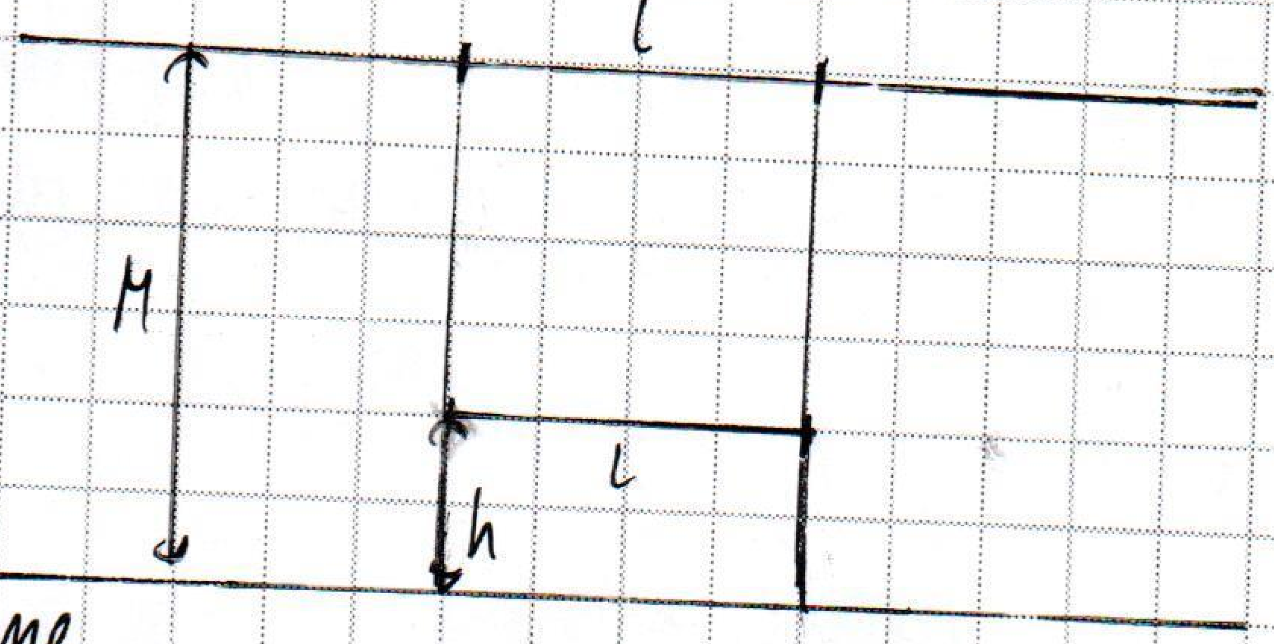
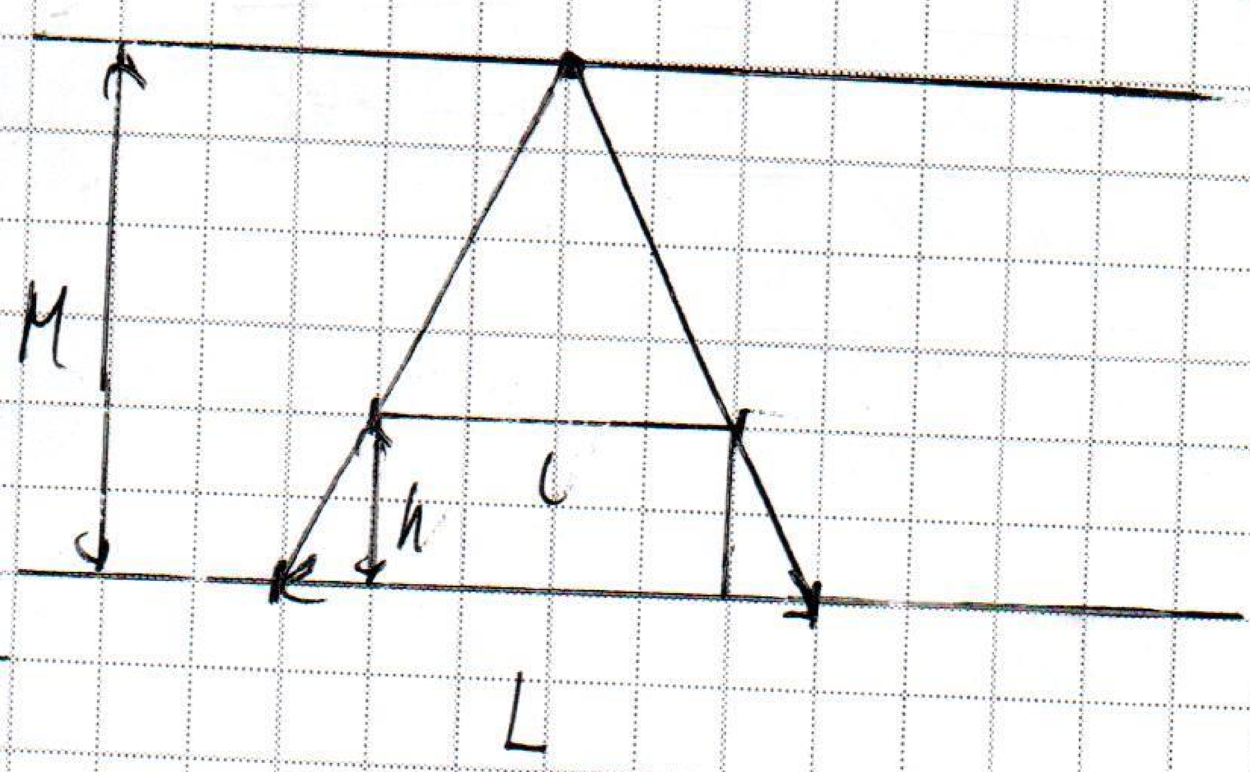
Вариант задания 2

