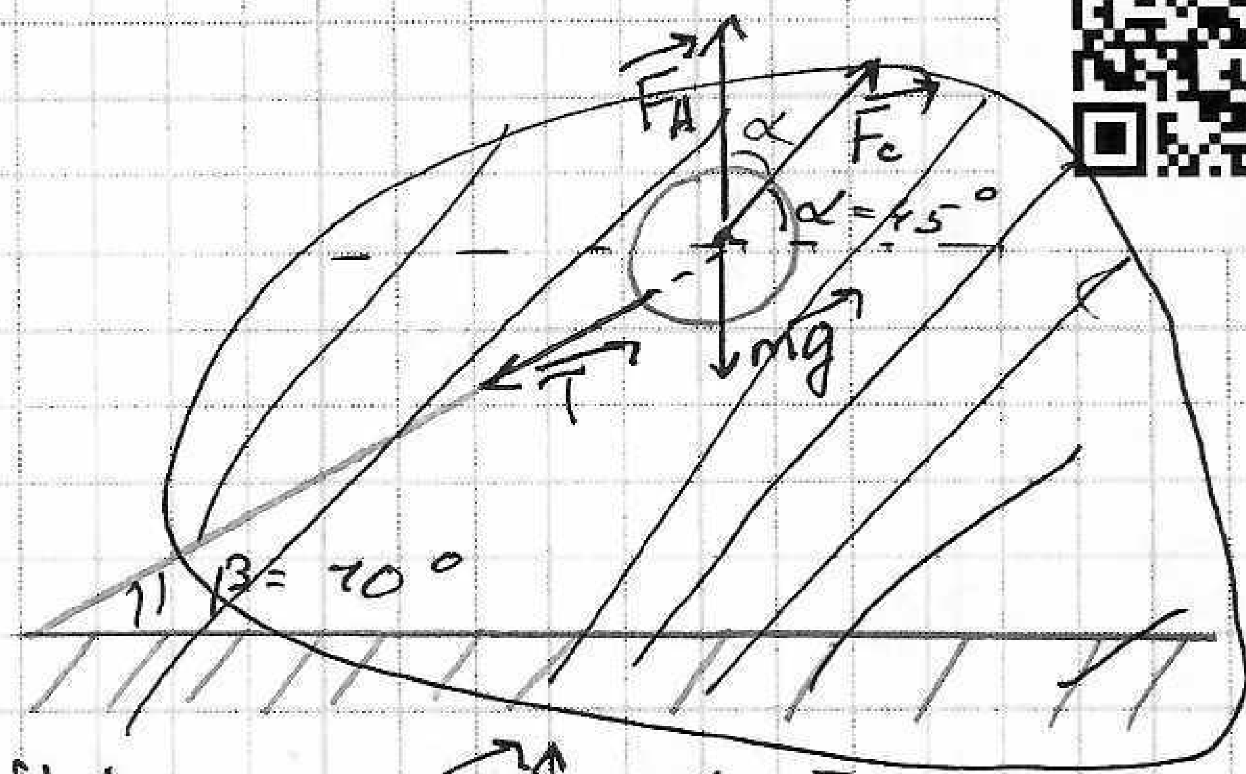
$b=6l_0;\ c=10l_0$, $l_0=\frac{c}{10}$

$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m\cdot 10^3}{c^3\cdot 240}=0{,}84\ \frac{г}{см^3}$

