Профиль: математика

Вариант: 1 Класс: 9

№1 (15 баллов). Решите неравенство $\frac{\sqrt{1+x}-2}{1-\sqrt{x+2}} \geq 1+\sqrt{x+2}$.

№2 (15 баллов). В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD, биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE. Найдите площадь четырёхугольника $OBCE$, зная, что $AD = 12$, $DE = 4$, $\angle ABO = 60°$.

№3 (15 баллов). На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начали забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежал со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен пришел на финиш на 16 мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько раз первый спортсмен обогнал второго на дистанции после старта?

№4 (15 баллов). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0 \\ x^3-(a+3)x^2+3ax \leq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№5 (20 баллов). В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC ($\angle \mathrm{C} = 90^0$) на стороне BC выбирается точка N так, что окружность, вписанная в треугольник ACN, касается стороны AN в точке K и $\angle \mathrm{C}DK = 18^0$, где точка D – середина AB. Найдите величину $\angle CAN$.

№6 (20 баллов). На складе находятся товары общей массой 1300 тонн, которые размещены в различные контейнеры. Вес каждого такого контейнера не более 10 тонн. Эти контейнеры грузят в железнодорожные вагоны, вместимость которых не более 60 тонн. Для вывоза товара со склада необходимо сформировать железнодорожный поезд. Какое наименьшее количество вагонов должно быть в этом поезде, чтобы гарантированно вывезти весь товар со склада за один раз? (Размеры контейнеров не учитывать).

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 9, вариант 1

Задание 1 (максимальная оценка 15 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Обоснованно получен правильный ответ	15
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек или решение недостаточно обоснованно	10
Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (верно найдено одз неравенства, решение сведено к рассмотрению неравенства), дальнейшее решение неверно или отсутствует	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 2 (максимальная оценка 15 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Обоснованно получен верный ответ	15
При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.	10
Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (верно найдены площадь ABK и отношение OK/AK), дальнейшее решение неверно или отсутствует	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 3 (максимальная оценка 15 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Обоснованно получен правильный ответ	15
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка или при правильном ответе имеются недостатки обоснования	10
Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении	5
Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий	0

Задание 4 (максимальная оценка 15 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Обоснованно получен правильный ответ	15
При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования	10
Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.	5
Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий	0

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.	20
При верном и обоснованном ходе решения (доказано, что точка M принадлежит DK) получен неверный ответ, или решение недостаточно обосновано.	14
Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует. НЕ доказано, что точка M принадлежит DK, но при этом получен правильный ответ с использованием этого факта.	6
Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.	0

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.	20
При верном и обоснованном ходе решения допущены арифмитические ошибки или при верном ответе решение недостаточно обосновано.	18
Доказано, что 25 вагонов не хватит.	12
Доказано, что 26 вагонов хватит.	8
Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.	0

Решение варианта №1 (Математика - 9 класс)

№1 (15 баллов). Решите неравенство $\frac{\sqrt{1+x}-2}{1-\sqrt{x+2}} \geq 1+\sqrt{x+2}$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \begin{cases} 1+x \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ \sqrt{x+2}-1 \neq 0, \end{cases} => x \in (-1; +\infty)$.

С учетом ОДЗ $1-\sqrt{x+2} \leq 0$, получаем $\sqrt{1+x}-2 \leq 1-(x+2)$ $<=>$ $\sqrt{1+x} \leq 1-x$ $<=>$ $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ 1+x \leq (1-x)^2, \end{cases}$ $<=>$ $\begin{cases} x \in (-\infty, 1], \\ x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty), \end{cases}$

Откуда $x \in (-\infty; 0]$, а с учетом ОДЗ $x \in (-1; 0]$.

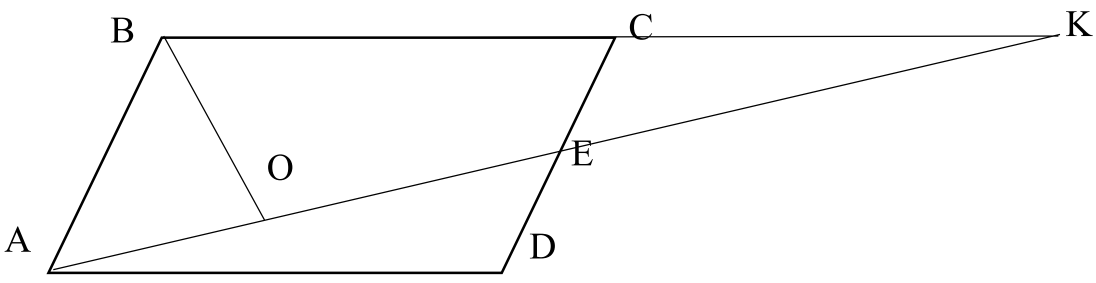
Ответ: $x \in (-1; 0]$.

Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек или решение недостаточно обоснованно
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (верно найдено одз неравенства, решение сведено к рассмотрению неравенства $\sqrt{1+x} \leq 1-x$), дальнейшее решение неверно или отсутствует
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№2 (15 баллов). В параллелограмме *ABCD* точка *E* делит пополам сторону *CD*, биссектриса угла *ABC* пересекает в точке *O* отрезок *AE*. Найдите площадь четырёхугольника *OBCE*, зная, что *AD* = 12, *DE* = 4, $\angle$*ABO* = 60°.

Решение:



Поскольку $\angle$*ABC* = 120° и $AB = CD = 2DE = 8$, $BC = AD = 12$, тогда

$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot sin\angle ABC,$

$S_{ABCD} = 8 \cdot 12 \cdot sin120° = 48\sqrt{3}.$

Пусть K — точка пересечения прямых BC и AE.

Поскольку треугольники DEA и CEK равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам), то

$S_{\Delta CEK} = S_{\Delta DEA} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = 12\sqrt{3},$

$S_{\Delta ABK} = S_{ABCD} = 48\sqrt{3},$

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{OK}{AO} = \frac{BK}{AB}, \qquad \frac{OK}{AK} = \frac{BK}{BK + AK} = \frac{3}{4}.$$

Поэтому

$S_{\Delta BOK} = \frac{OK}{AK} \cdot S_{\Delta ABK} = 36\sqrt{3},$

$S_{OBCE} = S_{\Delta BOK} - S_{\Delta CEK} = 36\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$

Ответ: $24\sqrt{3}$ кв. ед

Критерии проверки:

Баллы	
15	Обоснованно получен верный ответ
10	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (верно найдены площадь $S_{\Delta ABK}$ и отношение $\frac{OK}{AK}$), дальнейшее решение неверно или отсутствует
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№3 (15 баллов). На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начали забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежал со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен пришел на финиш на 16 мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько раз первый спортсмен обогнал второго на дистанции после старта?

Решение:

Пусть x и y м/мин – скорости первого и второго спортсменов, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{10000}{y}=\dfrac{10000}{x}+16\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{800}{x-y}=\dfrac{10000}{x}-43\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{10000}{\dfrac{10000}{x}+\dfrac{50}{3}} \\ x-y=\dfrac{800}{\dfrac{10000}{x}-\dfrac{130}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{600}{\dfrac{600}{x}+1}+\frac{240}{\dfrac{3000}{x}-13}=\frac{600x}{600+x}+\frac{240x}{3000-13x}$$

$$\Rightarrow (600+x)(3000-13x)=600(3000-13x)+240(600+x)$$

$$\Rightarrow 13x^2-2760x+240\cdot 600=0 \Rightarrow x=\frac{1380\pm 180}{13}>100$$

$\Rightarrow x=120, y=\dfrac{600}{\dfrac{600}{120}+1}=100$. Поэтому количество обгонов равно целой части

$$\left[\frac{120-100}{400}\cdot\frac{10000}{120}\right]=\left[\frac{50}{12}\right]=4.$$

Ответ: 4 раза.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4 (15 баллов). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\ge 0 \\ x^3-(a+3)x^2+3ax\le 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение:

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\ge 0 \\ x^3-(a+3)x^2+3ax\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-a)\ge 0 \\ x(x-3)(x-a)\le 0 \end{cases}$$

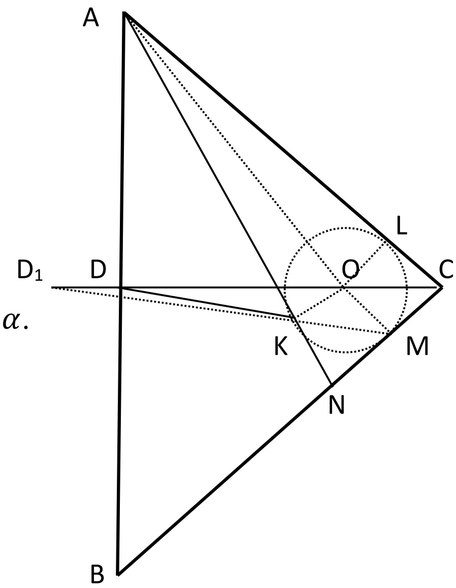
В случае $a \geq 3$ решение первого неравенства составляет множество $\left[1;2\right] \cup \left[a;+\infty\right)$, а решения второго – множество $\left(-\infty;0\right] \cup \left[3;a\right]$, так что у системы будет единственное решение $x = a$. В случае $a < 3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $\left[b;3\right]$, где в качестве b можно взять наибольшее из чисел a и 2.