2.

~~Рис~~ Т.к. лампа линейная, а стол круглый, тень от него будет эллипсом. Найдем его мин. мин. размер: он будет в плоскости, где он паралл. лампе, тогда, т.к. лампа и стол равны по длине и находятся друг над другом, размер тени также равен их длине $l = 1$м.



Найдем ~~длину~~ его макс. размер: он ~~будет~~ будет в плоск. ~~...~~ перпенд. лампе (в ней она будет точ. ист.). Проведем крайние лучи от лампы к столу и полу. Из подобия тр-ков:



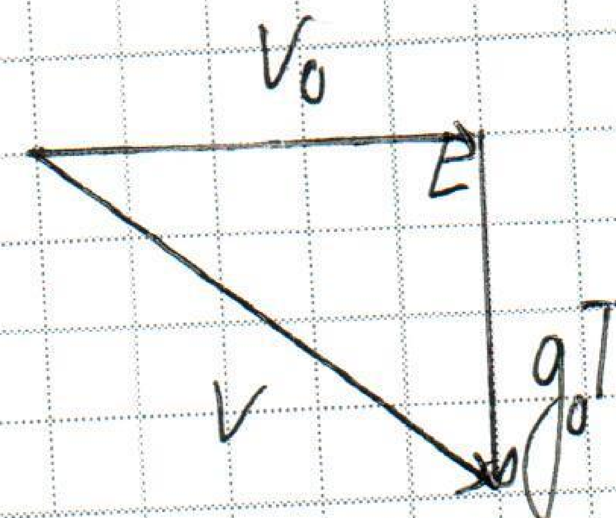
$\frac{l}{H-h} = \frac{L}{H}$, h-выс. стола, H-выс. потолка

$L = l\frac{H}{H-h}$

$L = 1{,}5$ м

Ответ: мин. 1м, макс. 1,5м.

4.



Изв., что кин. энергия при пад. со скор. V:

$K=\frac{mV^2}{2}$, m - масса тела

$V=\sqrt{\frac{2K}{m}}$

Нарисуем тр-к скоростей от момента откл. дви. до падения (изв., что $\vec{V_0} \perp \vec{g_0}$, V_0 - скор. при откл. дв., g_0 - уск. св. пад. на Каллисто, T - время пад.)