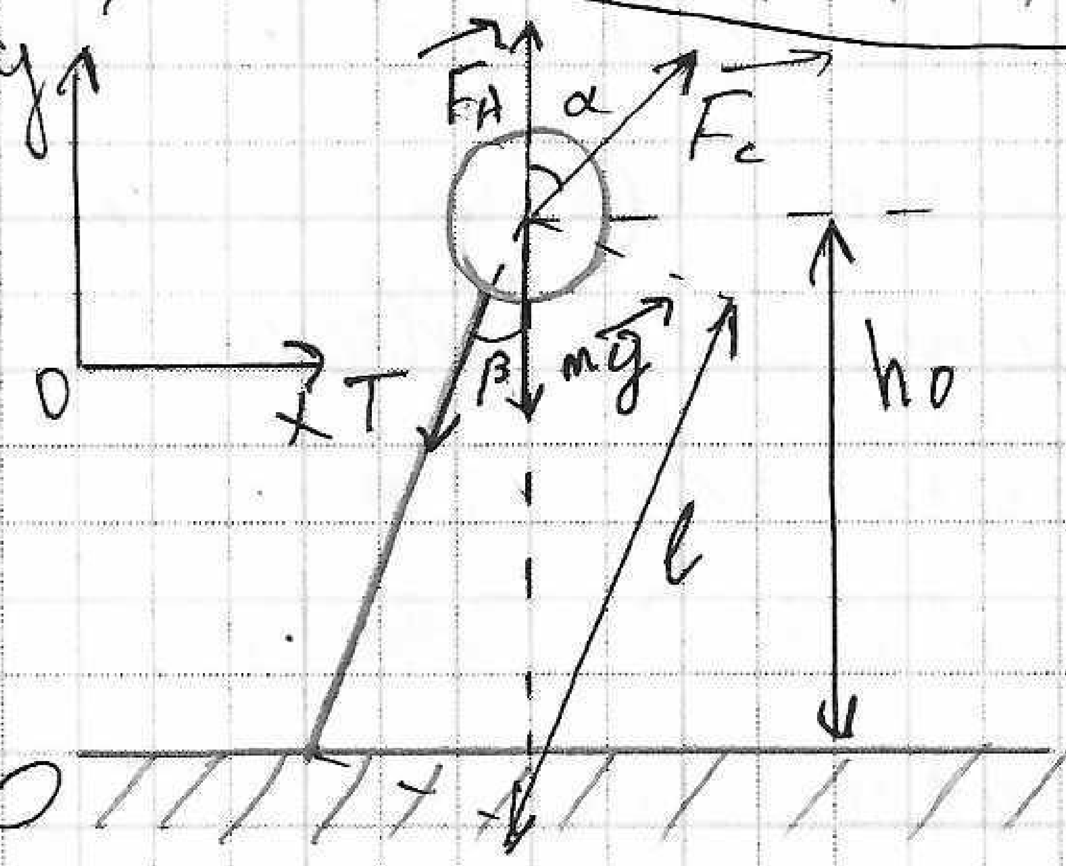
Из всех случаев условию плавания кубиков в воде ($\rho \le \rho_в$) удовлетворяет только последний

Ответ: $\rho=840\ \frac{кг}{м^3}$

Ситуационная задача:



В начальный момент на зонд действуют 4 силы: $\vec{F_c}$; $m\vec{g}$; $\vec{F_A}$; $\vec{T}$ (на рис.)



$$\vec{R} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F_A} + \vec{T} + \vec{F_c}$$

$$ox: -T\sin\beta + F_c\sin\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{F_c\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$oy: F_A + F_c\cos\alpha - mg - T\cos\beta = 0$$

$$F_A = \rho V g = \frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8}\rho g$$

$$\Downarrow$$

$$F_c\cos\alpha - F_c\sin\alpha\, ctg\beta = g\left(m - \frac{\pi d^3}{6}\rho\right)$$

$$\cos\alpha = \sin\alpha \quad (\alpha = 45^\circ)$$

$$F_c\cos\alpha\,(1 - ctg\beta) = g\left(m - \frac{\pi d^3}{6}\rho\right)$$

$$F_c = \frac{g(6m - \pi d^3\rho)}{6\cos\alpha(1 - ctg\beta)} = S C_x \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{g(6m - \pi d^3\rho)}{3 S C_x\cos\alpha(1 - ctg\beta)\rho}}$$

$$S = \pi\frac{d^2}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{4g(6m - \pi d^3\rho)}{3\pi d^2 C_x\cos\alpha(1 - ctg\beta)\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{4\cdot 10(6\cdot 5-\pi\cdot 27\cdot 1{,}15)}{1{,}15\cdot 3\pi\cdot 9\cdot 0{,}5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-ctg\,10^\circ)}} = \sqrt{\frac{2.702}{\cancel{140}161}} = 4{,}1\ \frac{м}{с}$$

После стихания ветра шар будет двигаться вдоль равнодействующей всех сил, действующих на него.

$$\begin{cases} \vec{R'} = \vec{T} + \vec{F_A} + m\vec{g} \\ 0 = \vec{T} + \vec{F_A} + m\vec{g} + \vec{F_c} \end{cases} \Rightarrow \vec{R'} = -\vec{F_c}$$

Значит, зонд будет двигаться вдоль вектора $-\vec{F_c}$, т.е. вниз под углом $\alpha = 45^\circ$ к вертикали

$F_A > mg \Rightarrow$ при безветренной погоде трос будет натянут и вертикален, т.е. шар будет находиться на высоте, равной длине троса l.

$$\cos\beta = \frac{h_0}{l} \Rightarrow l = \frac{h_0}{\cos\beta} = \frac{98{,}5\ м}{\cos 10^\circ} = 100\,м$$

Ответ: $v = 4{,}1\ \frac{м}{с}$; $h = l = 100\,м$