Ответ: $[3;+\infty)$.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№5 (20 баллов). В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC ($\angle$ C $= 90^0$) на стороне BC выбирается точка N так, что окружность, вписанная в треугольник ACN, касается стороны AN в точке K и $\angle$ C$DK = 18^0$, где точка D – середина AB. Найдите величину $\angle CAN$.

Решения.



9.5.1 Пусть данная окружность касается BC в точке M.

Очевидно, что центр окружности O лежит на CD – биссектрисе угла C. Докажем, что точка $M \in DK$.

Пусть $MK \cap CD = D_1$. Рассмотрим треугольник MD_1C: $\angle MCD_1 = 45^0$. Пусть $\angle NAC = 2\alpha$, тогда $\angle CNA = 90^0 - 2\alpha$.

В четырехугольнике $MOKN$: $\angle OKN = \angle OMN = 90^0$ (по свойству касательной), следовательно,

$\angle KOM = 360^0 - 90^0 - 90^0 - (90^0 - 2\alpha) = 90^0 + 2\alpha$.

Треугольник OKM – равнобедренный ($OK = OM = r$), следовательно, $\angle OMK = 0{,}5(180^0 - (90^0 + 2\alpha)) = 45^0 - \alpha$.

Вернемся к треугольнику MD_1C: $\angle CD_1M = 180^0 - 45^0 - (90^0 + 45^0 - \alpha) = \alpha$. Так как AO – биссектриса $\angle CAN$, то $CAO \sim CD_1M$ (по двум углам: $\angle OCA = \angle D_1CM = 45^0$ и $\angle CAO = \angle CD_1M = \alpha$), следовательно, $AC{:}\,D_1C = CO{:}\,CM = \sqrt{2}$ (так как $OLCM$ – квадрат).

Но по условию $AC{:}\,DC = \sqrt{2}$ => $D_1 = D$ => $\alpha = 18^0$ => $\angle CAN = 2\alpha = 36^0$.

Ответ: 36^0

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
14	При верном и обоснованном ходе решения (доказано, что точка $M \in DK$) получен неверный ответ, или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует. НЕ доказано, что точка $M \in DK$, но при этом получен правильный ответ с использованием этого факта.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6 (20 баллов). На складе находятся товары общей массой 1300 тонн, которые размещены в различные контейнеры. Вес каждого такого контейнера не более 10 тонн. Эти контейнеры грузят в железнодорожные вагоны, вместимость которых не более 60 тонн. Для вывоза товара со склада необходимо сформировать железнодорожный поезд. Какое наименьшее количество вагонов должно быть в этом поезде, чтобы гарантированно вывезти весь товар со склада за один раз? (размеры контейнеров не учитывать).

Решение.

Очевидно, что 25 вагонов не хватит, т.к. например, если на складе имеется 150 контейнеров по 8600 кг и один весом 10 т $(150 \cdot 8{,}6 + 10 = 1300)$, то в один вагон можно погрузить не более 6 контейнеров. Следовательно, в 25 вагонах можно увезти не более $6 \cdot 25 = 150$ контейнеров.

Докажем, что 26 вагонов в любом случае хватит.

Пронумеруем контейнеры по убыванию их веса: 1-й самый тяжелый, 2-й самый тяжелый из оставшихся и т.д. Начинаем загружать вагоны по-порядку, пока суммарный вес контейнеров не првышает 60 т. Пусть в вагоне n контейнеров, очевидно, что $n \geq 6$. В результате такой загрузки получается, что вес каждого вагона не менее $360/7$ т. Действительно, пусть это не так и вес какого-то вагона менее $360/7$ т, тогда в него можно загрузить доплнительно еще контейнеры. Т.к. вес самого легкого из, загруженых в этот вагон, контейнера не более среднего, т.е. $\frac{360}{7n}$ т, то все оставшиеся незагруженые контейнеры весят не более $60/7$ т.

Итак, общий вес 26 вагонов не менее $26 \cdot \frac{360}{7} = 1337\frac{1}{7} > 1300$ т, ч.т.д.

Ответ: 26.

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
18	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифметические ошибки или при верном ответе решение недостаточно обосновано.
12	Доказано, что 25 вагонов не хватит.
8	Доказано, что 26 вагонов хватит.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.