Тогда $g_0T=\sqrt{V^2-V_0^2}$

$g_0=\frac{\sqrt{\frac{2K}{m}-V_0^2}}{T}$

Известно, что $g_0=\gamma\frac{M_0}{R_0^2}$, γ - грав. пост., M_0 - масса Каллисто, R_0 - его радиус,

$g=\gamma\frac{M}{R^2}$, M - масса Земли, R - радиус Земли.

$M_0=\frac{4}{3}\pi R_0^3\rho_0$, ρ_0 - плотн. Каллисто

$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$, ρ - плотн. Земли

$\frac{\rho_0}{\rho}=N$ - необх. коэфф.; $\frac{R}{R_0}=n=2,6$

$g_0=\frac{4}{3}\gamma\pi R_0\rho_0$; $g=\frac{4}{3}\gamma\pi R\rho$

$\frac{g}{g_0}=\frac{R\rho}{R_0\rho_0}=\frac{n}{N}=\frac{gT}{\sqrt{\frac{2K}{m}-V_0^2}}$

$N=\frac{n\sqrt{\frac{2K}{m}-V_0^2}}{gT}$

$N=\frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{1}{3}$

5.

Пусть сторона кубика l, длинная стор. коробки L, другая стор. h.
Известно, что $4l \cdot L \cdot h = 240 l^3 \Rightarrow Lh = 60 l^2 \Rightarrow \frac{L}{l} \cdot \frac{h}{l} = 60$
Также $4l \leq h \leq L$.

$\frac{h}{l}$ и $\frac{L}{l}$ - кол-ва кубиков в стороне коробки - натур. ~~целые~~ числа. Запишем все пары натур. ~~цел.~~ чисел, при умножении дающих 60, удовл. усл. $\frac{h}{l} \leq \frac{L}{l}$:

$\frac{h}{l}$	1	2	3	4	5	6
$\frac{L}{l}$	60	30	20	15	12	10
$\rho, \frac{кг}{м^3}$	181333	22667	6716	2833	1451	840

Также $m = \rho \cdot 240 l^3 = \rho \cdot 240 \frac{L^3}{(\frac{L}{l})^3}$, ρ - плотн. куб. $< \rho_0 = 1000 \frac{кг}{м^3}$, m - масса куб.
ρ_0 - плотн. воды, т.к. куб. не тонут

$\rho = \frac{m}{240 \frac{L^3}{(\frac{L}{l})^3}}$. Рассчитаем ρ для всех $\frac{L}{l}$ и занесем в таблицу.

Из всех значений ρ удовл. усл. $\rho < \rho_0$ только $\rho = 840 \frac{кг}{м^3}$. Это и есть плотн. куб.

Ответ: $840 \frac{кг}{м^3}$

3.

Запишем ур-ние тепл. баланса для масла с порошком в дифференциальном виде:

$P d\tau = dt (C + Mc)$, P - мощн. нагревателей, $d\tau$ - малое время, dt - малое изм. темп-ры, C - теплоемк. масла, M - масса порошка, c - уд. теплоемк. порошк.
Из з-на Джоуля-Ленца $P = \eta n \frac{U^2}{R}$, η - КПД, n - кол-во нагрев-лей, U - напряж

R-сопр. одного рез-ра, т.к. они все параллельны, теплоп. не уч., т.к. темп. смеси близк. к комн.

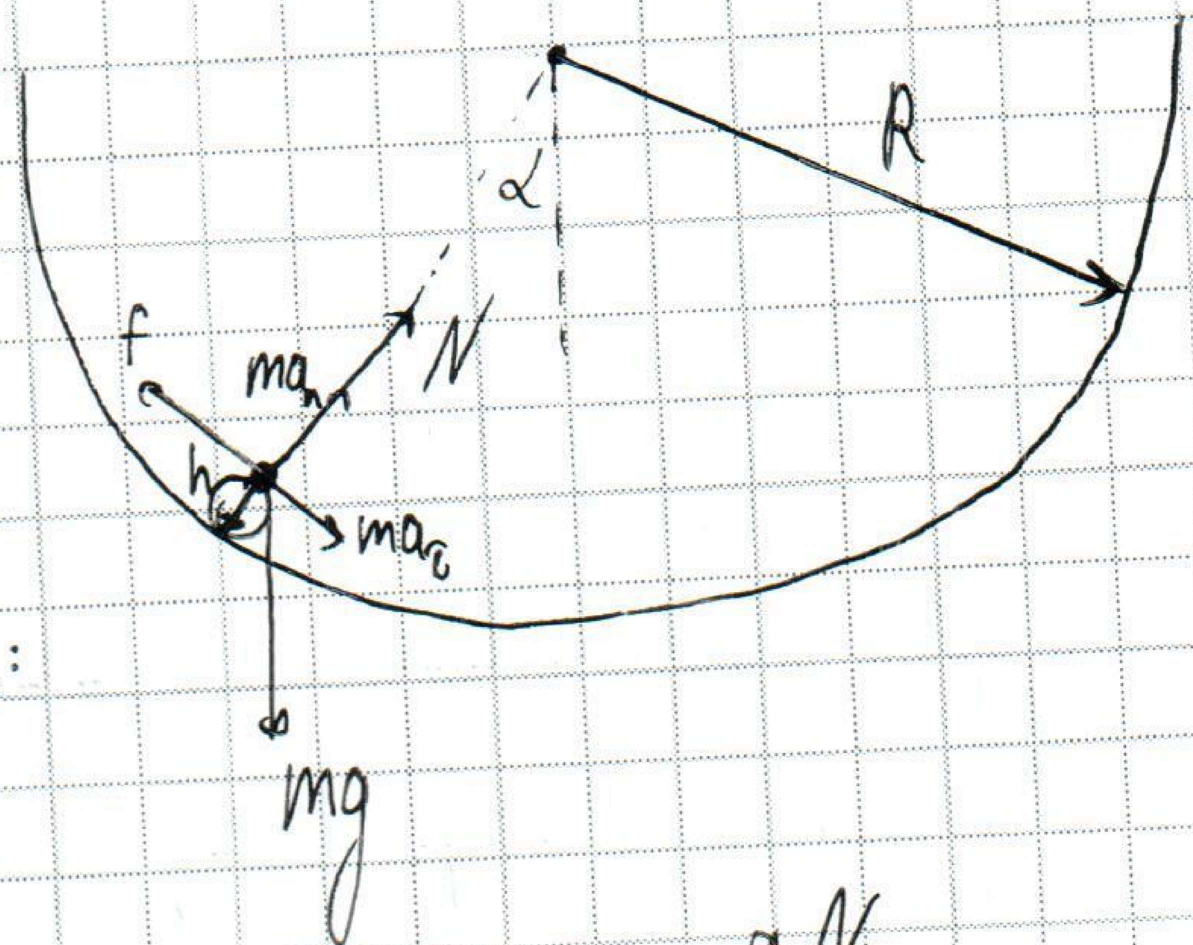
$\frac{U^2 n \eta}{R\frac{dt}{d\tau}} = C + Mc$, $\frac{dt}{d\tau} = 0,5 \frac{K}{мин}$

$C = \frac{U^2 n \eta}{R\frac{dt}{d\tau}} - Mc$

$C = 3969600 \frac{Дж}{K}$

Ответ: $3969600 \frac{Дж}{K}$

1.



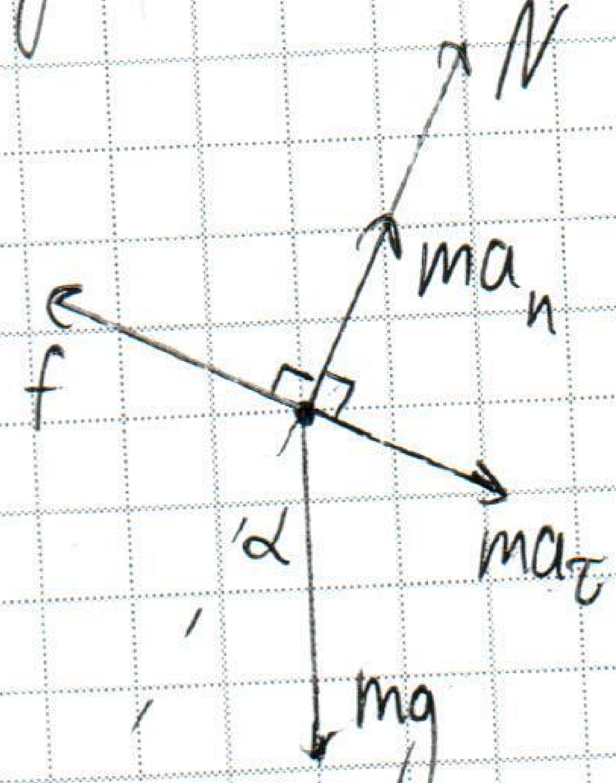
В некоторый момент мотоцикл отклонен от верт. оси сферы на угол α.

Рассмотрим проекции ~~ускорений~~ сил на радиальную ось на систему седок+мотоцикл:

$ma_n = N - mg\cos\alpha + 0\cdot f + 0\cdot ma_\tau$, где

m-масса седока, a_n-норм. уск, a_τ-танг. уск,

N-сила реакц. со стор. сферы, f-сила тр.



При этом $a_n = \frac{V^2}{R-h}$

$N = N_{max} = Mg$, M-макс. масса на гор. пл-ти.

$\frac{V^2}{R-h} = \frac{M}{m}g - g\cos\alpha$

$V = \sqrt{g(R-h)(\frac{M}{m} - \cos\alpha)} \to max$

$\frac{M}{m} - \cos\alpha \to max$

$0 + \sin\alpha = 0$

$\alpha = 0$ (т.к. полусфера) или $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (край ~~сферы~~ полусферы)

Тогда

$V_{max} = 15\frac{м}{с}$ (в этом случае мотоцикл не слом. ни в одной т. полусферы)

или $V_{max} = 19,9\frac{м}{с}$ (в этом случае мотоцикл не слом. только на краю, но имеет макс. возм. скор.) Ответ: $15\frac{м}{с}$ или $19,9\frac{м}{с}$.

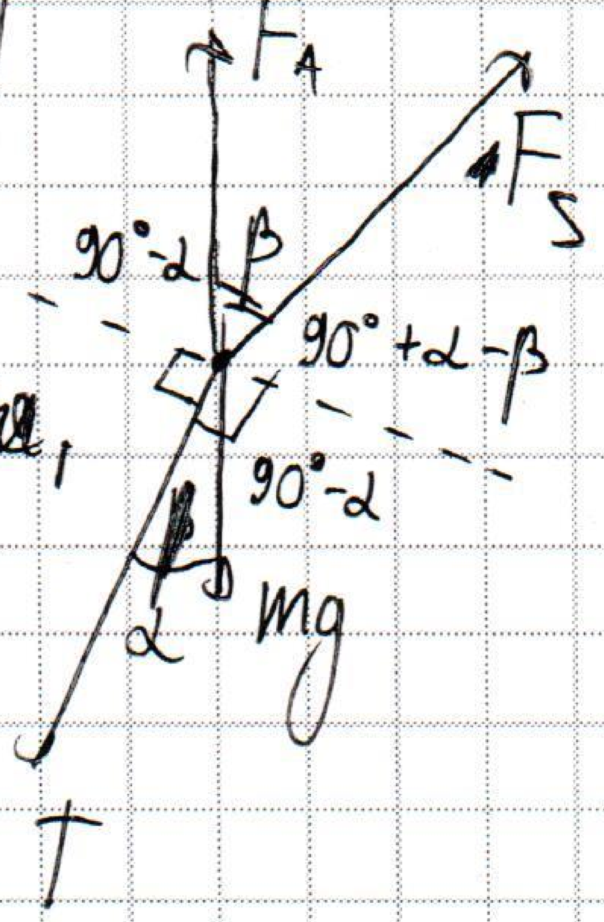
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2 Лист работы 3 из 3

Ситуационная задача (6)

На зонд действует сила тяжести, натяжения T под углом α к верт., сопр. возд. F_S под углом β к верт. в ~~противоположной~~ тяге против. стор., ~~т.к. зонд покоится~~,



$F_S = \frac{\pi d^2}{4} C_x \frac{\rho V^2}{2}$

Спроецируем эти силы на ось, перп. $\vec{T}$:

$0 + mg\sin\alpha = F_S \sin(\beta - \alpha)$

$\pi d^2 C_x \rho V^2 = 8mg \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$

$V = \sqrt{\frac{8mg\sin\alpha}{\pi d^2 C_x \rho \sin(\beta-\alpha)}}$

~~$V = 2{,}73\ \frac{м}{с}$~~

сила Архимеда F_A вверх.

$F_S = \frac{\pi d^2}{4} C_x \frac{\rho V^2}{2}$

$F_A = \rho g \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\rho g \pi d^3}{6}$

Спроецируем эти силы на ось, перп. $\vec{T}$:

$F_A \sin\alpha = F_S \sin(\beta-\alpha) + mg\sin\alpha$

$\frac{\rho g \pi d^3}{6}\sin\alpha = \frac{\pi d^2 C_x \rho V^2}{8} \cdot \sin(\beta-\alpha) + mg\sin\alpha$

$V = \sqrt{\frac{\frac{\rho g \pi d^3}{6}\sin\alpha - mg\sin\alpha}{\frac{\pi d^2 C_x \rho}{8}\sin(\beta-\alpha)}}$

$V = 4{,}1\ \frac{м}{с}$

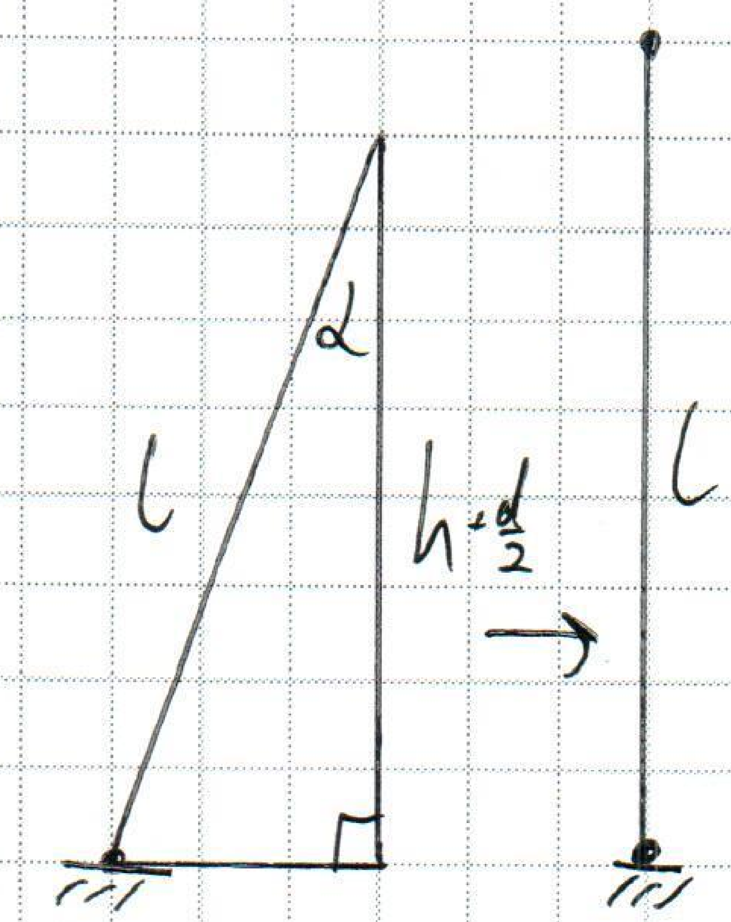
Сразу после стихания ветра $F_S = 0$, но другие силы не успеют измениться, значит, зонд получит ускорение и скорость против $\vec{F_S}$, т.е. вниз под углом 45° к верт.

 Можно использовать оборот листа для записи решений

Т.к. трос под углом α к верт. на выс. h, длина L веревки равна

$L = \frac{h}{\cos\alpha} = 100$ м

Тогда в безвет. погоду зонд будет на верт. тросе, т.е. на высоте L.



Ответ: 4,1 $\frac{м}{с}$; 45° к верт. вниз ; 100 м.